Stanford University Libraries
3 6105 025 497 806

Digitized by Google

510.5
A673

Digitized by Google

ARCHIV

der

MATHEMATIK und PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Sechzigster Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1877.

Digitized by Google

162487

Digitized by Google

Inhalts-Verzeichniss

des sechzigsten Teils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Arithmetik, Algebra und reine Analysis ohne Integralrechnung.		
XIV.	Résolution d'un système d'équations, dont une est du second degré, tandis que les autres sont linéaires. Par J. Versluys	II.	128
XV.	Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Artikel V. Von Alfred Siebel	II.	138
XIX.	Ueber rationale Wurzeln kubischer Gleichungen in rationaler Gestalt. Von Eduard Liebrecht	II.	216
XXI.	Ueber aufsteigende Kettenbrüche. Von Emanuel Czuber	III.	265
XXVIII.	Lösung einer symmetrischen Exponentialgleichung. Von R. Hoppe	III.	336
XXX.	Nombres entiers, dont le cube est égal à la somme de trois ou de quatre cubes entiers. Par Eugène Rebout	IV.	353
XXXVIII.	Ein Beitrag zur Theorie des Maximum und des Minimum. Von Josef Gruber	IV.	415
XXXIX.	Die Lehre vom Grössten und Kleinsten, als Zweig des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen. Von Heilermann	IV.	436
XL.	Identité remarquable fournie par la quatrième puissance d'une somme de quatre nombres. Par Georges Dostor	IV.	445

Digitized by Google

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Integralrechnung.		
XVIII.	Ueber das Pfaff'sche Problem. Von Hamburger	II.	185
XXVIII.	Bemerkung zur mechanischen Quadratur. Von Ligowski	III.	336
XXIX.	Beiträge zur Theorie der Reihen. Von E. Meissel	IV.	337
	Geometrie der Ebene.		
VI.	Zur Theorie der Symmetriepunkte erster Ordnung. Von Emil Hain	I.	71
VII.	Beziehungen zwischen Dreieck und Kreis. Von Emil Hain	I.	78
VIII.	Die Höhenschnitte der Dreiecke aus vier Geraden. Von Emil Hain	I.	88
IX.	Ueber isogonal entsprechende Punkte. Von Emil Hain	I.	92
X.	Eine geometrische Aufgabe. (Schluss.) Von Eduard Liebrecht	I.	99
X.	Démonstration élémentaire de deux formules logarithmiques. Par P. Mansion	I.	105
X.	Zur Theorie der Kegelschnitte. Von Max Greiner	I.	108
XII.	Ueber einige Beziehungen der elastischen Curve zu den elliptischen Functionen, speciell zu dem elliptischen Bogen. Von C. Bender	II.	117
XIII.	Théorème général sur les courbes unicursales. Par Paul Appell	II.	125
XVII.	Ueber das Kreisviereck. Von Max Greiner	II.	178
XIX.	Eine Schüleraufgabe. Von Franz Lukas	II.	224
XXII.	Théorème sur les courbes, dont les tangentes font partie d'un complexe de droites du premier ordre. Par Paul Appell	III.	274
XXIV.	Beiträge zur Theorie des Dreiecks. Von Emil Hain	III.	290
XXXVI.	Ueber Doppelverhältnisse. Von Emil Hain	IV.	404
XXXVII.	Zur Tangirung der Kegelschnitte. Von Wasserschleben	IV.	410
XL.	Radius des Kreises, der drei gegebene Kreise berührt. Von C. J. Matthes	IV.	445
XL.	Planimetrischer Lehrsatz. Von E. Engelbrecht	IV.	447

Digitized by Google

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Geometrie des Raumes.

III.	Flächen zweiter Ordnung mit einer Symptosenaxe. Von Gustav von Escherich	I.	22
IV.	Untersuchungen über das sphärische Pascal'sche Sechseck und das sphärische Brianchons-Sechsseit. Von E. F. Thieme	I.	43
V.	Geometrische Deutung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der Flächentheorie. Von R. Hoppe	I.	65
XIX.	Analoge Eigenschaften der ebenen und sphärischen Parabel. Von R. Mehmke	II.	215
XXIII.	Zweite asymptotische Linie einer Regelfläche. Von R. Hoppe	III.	276
XXV.	Begriff der Harmonikalebene eines Punktes in Bezug auf ein Tetraeder. Von Emil Hain . . .	III.	302
XXVI.	Bemerkung über Symmetriepunkte des Tetraeders. Von Emil Hain	III.	304
XXVII.	Propositions sur les corps de révolution de la géométrie élémentaire. Par Georges Dostor .	III.	307
XXXI.	Construction der Reflexe auf ebenen Spiegelflächen. Von Karl Köpl	IV.	356
XXXIV.	Ueber Punktlinien auf krummen Flächen. Von F. Hoza	IV.	371
XXXV.	Nachträge zur Curven- und Flächentheorie. Von R. Hoppe	IV.	376

Mechanik.

X.	Kugel von excentrischer Masse und centrischer Trägheit. Von R. Hoppe	I.	100
XI.	Ueber die oscillatorischen Bewegungen einer Walze mit excentrischer Schwerpunktsaxe. Von C. Bender	II.	113
XVI.	Ueber das Rollen der Flächen aufeinander. Von R. Hoppe	II.	159
XIX.	Variation der Hauptträgheitsaxen. Von R. Hoppe	II.	218
XIX.	Axenconstruction der Ellipse, als Lissajous'scher Schwingungscurve. Von H. Januschke . . .	II.	222
XXXII.	Méthode simple et rapide pour déterminer les lois du mouvement du pendule à petites oscillations. Par Georges Dostor	IV.	366

№ der Abhandlung. Heft. Seite.

Optik.

		Heft.	Seite.
II.	Construction der Wellenfläche bei der Brechung eines homocentrischen Strahlenbündels an einer Ebene. Von A. von Frank	I.	14
X.	Elementarer Beweis eines Satzes aus der Optik. Von Fr. Brodersen	I.	107

Astronomie.

		Heft.	Seite.
XXXIII.	Propriété trigonométrique du triangle rectangle, avec application en astronomie au calcul de l'anomalie vraie en valeur de l'anomalie excentrique. Par Georges Dostor	IV.	369

Physik.

		Heft.	Seite.
I.	Simultane Schwingungen zweier Magnete. Von J. Obermann	I.	1
XX.	Ueber den Durchgang des elektrischen Stroms durch eine Kugelcalotte. Von Wilhelm Wolf	III.	225

Litterarische Berichte.

CCXXXVII. Boncompagni (Bull. IX. 1—6). Frischauf (abs. Geom.). Mittelacher (Grdg. d. Kraft).

CCXXXVIII. Steinbrink (höh. Diffq.). Hugel (mag. Syst.). Lucas (Primz.). Burnier (vielst. log. R). Schleusing ($\sqrt{\pi}$). Navier (Diff. u. Int. R.). Brioschi (Ann. VI. VII.). Catalan (N. Corr. II. 1—6.).

CCXXXIX. August (Ar.). Höhr (Ar. II.). Sachse (Ar. u Alg.). Gilles (eb. Geom.). Recknagel (eb. Geom.). Nagel (geom. Anal.). Hermes (Aufg.). Saint-Germain (Ueb. Mech.). Harms (Rech. B.). Vega (Log.). Queipo (Log.). August (Log.). Versluys (Log.). Burnier (Osterf. — kub. Glch.).

CCXL. Biasi (Trsf. Glch.). Winckler (Diff. Glch.). Hess (Polyed.). Pohlke (darst. G.). Kreuszel (darst. G.). Adam (eb. Trig.). Vymazal (Trig.). Biehringer (schief. Trig.). Unverzagt (Quat.). Doll (Niv. Instr.). Delabar (Beleucht.). Schreiber (bnr. Höh. M.). Veltmann (Glocke). Bierens de Haan (N. Arch. I. II.). Catalan (N. Corr. II. 7—12.).

Berichtigungen

in Teil LIX.

Seite 77. Zeile 7 v. u. } zu $\mathfrak{Sin}\frac{2h}{k}$ und dem gleichbedeutenden füge den Factor $\frac{1}{2}$
„ 1 v. u. }

„ 2 v. u. vor $\mathfrak{Sin}\frac{2h}{k}$ streiche den Factor 2

„ 153. „ 8 v. u. soll es heissen:

$$(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n) = \alpha_n{}^{r+n-1} \frac{\Delta(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1})}{\Delta(\alpha_1 \dots \alpha_\nu)} = \frac{\alpha_n{}^{r+n-1}}{f'\alpha_n}$$

„ 158. „ 5 v. o. statt A_{n-2} u. B_{n-2} setze A_{-n+2} u. B_{-n+2}

„ 159. „ 14 v. o. „ A_{r-1} „ A_{r+1}

„ 178. „ 2 v. u. „ B_{n-2} „ B_{-n+2}

„ 1 v. u. „ A_{n-2} „ A_{-n+2}

„ 248. „ 13 v. o. „ $p_1 t_1$ „ $p_1 t_1 t$

„ 249. „ 12 v. o. fehlt . . . (77)

in (78) muss t^2 wegfallen

„ 256. Zeile 5 v. o. statt eg setze $\sqrt{eg}$

„ 7 v. o. fehlt vor der Klammer der Factor t

„ 257. „ 2 v. o. statt E, F setze $-E$, $-F$

„ 5 v. o. „ E „ $-E$

„ 8 v. o. „ $-\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2$ setze $+\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2$

„ $-\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2$ „ $+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2$

„ 262. „ 5 v. u. „ $-\frac{\sqrt{e}}{\varrho_1}$ „ $\frac{\sqrt{e}}{\varrho_1}$

„ 264. „ 3 v. u. „ $\sqrt{g}\,\partial u$ „ $\sqrt{g}\,\partial v$

„ 267. „ 8 v. u. „ S. 16. „ S. 17

„ 270. „ 2 v. o. „ $\frac{\partial u}{\partial s}$ „ $\frac{\partial \mu}{\partial s}$

„ 306. in den Formeln (109) fehlt überall im Nenner der Factor 4

im litt. Ber.

Seite 6. Zeile 4 v. u. statt werden setze worden

„ 31. „ 1 v. o. „ Annehmen „ Anlehnen

Digitized by Google

in Teil LX.

Seite 139. Zeile 7 v. o. statt c_{n-2} setze c_{n-e}

„ 9 v. o. „ $\overset{m}{a}_{e,r}$ „ $\overset{m}{a}_{s,r}$

„ 140. „ 4 v. o. „ , wenn „ $\gtreqless 0$, wenn

„ < 4 „ > 4

„ 8 v. u. „ $\frac{r.2}{s}$ „ $\frac{r-2}{s}$

„ 141. „ 2 v. u. „ < 6 „ > 6

„ 144. „ 3 v. u. „ „ $\leqq \frac{r-2}{s}$ setze $z_0 \leqq \frac{r-2}{s}$

„ 153. „ 2 v. o. lies $r = 3$; $\log p = 0{,}5508 - 2$

„ 5 u. 6 v. o. statt $\log z'$ setze $\log Z'$

„ 6 v. o. statt z' „ Z'

„ 154. „ 6 u. 7 v. u. lies $\frac{}{\log P} \begin{matrix} = 8, \ldots \\ = 0, \ldots \end{matrix}$

„ 156. „ 11 v. o. statt -8 setze $-\infty$

Tabelle Seite 3. Anmerk., ergänze: Die $\log \varphi_r(z)$ wurden um 10 erhöht

bei	$r = 3$	4	5	6
	$z < 1{,}50$	1,34	1,25	1,26

„ „ 6. Nach Tabelle II[b]. ergänze: In den letzten Zeilen wurden die $y < 0$ um 10 erhöht.

I.

Simultane Schwingungen zweier Magnete.

Von

J. Obermann.

Meines Wissens ist das mechanische Problem der gleichzeitigen Schwingungen zweier auf einander wirkender Magnete noch von keiner Seite in Angriff genommen worden. Die sich ergebenden Differentialgleichungen sind in der Tat so beschaffen, dass an eine allgemeine Lösung des Problems bei dem derzeitigen Stande der mathematischen Wissenschaft nicht zu denken ist. In dem Falle aber, als man sich auf unendlich kleine Schwingungen beschränkt, lassen sich die Differentialgleichungen nach bekannten Methoden durch trigonometrische Functionen integriren, und die Darstellung dieses Falles ist der Inhalt des folgenden.

Differentialgleichungen.

Wir denken uns zwei Idealmagnete ns und $n's'$ um ihre Mittelpunkte in ein und derselben Horizontalebene drehbar und die Mittelpunkte seien in demselben magnetische Meridiane. In n und s seien die magnetischen Massen $+\mu$ und $-\mu$, in n' und s' $+\mu'$ und $-\mu'$. Wir setzen $ns = 2r$, $n's' = 2r'$. Die magnetischen Momente der beiden Magnete sind $m = 2\mu r$, $m' = 2\mu' r'$ n' und s seien die nächsten Pole der beiden Magnete. Ferner sei e die Entfernung der beiden Magnete, und wir nehmen an $e > r + r'$. H sei die Horizontalcomponente der erdmagnetischen Kraft auf die magnetische Masseneinheit, φ und φ' die Winkel der magnetischen Axen (die Elongationen) der beiden Magnete mit dem magnetischen Meridian zur Zeit t, K und K' ihre Trägheitsmomente. Man findet als Ausdruck des Drehungsmomentes des Magnetes $n's'$ auf ns (Vergl. Lamont Magnetismus)

$$-\mu\mu' er\sin\varphi.\left(\frac{1}{\overline{sn'}^3}+\frac{1}{\overline{nn'}^3}-\frac{1}{\overline{ns'}^3}-\frac{1}{\overline{ss'}^3}\right)$$

$$+\mu\mu' rr'\sin(\varphi-\varphi')\left(\frac{1}{\overline{sn'}^3}+\frac{1}{\overline{nn'}^3}+\frac{1}{\overline{ns'}^3}+\frac{1}{\overline{ss'}^3}\right)$$

und des Magnetes ns auf $n's'$

$$-\mu\mu' er'\sin\varphi'\cdot\left(\frac{1}{\overline{sn'}^3}+\frac{1}{\overline{ss'}^3}-\frac{1}{\overline{ns'}^3}-\frac{1}{\overline{nn'}^3}\right)$$

$$-\mu\mu' rr'\sin(\varphi-\varphi')\cdot\left(\frac{1}{\overline{sn'}^3}+\frac{1}{\overline{ss'}^3}+\frac{1}{\overline{ns'}^3}+\frac{1}{\overline{nn'}^3}\right)$$

wobei φ und φ' nach derselben Seite des magnetischen Meridians als positiv gerechnet sind, und

$$\overline{n's}^2=(r\sin\varphi+r'\sin\varphi')^2+(e-r\cos\varphi-r'\cos\varphi')^2$$
$$\overline{ss'}^2=(r\sin\varphi-r'\sin\varphi')^2+(e-r\cos\varphi+r'\cos\varphi')^2$$
$$\overline{ns'}^2=(r\sin\varphi+r'\sin\varphi')^2+(e+r\cos\varphi+r'\cos\varphi')^2$$
$$\overline{nn'}^2=(r\sin\varphi-r'\sin\varphi')^2+(e+r\cos\varphi-r'\cos\varphi')^2$$

Berücksichtigt man auch die Momente, welche der Erdmagnetismus auf die beiden Magnete ausübt, nämlich $-mH\sin\varphi$, $-m'H\sin\varphi'$, so ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen der Bewegung für den Stab ns

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{mH}{K}\sin\varphi-\frac{\mu\mu' er}{K}\sin\varphi.\left(\frac{1}{\overline{sn'}^3}+\frac{1}{\overline{nn'}^3}-\frac{1}{\overline{ns'}^3}-\frac{1}{\overline{ss'}^3}\right)$$
$$+\frac{\mu\mu' rr'}{K}\sin(\varphi-\varphi').\left(\frac{1}{\overline{sn'}^3}+\frac{1}{\overline{nn'}^3}+\frac{1}{\overline{sn'}^3}+\frac{1}{\overline{ss'}^3}\right)$$

1) für den Stab $n's'$

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2}=-\frac{m'H}{K}\sin\varphi'-\frac{\mu\mu' er'}{K'}\sin\varphi'.\left(\frac{1}{\overline{sn'}^3}+\frac{1}{\overline{ss'}^3}-\frac{1}{\overline{ns'}^3}-\frac{1}{\overline{nn'}^3}\right)$$
$$-\frac{\mu\mu' rr'}{K'}\sin(\varphi-\varphi').\left(\frac{1}{\overline{sn'}^3}+\frac{1}{\overline{ss'}^3}+\frac{1}{\overline{ns'}^3}+\frac{1}{\overline{nn'}^3}\right)$$

Diese Differentialgleichungen gelten noch allgemein, und man überzeugt sich durch Zeichnung leicht, dass sie ungeändert dieselben bleiben, welche gegenseitige Lagen auch die beiden Magnete zur Zeit t haben.

Nehmen wir nun die Elongationen φ und φ' sehr klein an und setzen demgemäss

Digitized by Google

φ	für	$\sin\varphi$
φ'	„	$\sin\varphi'$
$\varphi-\varphi'$	„	$\sin(\varphi-\varphi')$
1	„	$\cos\varphi$ und $\cos\varphi'$

so wird weiter

$$n's = e-r-r'$$
$$ss' = e-r+r'$$
$$ns' = e+r+r'$$
$$nn' = e+r-r'$$

und wenn man setzt

$$2)\quad\begin{cases} a = \dfrac{m}{K}\left\{H+\dfrac{m'}{4r'}\left[(e-r')\left(\dfrac{1}{(e-r-r')^3}+\dfrac{1}{(e+r-r')^3}\right) -(e+r')\left(\dfrac{1}{(e+r+r')^3}+\dfrac{1}{(e-r+r')^3}\right)\right]\right\} \\[2ex] a' = \dfrac{m'}{K'}\left\{H+\dfrac{m}{4r}\left[(e-r)\left(\dfrac{1}{(e-r-r')^3}+\dfrac{1}{(e-r+r')^3}\right) -(e+r)\left(\dfrac{1}{(e+r+r')^3}+\dfrac{1}{(e+r-r')^3}\right)\right]\right\} \\[2ex] b = \dfrac{mm'}{4K}\cdot\left[\dfrac{1}{(e-r-r')^3}+\dfrac{1}{(e-r+r')^3}+\dfrac{1}{(e+r+r')^3}+\dfrac{1}{(e+r-r')^3}\right] \\[2ex] b' = \dfrac{mm'}{4K'}\left[\dfrac{1}{(e-r-r')^3}+\dfrac{1}{(e-r+r')^3}+\dfrac{1}{(e+r+r')^3}+\dfrac{1}{(e+r-r')^3}\right] \end{cases}$$

so erhalten die Differentialgleichungen der beiden Magnetstäbe für unendlich kleine Schwingungen die einfache Gestalt

$$3)\quad\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}+a\varphi+b\varphi'=0 \\[2ex] \dfrac{d^2\varphi'}{dt^2}+a'\varphi'+b'\varphi=0 \end{cases}$$

Integration.

Diese Gleichungen können nun nach bekannten Methoden integrirt werden. So z. B. genügt die Substitution

Digitized by Google

$$\varphi = Ae^{\alpha t}, \quad \varphi' = Be^{\alpha t}$$

unter der Bedingung

4) $$\alpha^4 + \alpha^2(a+a') + (aa'-bb') = 0$$

woraus

$$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{a+a'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 - (aa'-bb')}}$$

Um über die Beschaffenheit der Wurzeln dieser Gleichnng Aufklärung zn erhalten, nehmen wir den Fall, dass die Magnete von solcher Länge seien, dass gegen die Wirkung der Pole s nnd n' auf einander die der übrigen vernachlässigst werden kann. Die Ausdrücke für die Constanten $aa'bb'$ gestalten sich dann einfacher:

5) $$\begin{cases} a = \frac{m}{K}\left\{H + \frac{m'(e-r')}{4r'(e-r-r')^3}\right\}, & b = \frac{mm'}{4K(e-r-r')^3} \\ a' = \frac{m'}{K'}\left\{H + \frac{m(e-r)}{4r(e-r-r')^3}\right\}, & b' = \frac{mm'}{4K'(e-r-r')^3} \end{cases}$$

Berücksichtigt man nun, dass $e > r + r'$, so sind aa' bb' positive Grössen, und das Product aa' besteht ans 4 Summanden, deren letzter ist

$$\left[\frac{mm'}{4(e-r-r')^3}\right]^2 \cdot \frac{1}{KK'} \cdot \frac{(e-r)(e-r')}{rr'},$$

während

$$bb' = \left[\frac{mm'}{4(e-r-r')^3}\right]^2 \cdot \frac{1}{KK'}$$

Da nnn

$$\frac{(e-r)(e-r')}{rr'} > 1,$$

so ist dieser Summand, nnd also umsomehr aa' grösser als bb', also $aa'-bb'$ eine positive Grösse. Ferner ist

$$\left(\frac{a+a'}{2}\right) - (aa'-bb') = \tfrac{1}{4}[(a-a')^2 + 4bb']$$

an sich positiv und daher $\sqrt{\left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 - (aa'-bb')}$ in jedem Falle reell. Zugleich ist diese Wurzelgrösse kleiner als $\frac{a+a'}{2}$ uud daher alle 4 Wnrzeln der Glch. 4) imaginär.

Setzt man daher

Digitized by Google

6)
$$\begin{cases} p = \dfrac{a + a'}{2} \\ q = \sqrt{\left(\dfrac{a+a'}{2}\right)^2 - (aa' - bb')} \\ \lambda = \sqrt{p-q} \\ \varkappa = \sqrt{p+q} \end{cases}$$

wo die Wurzeln absolut zu nehmen sind, so sind die Wurzeln der Gleichung 4) $+\lambda i$, $-\lambda i$, $+\varkappa i$, $-\varkappa i$ und daher die completen Integrale der Differentialgleichungen 3) darstellbar in der Form:

7)
$$\begin{cases} \varphi = C \cos \lambda t + E \sin \lambda t + D \cos \varkappa t + F \sin \varkappa t \\ \varphi' = C' \cos \lambda t + E' \sin \lambda t + D' \cos \varkappa t + F' \sin \varkappa t \end{cases}$$

Die Bewegung beider Magnete ist also eine schwingende und äquivalent der Uebereinanderlagerung von 4 einfachen Schwingungen. Die Amplituden derselben $CD \ldots$ sind bestimmt, wenn man den Bewegungszustand in irgend einem Momente kennt. Es sei für $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\varphi' = \varphi_0'$ und $\dfrac{d\varphi}{dt} = 0$, $\dfrac{d\varphi'}{dt} = 0$ dann ist

$$\lambda E + \varkappa F = 0$$
$$\lambda E' + \varkappa F' = 0$$

Ausserdem liefert die Substitution in die Differentialgleichungen:

$$(\lambda^2 - a)E = bE'$$
$$(\varkappa^2 - a)F = bF'$$

d. i. mit Rücksicht auf die vorigen Gleichungen

$$\lambda E + \varkappa F = 0$$
$$\lambda(\lambda^2 - a)E + \varkappa(\varkappa^2 - a)F = 0$$

Da $\varkappa$ von λ verschieden ist, so ist auch die Determinante dieser Gleichungen von 0 verschieden, daher muss $E = E' = 0$ sein, woraus dann weiter folgt $F = F' = 0$.

Somit ist die einfachste Gestalt der Integralgleichungen:

8)
$$\begin{cases} \varphi = C \cos \lambda t + D \cos \varkappa t \\ \varphi' = C' \cos \lambda t + D' \cos \varkappa t \end{cases}$$

Für die Amplituden $CDC'D'$ erhält man man aus den Anfangsbedingungen und durch Substitution in die Differentialgleichungen:

$$9)\begin{cases} C+D=\varphi_0 \\ C'+D'=\varphi_0' \\ \left.\begin{array}{l} C(\lambda^2-a)=bC' \\ D(\varkappa^2-a)=bD' \end{array}\right\} \text{ woraus folgt } \lambda^2 C+\varkappa^2 D=a\varphi_0+b\varphi_0' \\ \left.\begin{array}{l} C'(\lambda^2-a')=b'C \\ D'(\varkappa^2-a')=b'D \end{array}\right\} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \lambda^2 C'+\varkappa^2 D'=a'\varphi_0'+b'\varphi_0 \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$10)\begin{cases} C=\dfrac{(\varkappa^2-a)\varphi_0-b\varphi_0'}{\varkappa^2-\lambda^2}, & C'=\dfrac{(\varkappa^2-a')\varphi_0'-b'\varphi_0}{\varkappa^2-\lambda^2} \\ D=\dfrac{(a-\lambda^2)\varphi_0+b\varphi^{0'}}{\varkappa^2-\lambda^2}, & D'=\dfrac{(a'-\lambda^2)\varphi_0'+b'\varphi_0}{\varkappa^2-\lambda^2} \end{cases}$$

sowie die dependenten Bestimmungen:

$$11)\begin{cases} C'=\dfrac{\lambda^2-a}{b}C, & C=\dfrac{\lambda^2-a'}{b'}C' \\ D'=\dfrac{\varkappa^2-a}{b}D, & D=\dfrac{\varkappa^3-a'}{b'}D' \end{cases}$$

Discussion.

Die Integralgleichungen in ihrer einfachsten Gestalt zeigen, dass die Bewegung eines jeden der Magnete äquivalent ist der Uebereinanderlagerung zweier einfacher Schwingungen von den Perioden $\frac{2\pi}{\lambda}$ und $\frac{2\pi}{\varkappa}$, wovon die erste die grössere ist. Die Bewegung ist im Allgemeinen nicht so beschaffen, dass nach gleichen Zeiten genau dieselben Bewegungszustände wiederkehren würden. Denn gäbe es eine Zeit τ, nach welcher der Bewegungszustand des Magnetes ns derselbe wäre wie vor dieser Zeit, so würde die Gleichheit der Ausschläge und der Winkelbeschleunigungen ausgedrückt sein in den Gleichungen:

$$C\cos\lambda t+D\cos\varkappa t = C\cos\lambda(t+\tau)+D\cos\varkappa(t+\tau)$$
$$\lambda^2 C\cos\lambda t+\varkappa^2 D\cos\varkappa t = \lambda^2 C\cos\lambda(t+\tau)+\varkappa^2 D\cos\varkappa(t+\tau)$$

aus denen folgt:

$$(\varkappa^2-\lambda^2)D\cos\varkappa t = (\varkappa^2-\lambda^2)D\cos\varkappa(t+\tau) \text{ und}$$
$$(\varkappa^2-\lambda^2)C\cos\lambda t = (\varkappa^2-\lambda^2)C\cos\lambda(t+\tau)$$

und da λ von $\varkappa$ verschieden ist, so würde zur Erfüllung dieser Gleichungen erforderlich sein

$$\tau = n\frac{2\pi}{\varkappa} = m\frac{2\pi}{\lambda}$$

unter n und m ganze Zahlen verstanden. Oder es müsste sein

$$\lambda : \varkappa = m : n$$

es müssten also λ und $\varkappa$ ein rationales Verhältniss haben. Dies ist aber, wie aus den Ausdrücken für λ und $\varkappa$ hervorgeht, im Allgemeinen nicht der Fall. Zwar kehrt derselbe Wert der Elongation nach einer gewissen kleinsten Zeit wieder, aber diese Zeit ist von der laufenden Zeit t abhängig und eine andere bei der Geschwindigkeit und bei der Beschleunigung; und diese Intervalle sind überdies auch bei den beiden Magneten verschiedene.

Um unsere Formeln zu verificiren, setzen wir einmal $\varphi' = 0$ für alle Zeit, dann gehen die Formeln 3) und 8) über in

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -a\varphi; \qquad \varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{a}\, t$$

und umgekehrt, wenn $\varphi = 0$ ist,

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2} = -a'\varphi'; \qquad \varphi' = \varphi_0' \cos \sqrt{a'}\, t$$

welche Formeln die Schwingungen des einen Stabes darstellen, wenn der andere ruht. Die Schwingungsdauer der beiden Stäbe unter diesen Umständen sind

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}; \qquad \tau' = \frac{2\pi}{\sqrt{a'}}$$

Man kann den Gang der Magnete auf graphischem Wege veranschaulichen, wenn man wie in Fig. 1. t als Abscisse betrachtend die Curven $y = C \cos \lambda t$ und $y = -D \cos \varkappa t$ construirt. Die zwischen beiden Curven enthaltenen Ordinaten geben die jeweiligen Ausschläge des ersten Magneten. Ebenso stellen die zwischen den Curven $y = C' \cos \lambda t$ und $y = -D' \cos \varkappa t$ enthaltenen Ordinaten den Gang des zweiten Magnetes dar.

So würde Fig. 1. den Gang des Magnetes ns darstellen, wenn $OA = C$, $OB = D$, $O\alpha = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\lambda}$, $O\beta = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\varkappa}$ ist.

Ebenso würde Fig. 2. die Bewegung des zweiten Magnetes darstellen, wenn $OA = C'$, $OB = D'$, $O\alpha = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\lambda}$, $O\beta = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\varkappa}$ ist. In Fig. 1.

gehört zur grösseren Periode die kleinere Amplitude, in Fig. 2. die grössere Amplitude. Selbstverständlich bedeuten die nach aufwärts gerichteten Teile der Figur Ausschläge nach der einen Seite des magnetischen Meridians, und die nach abwärts gerichteten Ausschläge nach der entgegengesetzten Seite.

Nehmen wir den besonderen Fall, dass die beiden Magnete vollständig gleich sind, also $m = m'$, $r = r'$, $K = K'$; dann wird $a = a'$, $b = b'$, $p = a$, $q = b$, $\lambda = \sqrt{a-b}$, $\varkappa = \sqrt{a+b}$, $C = \frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_0') = -C'$, $D = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_0',) = D'$. Sind φ_0 und φ_0' gleichbezeichnet, so gehören zur grösseren Periode $\frac{2\pi}{\sqrt{a-b}}$ die kleineren Amplituden C und C' bei beiden Magneten. Die Schwingungen beider sind also von der Art der Fig. 1. Sind aber φ_0 und φ_0' ungleich bezeichnet, so sind die Schwingungen beider Magnete von der Art der Figur 2. Bemerkenswert ist hier der Fall $\varphi_0 = \varphi_0'$; dann wird für alle Zeit $\varphi = \varphi'$, die Schwingungen beider Magnete sind isochron, und zwar einfache Schwingungen mit der Amplitude φ_0 und der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{\sqrt{a+b}}$ Dasselbe gilt, wenn $\varphi_0 = -\varphi_0'$ ist, nur ist dann die Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{\sqrt{a-b}}$

Um eine beiläufige Vorstellung von den Zahlenwerten zu bekommen, durch welche die Constanten ausgedrückt sind, berechnen wir folgendes Beispiel, wobei Millimeter als Längen-, Secunde als Zeit-, Milligramm als Gewichtseinheit angenommen ist.

$m = m' = 100$ Millionen, $K = K' = 4230$ Millionen, $H = 1{\cdot}78$, $e = 400$, $r = r' = 100$.

Es findet sich

$$a = a' = 0{\cdot}2637$$
$$b = b' = 0{\cdot}0739$$
$$\lambda = 0{\cdot}4357, \quad \varkappa = 0{\cdot}5810$$

Ist ferner

$$\varphi_0 = 30' = 0{\cdot}008727$$
$$\varphi_0' = 20' = 0{\cdot}005818$$

so wird

$$C = -C' = 5' = 0{\cdot}001454$$
$$D = D' = 25' = 0{\cdot}007272$$

War von zwei gleichen Magneten der eine anfänglich in der Ruhelage, z. B. $\varphi_0' = 0$, so wird $C = -C' = \frac{1}{2}\varphi_0$, $D = D' = \frac{1}{2}\varphi_0$. Die Bewegungsgleichungen sind in diesem Falle

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi_0 (\cos\lambda t + \cos\varkappa t) = \varphi_0 \cos\frac{\varkappa+\lambda}{2} t . \cos\frac{\varkappa-\lambda}{2} t$$

$$\varphi' = -\tfrac{1}{2}\varphi_0 (\cos\lambda t - \cos\varkappa t) = -\varphi_0 \sin\frac{\varkappa+\lambda}{2} t . \sin\frac{\varkappa-\lambda}{2} t$$

Es kommt also auch der anfänglich ruhende Magnet in Schwingungen derselben Art. Die folgenden Figuren 3 und 4 veranschaulichen die Bewegung der beiden Magnete von $t = 0$ bis beiläufig $t = \frac{5\pi}{\varkappa}$.

Nehmen wir ein Beispiel von ungleichen Magneten. Es sei

$m = 138$ Millionen,	$m' = 8$ Millionen
$K = 133680$ Millionen,	$K' = 130$ Millionen.
$r = 463$	$r' = 116$
$e = 600$, $H = 1{\cdot}78$,	$\varphi_0 = \varphi_0' = 2^0 = 0{\cdot}0349$

Es findet sich

$a = 0{\cdot}931$	$a' = 67{\cdot}974$
$b = 0{\cdot}223$	$b' = 229{\cdot}384$
$p = 34{\cdot}452$	$q = 34{\cdot}276$
$\lambda = 0{\cdot}4200$	$\varkappa = 8{\cdot}2903$
$C = 0{\cdot}0344$	$C' = -0{\cdot}1164$
$D = 0{\cdot}0005$	$D' = 0{\cdot}1513$
$\frac{2\pi}{\lambda} = 14{\cdot}9600$,	$\frac{2\pi}{\varkappa} = 0{\cdot}7579$

Die Schwingungen des grösseren Magnetes sind also von der Art der Fig. 2., die des kleineren von der Art der Fig. 1.

Sind beide Magnete ziemlich verschieden, wie in dem letzten Beispiele, so kann man die eine Periode als Haupt-, die andere als Nebenperiode des schwingenden Magnetes bezeichnen. Als Hauptperiode muss jene betrachtet werden, zu der die grössere Amplitude gehört. So ist in dem letzten Beispiele für den grösseren Magnet $\frac{2\pi}{\lambda} = 14{\cdot}9 \ldots$ die Haupt-, $\frac{2\pi}{\varkappa} = 0{\cdot}7 \ldots$ die Nebenperiode, während beim kleineren Magnet das umgekehrte der Fall ist. Die Hauptperiode bestimmt den Gang des Magnetes im Grossen und Ganzen, während die Nebenperiode die Abweichung von dem normalen Gange der Schwingungen darstellt. Vernachlässigt man wegen der Kleinheit von D in dem letzten Beispiele die Grösse $D\cos\varkappa t$, so können die Bewegungsgleichungen in folgende Form gebracht werden:

Digitized by Google

$$\varphi = C \cos \lambda t$$

$$\varphi' = C' \cos \lambda t + D' \cos \varkappa t, \quad \text{oder} \quad \varphi' - \frac{C'}{C}\varphi = D' \cos \varkappa t$$

Da $\varkappa$ gegen λ sehr gross ist, so kann φ als nahezu constant angesehen werden, während $\cos \varkappa t$ mehrmals das Zeichen wechselt. Setzt man $\varphi' - \frac{C'}{C}\varphi = \psi$, so stellt die Gleichung $\psi = D' \cos \varkappa t$ einfache Schwingungen des kleineren Magnetes vor um eine Ruhelage, die um den Winkel $\frac{C'}{C}\varphi$ aus dem magnetischen Meridian verschoben ist, und zwar nach jener Seite hin, wo sich der nächstliegende Pol des grösseren Magnetes befindet.

In dem Falle also, wenn die beiden Magnete sehr verschieden sind, kann man die Bewegung der beiden Magnete näherungsweise als einfache Schwingungen betrachten, und zwar die des grösseren um den magnetischen Meridian als Ruhelage, die des kleineren um eine variable Ruhelage, die zugleich mit der Bewegung des nächstliegenden Pols des grösseren Magnetes sich ändert.

Berücksichtigung von Widerständen.

Bei der wirklichen Bewegung der Magnete kommt ausser der Wechselwirkung derselben und der erdmagnetischen Kraft noch die Torsion des Aufhängefadens in Betracht. Wir beschränken uns auf den Fall, dass der Ausschlagswinkel zugleich der Torsionswinkel ist. Dann sind $\theta\varphi$ und $\theta'\varphi'$ die Torsionsmomente bei den Ausschlägen φ und φ', unter θ und θ' die Torsionsconstanten der beiden Aufhängefäden verstanden. Da die Torsion die Ausschlagswinkel zu verkleinern strebt, so werden die Bewegungsgleichungen 3) für unendlich kleine Schwingungen

$$12) \quad \begin{cases} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + (a + \theta)\varphi + b\varphi' = 0 \\ \frac{d^2\varphi'}{dt^2} + (a' + \theta')\varphi' + b'\varphi = 0 \end{cases}$$

Die Bewegung ist also wesentlich dieselbe wie ohne Berücksichtigung der Torsion, nur erleiden die Constanten eine entsprechende Aenderung, und zwar tritt $a + \theta$ an die Stelle von a und $a' + \theta'$ an die Stelle von a'. Sind die beiden Torsionsconstanten gleich, so wird p grösser, während q ungeändert bleibt, folglich werden die Schwin-

gangsperioden $\frac{2\pi}{\lambda}$ und $\frac{2\pi}{\varkappa}$ kleiner, während die Torsion auf die Amplituden $CDC'D'$ keinen Einfluss hat.

Wir wollen noch untersuchen, in wiefern die in dem frühern entwickelten Gesetze der Bewegung sich ändern, wenn man Widerstände berücksichtigt, die der Geschwindigkeit proportional sind. Es sei c der Widerstandscoefficient bei dem einen Magnete, c' bei dem andern, so hat man in den Gleichungen 3) noch die Glieder $c\frac{d\varphi}{dt}$ und $c'\frac{d\varphi'}{dt}$ hinzuzufügen. Diese Gleichungen gehen somit über in die folgenden:

13)
$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + a\,\varphi + b\,\varphi' + c\,\frac{d\varphi}{dt} = 0 \\ \frac{d^2\varphi'}{dt^2} + a'\varphi' + b'\varphi + c'\frac{d\varphi'}{dt} = 0 \end{cases}$$

Anstatt der Gleichung 4) erhält man

14) $\alpha^4 + \alpha^3(c+c') + \alpha^2(a+a'+cc') + \alpha(ac'+a'c) + (aa'-bb') = 0$

deren Wurzeln die Form haben werden

$$-\delta+\mu i, \qquad -\varepsilon+\nu i$$
$$-\delta-\mu i, \qquad -\varepsilon-\nu i$$

Da man den Widerstand als gering, somit c und c' als kleine Grössen voraussetzt, so werden sich die Wurzeln dieser Gleichung sehr wenig von den Wurzeln der Gleichung 4) unterscheiden. Es müssen also $\delta\,\varepsilon$ kleine Zahlen, und $\mu\,\nu$ von dem frühern $\lambda\,\varkappa$ sehr wenig verschieden sein. Die Integralgleichungen 7) gehen jetzt über in

$$\varphi = e^{-\delta t}(C\cos\mu t + E\sin\mu t) + e^{-\varepsilon t}(D\cos\nu t + F\sin\nu t)$$
$$\varphi' = e^{-\delta t}(C'\cos\mu t + E'\sin\mu t) + e^{-\varepsilon t}(D'\cos\nu t + F'\sin\nu t)$$

Man kann nun immer setzen

$$C = M\cos m, \quad D = N\cos n, \quad C' = M'\cos m', \quad D' = N'\cos n'$$
$$E = M\sin m, \quad F = N\sin n, \quad E' = M'\sin m', \quad F' = N'\sin n'$$

wodurch sich die vorigen Gleichungen umändern in die folgenden

$$14)\quad \begin{cases} \varphi = M\, e^{-\delta t}\cos(\mu t - m) + N\, e^{-\varepsilon t}\cos(\nu t - n) \\ \varphi' = M' e^{-\delta t}\cos(\mu t - m') + N' e^{-\varepsilon t}\cos(\nu t - n') \end{cases}$$

wo natürlich m und m' mit dem früher gebrauchten nicht zu verwechseln sind.

Aus diesen Ausdrücken ersieht man, dass die Bewegung der Magnete derselben Art ist wie früher, nur dass die Amplituden fortwährend kleiner werden; es hat auch keine Schwierigkeit, die Bewegung durch die graphische Darstellung auf ähnliche Weise zu veranschaulichen wie es früher geschehen ist.

II.

Construction der Wellenfläche bei der Brechung eines homocentrischen Strahlenbündels an einer Ebene.

Von

A. von Frank.

Um die hier zum erstenmale gegebene Construction der Wellenfläche zu begründen, soll eine kurze analytische Entwicklung vorausgeschickt werden, welche den Vorgang in einer durch den Hauptstrahl gelegten Ebene*) verfolgt, man erhält dann das räumliche Gebilde durch Rotation dieser Ebene um den Hauptstrahl.

Es sei in Fig. 1. yy' die brechende Ebene, L der leuchtende Punkt, LP irgend ein einfallender Strahl. Dieser wird bei dem Eintritt in ein optisch dichteres Mittel etwa in der Richtung PR gebrochen.

Während die Wellenbewegung des ungebrochenen Strahles in einer gewissen Zeit bis M' fortgeschritten wäre, erleidet die Aetherbewegung im gebrochenen Strahl nicht nur eine Ablenkung, sondern auch eine Verzögerung, und M bezeichne den Punkt bis wohin in derselben Zeit die Welle gekommen ist.

Es sei $LP = r$, $MP = s$; ferner bezeichne c_1 die Geschwindigkeit der Lichtbewegung im 1sten Mittel, c_2 diese im 2ten Mittel; t_1 und t_2 die Zeiten welche verfliessen, um mit diesen Geschwindigkeiten die Wege r und s zurückzulegen, so hat man die Beziehungen:

*) Diese Ebene ist hier als Zeichenebene angenommen.

$$t_1 = \frac{r}{c_1}, \quad t_1 = \frac{s}{c_2}$$

Alle Strahlen welche von L ausgehen unterliegen diesem Gesetze; daraus folgt, dass die zu einer Wellenfläche gehörige Bewegung der Bedingung entspricht, dass die Summe der verflossenen Zeiten im einfallenden und gebrochenen Strahl eine constante Grösse sei, d. h.

$$t_1 + t_2 = \text{Constans} = T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 1)$$

Durch Einführung der Werte für t_1 und t_2 hat man:

$$\frac{r}{c_1} + \frac{s}{c_2} = T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 2)$$

Ist c_0 die Geschwindigkeit der Lichtbewegung im leeren Raum, so ist nach Helmholtz:

$$\frac{c_0}{c_1} = n_1 \quad \text{und} \quad \frac{c_0}{c_2} = n_2,$$

wobei n_1 und n_2 die absoluten Brechungs-Exponenten des ersten und zweiten Mittels bedeuten. Indem wir Gleichung 2) mit c_0 multipliciren, und gleich die absoluten Brechungs-Exponenten einführen, erhalten wir:

$$n_1 r + n_2 s + = T c_0$$

oder auch:

$$r + \frac{n_2}{n_1} s = T \frac{c_0}{n_1} = T c_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 3)$$

Nun giebt aber das Verhältniss $\frac{n_2}{n_1}$ den Brechungs-Exponenten n für den Uebergang des Strahles aus dem ersten in das zweite Mittel; und den Ausdruck $T \frac{c_0}{n} = T c_1$, eine Constante, wird die optische Länge λ des Strahles genannt.

Wir haben also:

$$r + n s = \lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{I})$$

als erste Bedingungsgleichung für die Construction der Wellenfäche. Um λ für einen bestimmten Fall zu ermitteln, hat man nur zu berücksichtigen, dass für $s = 0$, $\lambda = r$ wird. In Fig. 1. ist also $LW' = \lambda$ für die Wellenfläche, welcher der Punkt M angehört.

Nehmen wir nun OY und OX als die Axen eines Coordinatensystemes an, wobei LO der senkrecht einfallende Hauptstrahl ist; und bezeichnen $OT = \eta$, $MT = \xi$ als Coordinaten des Punktes M der Wellenfläche; ferner nennen wir noch die Winkel:

$$OLP = \alpha$$
$$PMT = \beta$$

oder wenn der gebrochene Strahl PM über P verlängert wird, bis er die Richtung OX des Hauptstrahles in C' schneidet, auch

$$OC'P = \beta$$

Es *folgt* unmittelbar aus der Figur:

$$C'P \sin\beta = r \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

und hieraus:

$$C'P = nr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

weil $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ ist. (Brechungsgesetz).

Nennt man noch $C'P = r'$, so hat man:

$$r' = nr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

die zweite Bedingungsgleichung für die Construction der Wellenfläche.

Errichtet man im Punkte O' eine Senkrechte AB, wobei der Punkt O dadurch gefunden wird, dass man:

$$O'O : LO = n : 1$$

macht, verlängert man ferner den einfallenden Strahl LP über L hinaus bis zum Durchschnitt C mit der Senkrechten AB, und beschreibt vom Punkte P als Mittelpunkt den Kreisbogen CC' bis zum Durchschnitt mit der Axe OX, so giebt die Verbindung $C'P$ die Richtung des gebrochenen Strahles. Es ist nämlich aus den beiden ähnlichen Dreiecken LOP und LCO':

$$LP : LC = LO : LO'$$

oder auch

$$(LP + LC) : LP = (LO + LO') : LO$$

daher:

$$CP : r = O'O : LO$$

Mit Benutzung der früheren Proportion hat man endlich:

$$C'P = nr$$

wodurch bewiesen ist, dass $C'P$ der Bedingung (II) entspricht, also die Richtung des gebrochenen Strahles darstellt.

Auf diese Weise kann man für eine grosse Anzahl einfallender Strahlen höchst einfach und schnell die Richtungen der gebrochenen construiren. (Fig. 2. wurde so ausgeführt).

Digitized by Google

Um alle einer Wellenfläche zugehörige Punkte in den verschiedenen Strahlen zu finden, bemerke man, dass nach einer gewissen Zeit ohne Gegenwart der brechenden Ebene yy' die Wellenfläche im Schnitt durch den Kreis WW' dargestellt ist, dass also M' der Endpunkt des ungebrochenen Strahles nach jener Zeit wäre. Würde der Strahl nur gebrochen, nicht auch verkürzt, so fände man den Punkt R, indem man von P als Mittelpunkt mit dem Radius PM' den Bogen $M'R$ beschriebe.

Wir hatten aber (I) die Beziehung gefunden

$$r + ns = \lambda.$$

Weil für die augenblicklich betrachtete Wellenfläche $\lambda = LM'$ ist, LM' aber aus den Stücken LP und PM' besteht, so hat man auch:

$$r + ns = LM' = LP + PM'$$

oder:

$$ns = PM' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6)$$

oder wenn wir $PM' = s'$ setzen:

$$s = \frac{s'}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$$

Errichtet man in R eine Senkrechte RN zur Linie yy', ferner von N dem Durchschnittspunkt dieser Senkrechten mit dem ungebrochenen Strahl aus P als Mittelpunkt den Kreisbogen NM bis zum Durchschnitt M mit der Richtung des gebrochenen Strahles, so ist M ein Punkt der Wellenfläche. Denn es sind die Dreiecke PLC' und PNR ähnlich, daher:

$$LP : C'P = PN : PR,$$

weil aber $PN = PM$ und $PR = PM'$ ist, so hat man auch:

$$r : nr = s : s'$$

und hieraus sofort:

$$s = \frac{s'}{n},$$

also ist M ein Punkt der Wellenfläche.

Macht man diese sehr einfache Construction für alle Strahlen, so erhält man den Durchschnitt der Wellenfläche mit der Zeichenebene, in einer Reihe von Punkten, die dann durch eine continuirliche Linie verbunden werden können. Bei dieser Construction ist es nicht notwendig die analytischen Eigenschaften der Wellenfläche zu kennen.

Will man jedoch mehrere aufeinander folgende Wellenflächen

construiren, wie es etwa in den Figuren 2. geschehen ist, so kann man diese Arbeit noch dadurch vereinfachen, dass man von der Eigenschaft der, durch die Durchschnitte der gebrochenen Strahlen gebildeten Brennfläche und der Wellenfläche Gebrauch macht.

Zu diesem Behufe wollen wir zunächst die Gleichungen der Brennfläche und der Wellenfläche aufstellen, oder mindestens die analytischen Eigenschaften dieser letzteren für die zwei hier möglichen Fälle aufsuchen.

Nennen wir für einen bestimmten Strahl

$$OP = a = r \sin \alpha$$

die constante Entfernung des leuchtenden Punktes von der Ebene $OL = l$, so hat man für die Coordinaten ξ und η die unmittelbar aus der Figur folgenden Ausdrücke:

$$\xi = s \cos \beta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

und

$$\eta = r \sin \alpha + s \sin \beta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 8)$$

Dieser letzte Ausdruck wird, weil

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$

ist, auch:

$$\eta = (nr + s) \sin \beta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 9)$$

Indem wir aus Gleichung (I) den Wert für s ziehen, und berücksichtigen, dass, wegen $\cos \alpha = \frac{l}{r}$,

$$\sin \beta = \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}}$$

wird, so bekommen wir für die Coordinaten der Wellenfläche die Formeln:

$$\xi = \frac{\lambda - r}{n} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{l^2}{r^2}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (IV)$$

$$\eta = \left(r + \frac{\lambda - r}{n^2}\right) \sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2}} \quad \ldots \ldots \quad (V)$$

Die Elimination von r aus diesen beiden Gleichungen würde den Schnitt der Wellenfläche mit der Zeichnungsebene geben. Da diese Elimination uns zu einer Gleichung führt, aus welcher der Charakter der Wellenlinie nicht leicht zu erkennen ist, so wollen wir lieber die Gleichung der Brennfläche ermitteln, aus welcher wir dann sofort die analytischen Eigenschaften der Wellenfläche ersehen werden.

Digitized by Google

Wir erhalten die Gleichnng der Brennlinie, wenn wir für sämmtliche gebrochene Strahlen die umhüllende Curve suchen.

Die Gleichung des gebrochenen nnd nach rückwärts verlängerten Strahles ist mit Berücksichtigung der zwei Punkte dnrch welche er hindurch geht:

$$\frac{x - nr\cos\beta}{nr\cos\beta} = -\frac{y}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 10)$$

oder wenn man den Wert für $\cos\beta$ einsetzt, der aus $\sin\beta = \frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{l^2}{r^2}}$ folgt, so wird

$$\frac{x - nr\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{l^2}{r^2}\right)}}{nr\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{l^2}{r^2}\right)}} = -\frac{y}{a} \quad \ldots\ldots 11)$$

Es vereinfacht sich diese Gleichnng noch dahin:

$$\frac{x - \sqrt{n^2r^2-(r^2-l^2)}}{\sqrt{n^2r^2-(r^2-l^2)}} = -\frac{y}{a}$$

nnd wenn man berücksichtigt, dass $r^2 - l^2 = a^2$ ist, auch:

$$\frac{x - \sqrt{n^2r^2-a^2}}{\sqrt{n^2r^2-a^2}} = -\frac{y}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 12)$$

setzt man noch den Wert für r ein, so hat man endlich:

$$\frac{x - \sqrt{a^2(n^2-1)+n^2l^2}}{\sqrt{a^2(n^2-1)+n^2l^2}} = -\frac{y}{a}$$

der Schreibkürzung wegen setzen wir:

$$n^2 - 1 = k$$
$$n^2l^2 = m$$

so heisst die Gleichung nun:

$$\frac{x - \sqrt{a^2k+m}}{\sqrt{a^2k+m}} = -\frac{y}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 13)$$

Um jetzt die Gleichnng der nmhüllenden Curve anfznstellen, müssen wir Gleichung 13) nach a differentiiren, nnd dann aus dieser neuen Gleichung und Gleichnng 13) a eliminiren. Vorerst geben wir Gleichnng 13) folgende Form

$$a^2x^2 = (a-y)^2(a^2k+m) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 14)$$

nach a differentiirt:

$$ax^2 = (a-y)^2ak + (a-y)(a^2k+m) \quad \ldots \ldots \quad 15)$$

Wir eliminiren a auf die folgende Art:

Aus 14) folgt:

$$\frac{a^2x^2}{(a-y)} = (a^2k+m)(a-y) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

Aus 15) folgt:

$$\frac{a^2x^2}{(a-y)} = a^2k(a-y) + a(a^2k+m) \quad \ldots \ldots \quad 17)$$

Die Gleichung 16) von jener 17) abgezogen giebt:

$$0 = my + a^3k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 18)$$

aus welcher folgt:

$$a = -\sqrt[3]{\frac{my}{k}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 19)$$

Die Substitution dieses Wertes in Gleichung 14) umgehen wir dadurch, dass wir die Gleichung 14) mit a multipliciren:

$$a^3x^2 = (a-y)^2(a^3k+am) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 20)$$

und hier nur für a^3 den Wert aus Gleichung 19) substituiren:

$$-\frac{x^2y}{k} = (a-y)^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 21)$$

Wir erhalten nun einen zweiten Ausdruck für a, nämlich:

$$a = y - \sqrt[3]{\frac{x^2y}{k}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 22)$$

Die beiden Ausdrücke für a aus den Gleichungen 19) und 22) verbunden, liefern endlich die Gleichung der Brennlinie:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2y}{k}} - \sqrt[3]{\frac{my}{k}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 23)$$

die durch eine leicht zu übersehende Umformung auf die Gestalt:

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{m}} - \sqrt[3]{\frac{ky^2}{m}} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (VI)$$

gebracht werden kann.

Man erkennt sofort, dass die Brennlinie die Evolute einer Ellipse oder einer Hyperbel ist, je nachdem k negativ oder positiv genommen wird. (m hat, als aus Quadraten bestehend, keinen Einfluss auf das Zeichen.) Stellen wir die früher gewählten Abkürznngen wieder her, so hat man auch:

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{n^2 l^2}}-\sqrt[3]{\frac{(n^2-1)y^2}{n^2 l^2}}=1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 24)$$

Und hieraus ersieht man, dass für $n>1$ d. h. wenn der leuchtende Punkt im optisch dünneren Mittel liegt, die Brennlinie die Evolute einer Hyperbel wird; für $n<1$ wo also der Punkt im optisch dichteren Mittel sich befindet wird Gleichuug 24) zur Gleichung der Evolute der Ellipse. Die Wellenflächen also werden im Schnitt der Zeichnungsebnen im ersten Falle Aequidistante zu Hyperbeln geben, im zweiten Falle, sind diese Schnitte Aequidistante von Ellipsen.

Es lassen sich ohne Schwierigkeiten die Axen ausmitteln, da die Evolntengleichungen sind:

$$\text{Evol. d. Ellipse:}\ \sqrt[3]{\frac{a^2x^2}{(a^2-b^2)^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2y^2}{(a^2-b^2)^2}}=1$$

$$\text{Evol. d. Hyperbel:}\ \sqrt[3]{\frac{a^2x^2}{(a^2+b^2)^2}}-\sqrt[3]{\frac{b^2y^2}{(a^2+b^2)^2}}=1$$

Die Vergleichnng der vorstehenden Ausdrücke mit Gleichung 24) giebt dann für

$$n<1 \ldots \quad a=\frac{l}{n} \ldots \quad b=\frac{l}{n}\sqrt{1-n^2}$$

für

$$n>1 \ldots \quad a=\frac{l}{n} \ldots \quad b=\frac{l}{n}\sqrt{n^2-1}$$

Unter diesen Wellenlinien wird auch eine, im ersten Falle die Grundellipse, im zweiten die Grundhyperbel sein. Man findet dieselbe wenn man bemerkt, dass der Abstand der Spitzo der Evolute von der zugehörigen Grundcurve ausgedrückt ist, in beiden Fällen dnrch $\frac{b^2}{a}$ Ist daher die optische Länge des Strahles für den ersten Fall

$$\lambda=l\left(\frac{1-n^2}{n}\right)$$

so ist in diesem Augenblick die zugehörige Wellenfläche ein Rotationsellipsoid. Für den zweiten Fall muss

$$\lambda = l\left(\frac{n^2-1}{n}\right)$$

werden, und dann ist die Wellenfläche ein Rotationshyperboloid. Für jede andere optische Länge des Strahles sind die Wellenflächen Rotationsflächen von Aeqnidistanten zu diesen Grnndformen.

Da die Brennlinie znr Wellenlinie (den Vorgang im Schnitt betrachtet) in der Beziehnng der Evolute znr Evolvente steht, so können die Dnrchschnittspunkte je zweier anfeinander folgender gebrochener Strahlen, als die Mittelpnnkte der mit der Wellenlinie osculirenden Kreise betrachtet werden. Da wir schon früher die einfache Bestimmnng der Richtnng der gebrochenen Strahlen kennen gelernt haben, so ergeben sich ganz von selbst die Durchschnittspunkte 1, 2, 3. — Fig. 2. Weil man die Länge eines jeden einfallenden Strahles als optische Länge für eine bestimmte Zeit betrachten kann, so ist es von keiner Schwierigkeit, eine der Wellenlinie sehr genäherte Korblinie zu snbstitniren die aus Bögen der osculirenden Kreise znsammengesetzt, von den Pnnkten 1, 2, 3. n. s. w. successive beschrieben wird. Je mehr einfallende Strahlen angenommen werden, desto genauer ist die Construction.

Digitized by Google

III.

Flächen zweiter Ordnung mit einer Symptosen-Axe.

Von

Gustav von Escherich.

Als ich durch die Behandlung Steiner's „Allgemeine Betrachtungen über doppelt berührende Kegelschnitte"[1]) angeregt, die einander einbeschriebenen Flächen zweiter Ordnung zu behandeln versuchte, bedurfte ich bei dem gewählten Gange der Untersuchung verschiedener Sätze über jene Lage zweier Flächen zweiter Ordnung, bei welcher sie sich in ebenen Curven schneiden. Da die hiebei aufgetauchten Fragen meines Wissens nirgends in rein geometrischer Weise besprochen sind, so habe ich dies in den folgenden Blättern versucht. Zwar dem ersten Anscheine nach dürfte man die Untersuchung dieser Lage zweier Flächen zweiter Ordnung für eine durch das Princip der Collineation und durch Einführung etwelcher neuer Begriffe und Definitionen schon erledigte halten, da ja die Lagen-Verhältnisse bei Kugeln zur Genüge erforscht sind. Und allerdings entsprechen nicht nur zwei Kugeln in einem collinearen Systeme zwei Flächen zweiter Ordnung, die sich in ebenen Curven, von denen aber eine imaginäre sein muss, schneiden, sondern auch umgekehrt: zwei Flächen zweiter Ordnung, welche eine sog. imaginäre ebene Curve gemeinsam haben, kann man immer zwei Kugeln collinear entsprechen lassen. Man braucht nur zum ersteren Systeme dergestalt ein collineares zu construiren, dass der sog. imaginären ebenen Curve der beiden Flächen im zweiten der sog. imaginäre unendlich ferne Kreis entspricht.

1) Crelle's Journal Bd. 45.

Man erhielte also hiedurch doch nur Resultate, die für einen besonderen Fall gelten, und eine strenge geometrische Methode erforderte[2]), dass man nun noch untersuche, ob und in wie weit diese Ergebnisse für die übrigen möglichen Fälle Geltung besitzen. Doch auch abgesehen hievon kleben fast immer den Untersuchungen vermittelst der Collineations-Methode die Mängel aller indirecten Methoden an, so dass es stets wünschenswert erscheinen wird, selbst die durch sie ableitbaren Eigenschaften auf andere Weise ans Licht zu fördern. Aber bei dem Vorwurfe dieser Abhandlung vereinigen sich mit dem eben erwähnten Umstande dergestalt alle Mängel der Collineations-Methode, dass selbst eine blos genügende Erörterung durch sie ganz unmöglich wird. Diese gelingt aber durch sehr einfache directe Betrachtungen in umfassender Weise, wie es die vorliegende Arbeit zeigen wird.

Ausgehend von zwei Flächen zweiter Ordnung, welche sich in reellen ebenen Curven schneiden, suche ich zuerst die Kennzeichen der Ebenen dieser Curven. Dieselben dienen dann zu einer allgemeinen Definition dieser Ebenen, welche unabhängig von dem zufälligen Umstande ist, ob sich die Oberflächen in ihnen wirklich schneiden oder nicht. Ebenen mit diesen Kennzeichen nenne ich nach einem von Chasles[3]) vorgeschlagenem Ausdrucke Symptosen-Ebenen. Die Durchschnittslinie zweier Symptosen-Ebenen besitzt wieder gewisse charakteristische Eigenschaften, welche zu einer allgemeinen Definition dieser Geraden führen. Ich untersuche nun die Lage zweier Flächen zweiter Ordnung, welche eine solche Gerade, die ich Symptosen-Axe nannte, besitzt.

I.

Zwei Flächen zweiter Ordnung durchschneiden sich bekanntlich in einer Raumcurve vierter Ordnung. Diese Raumcurve kann bei besonderer Lage der beiden Flächen in zwei ebenen Curven zweiter Ordnung zerfallen. Es soll zuvörderst dieser Satz in rein synthetischer Weise abgeleitet werden.

Liegen fünf Durchschnittspunkte zweier Flächen zweiter Ordnung in einer Ebene, so ist die Curve zweiter Ordnung, welche durch diese fünf Punkte bestimmt wird, beiden Flächen gemeinsam. Durchschneiden sich die beiden Flächen ausser in dieser Curve noch in einem

---

2) Poncelet's Gesetz der Continuität hat und wol mit Recht nicht allgemein Eingang in die Geometrie gefunden.

3) Aperçu historique Note XXVIII.

Google

Punkte und berühren sie sich nicht etwa in demselben, so durchschneiden sie sich noch in unendlich vielen Punkten. Denn auf jeder Ebene, welche durch den Punkt gelegt wird, schneiden die beiden Flächen zwei Curven zweiter Ordnung aus, die sich auf der gemeinschaftlichen Durchschnittsebene der beiden Flächen in zwei reellen oder imaginären Punkten durchschneiden: ihr vierter Durchschnittspunkt, der ein Durchschnittspunkt der beiden Flächen sein muss, ist daher stets reell. Legt man nun durch drei Durchschnittspunkte dieser zweiten Gruppe eine Ebene, so haben die beiden von den Flächen ausgeschnittenen Curven zweiter Ordnung fünf Punkte, von denen zwei imaginär sein können, gemeinschaftlich, decken sich also. Hieraus folgt, dass die Durchschnittspunkte der zweiten Gruppe ebenfalls in einer Ebene liegen müssen, da sonst die beiden Flächen von jeder Ebene in zwei zusammenfallenden Curven geschnitten würden. Man erhält so den Satz:

Liegen fünf Durchschnittspunkte zweier Flächen zweiter Ordnung in einer Ebene, so durchschneiden sich dieselben in dieser Ebene und ihre übrigen Durchschnittspunkte liegen in einer zweiten Ebene.

Die charakteristische Eigenschaft einer solchen gemeinsamen Durchschnittsebene ist, dass die Polarebenen eines jeden ihrer Punkte bezüglich der beiden Flächen sich auf ihr schneiden. Und umgekehrt kann eine Ebene von dieser Eigenschaft jede der beiden Flächen nur in gemeinschaftlichen Punkten schneiden.

Diese beiden Sätze geben die Möglichkeit und Veranlassung neue Begriffe einzuführen und die Lage solcher Flächen zweiter Ordnung zu untersuchen, welche schlechtweg Ebenen mit der angegebenen Eigenschaft besitzt, ohne zu berücksichtigen, ob die Flächen in diesen Ebenen sich wirklich schneiden oder nicht. Diese Ebenen sollen für die Folge mit einem eigenen Namen belegt werden und „eine Ebene, „welche die Eigenschaft besitzt, dass die Polarebenen eines jeden ihrer „Punkte bezüglich zweier Flächen zweiter Ordnung sich auf ihr „schneiden, soll eine Symptosen-Ebene der beiden Flächen genannt „werden."

Jeder Punkt der Durchschnittslinie zweier Symptosen-Ebenen besitzt somit dieselbe Polarebene bezüglich der beiden Flächen. Diese Eigenschaft veranlasst wieder die folgende allgemeine Definition:

„Eine Gerade, deren jeder Punkt dieselbe Polarebene bezüglich „zweier Flächen zweiter Ordnung besitzt, soll eine Symptosen-„Axe der beiden Flächen heissen."

Es soll nun im Folgenden die Lage zweier Flächen zweiter Ordnung untersucht werden, welche eine Symptosen-Axe besitzen, unbekümmert, ob dieselbe der Durchschnitt zweier Symptosen-Ebenen ist oder nicht.

II.

Es wird angenommen zwei Flächen zweiter Ordnung besässen eine Symptosen-Axe.

Gemäss der Definition der Symptosen-Axe fallen ihre Polaren bezüglich der beiden Flächen zusammen. Daher bilden die Polarebenen der Punkte der Symptosen-Axe einen Ebenenbüschel und somit erzeugen die Punkte der Symptosen-Axe mit den Durchschnittspunkten ihrer Polarebenen und der Symptosen-Axe eine involutorische Punktreihe. Jeder Doppelpunkt der Involution besitzt also bezüglich beider Flächen dieselbe Polarebene, welche durch ihn hindurch geht. Hieraus folgt der Satz:

„Haben zwei Flächen zweiter Ordnung eine Symptosen-Axe, so wird diese von beiden Flächen in denselben zwei reellen oder imaginären Punkten geschnitten."

Somit:

„Jede Ebene, welche durch die Symptosen-Axe gelegt wird, „schneidet beide Flächen in zwei Kegelschnitten, welche auf der „Symptosen-Axe einen doppelten oder imaginären Contact besitzen.*)"

Legt man eine Ebene durch die Symptosen-Axe so liegen ihre Pole bezüglich der beiden Flächen auf der Polare der Symptosen-Axe. Die Polarebenen aller Punkte der Ebene bezüglich beider Flächen bilden nun zwei projectivische Strahlenbündel um die beiden Pole der Ebene. Da aber die beiden collinearen Strahlenbündel einen Ebenenbüschel, nämlich die Polarebenen der Punkte der Symptosen-Axe, gemeinschaftlich haben, so erzeugen sie eine Ebene. Diese Ebene geht offenbar durch die Symptosen-Axe, denn in ihr schneiden sich die Polarebenen des Durchschnittspunktes der Ebene mit der Polare der Symptosen-Axe. Also:

„Geht eine Ebene durch die Symptosen-Axe, so liegen alle Punkte

---

*) Beide Sätze ergeben sich unmittelbar aus der Anschauung, wenn die Flächen sich in zwei Ebenen schneiden, welche sich innerhalb der Flächen kreuzen. Der zweite Satz folgt übrigens aus der Eigenschaft der Symptosen-Axe bezüglich beider Kegelschnitte.

Digitized by Google

„welche ihren übrigen Punkten bezüglich beider Flächen conjugirt „sind, in einer anderen durch die Symptosen-Axe gehenden Ebene."

Hieraus ergibt sich:

Die Polarebenen irgend eines Punktes bezüglich beider Flächen schneiden die Symptosen-Axe in demselben Punkte.

Allen Punkten einer Ebene, welche die Punkte enthält, die denen einer durch die Symptosen-Axe gehenden Ebene bezüglich beider Flächen conjugirt sind, sind wieder die Punkte der letzteren bezüglich beider Flächen conjugirt: also bilden diese Ebenenpaare einen involutorischen Ebenenbüschel um die Symptosen-Axe. Besitzt dieser Büschel zwei reelle Ordnungs-Ebenen, so ist jede derselben eine Symptosen-Ebene beider Flächen. Somit:

Verbindet man jeden Punkt und seine bezüglich beider Flächen ihm conjugirte Gerade durch Ebenen mit der Symptosen-Axe, so bilden alle diese Ebenenpaare einen involutorischen Ebenenbüschel, dessen Ordnungsebenen Symptosen-Ebenen der beiden Flächen sind.

Haben die beiden Flächen zwei Symptosen-Ebenen, so kann man diesem Satze auch die folgende Fassung geben:

„Die Polarebenen irgend eines Punktes bezüglich der beiden „Flächen und eines Symptosen-Ebenenpaares schneiden sich in einer „Geraden."

III.

„Ist ausser den Punkten einer Symptosen-Axe noch ein Punkt „vorhanden, der bezüglich beider Flächen dieselbe Polarebene besitzt, „so hat, wenn dieser Punkt nicht auf der Polare der Symptosen-Axe „liegt, jeder Punkt in der durch ihn und die Symptosen-Axe be„stimmten Ebene diese Eigenschaft. Ausserhalb dieser Ebene kann, „ihren Pol ausgenommen, kein weiterer derartiger Punkt bestehen."

Die Polarebene des Punktes schneidet die Symptosen-Axe in einem Punkte, welcher die durch den Punkt und die Polare der Symptosen-Axe bestimmte Ebene bezüglich beider Flächen zur Polarebene hat. Die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Polarebene des Punktes ist daher bezüglich beider Flächen die Polare der Verbindungslinie des Punktes mit dem Durchschnittspunkte seiner Polarebene und der Symptosen-Axe. Jeder Punkt dieser Verbindungslinie hat dieselbe Polarebene bezüglich beider Flächen, denn seine beiden

Digitized by Google

Polarebenen haben eine Gerade, die Polare der Verbindungslinie gemeinschaftlich und schneiden nach (II.) die Symptosen-Axe in demselben Punkte: also ist diese Verhindnngslinie ebenfalls eine Symptosen-Axe. Da nun die durch den Punkt und die Symptosen-Axe bestimmte Ebene denselben Pol bezüglich beider Flächen besitzt, so gehen die beiden Polarebenen jedes beliebigen ihrer Punkte durch diesen Pol und da dieselben jede der beiden Symptosen-Axen in demselben Punkte schneiden müssen, so fallen sie zusammen.

Besteht ausser dem vorher angenommenen Punkte und dem Pol der Ebene, welche durch ihn und die Symptosen-Axe bestimmt ist, noch ein Punkt, welcher bezüglich beider Flächen dieselbe Polarebene besitzt, so hat die Verbindungslinie der beiden Punkte bezüglich beider Flächen dieselbe Gerade zur Polaren. Legt man nun durch diese Verbindungslinie irgend eine Ebene, so liegen ihre Pole die nicht zusammenfallen können — denn sonst besässe jeder Punkt dieselbe Polarebene bezüglich beider Flächen*), was unmöglich ist — sowol auf der Polare der Verbindungslinie als auch in der Polarebene des Durchschnittspunktes dieser Ebene mit der Symptosen-Axe. Somit liegt die Polare der Verbindungslinie der beiden Punkte mit jener der Symptosen-Axe, und daher liegen auch die beiden Punkte mit der Symptosen-Axe in einer Ebene. Hieraus folgt der oben behauptete Satz.

Aus demselben fliessen einige wichtige Folgerungen.

Da durch eine Symptosen-Axe höchstens zwei Symptosen-Ebenen hindurchgehen können, denn sonst müssten nach (II.) alle durch sie gelegten Ebenen Symptosen-Ebenen sein, was unstatthaft ist, so folgt nach dem obigen Satze:

Zwei Flächen zweiter Ordnung können höchstens zwei Symptosen-Ebenen besitzen.

Es hat sich soeben die Möglichkeit gezeigt, dass zwei Flächen zweiter Ordnung eine Ebene besitzen können, deren jeder Punkt dieselbe Polarebene bezüglich beider Flächen hat. Dann ist offenbar jede Gerade in dieser Ebene eine Symptosen-Axe und die Ebene kann deshalb als zwei auf einander liegende Symptosen-Ebenen aufgefasst werden. Aus diesem Grunde schneiden sich auch die beiden Polarebenen irgend eines Punktes bezüglich beider Flächen auf dieser Ebene. Daher können die beiden Flächen keinen Punkt ge-

---

*) Man zeigt dies zuerst für irgend welche durch einen der beiden Punkte gelegte Ebene, woraus sich dann leicht die Behauptung ergibt.

meinschaftlich haben, der nicht auf dieser Ebene liegt und sie berühren sich deshalb in ihren gemeinsamen Punkten. Denn, da die beiden Polarebenen eines den Flächen gemeinsamen Punktes durch ihn gehen und sich auf der Ebene schneiden, so fallen sie zusammen. Es müssen sich auch die beiden Flächen in jedem Punkte, den die eine von ihnen mit der Ebene gemeinsam hat, berühren. Ein solcher Punkt hat nämlich, als Punkt der Ebene, bezüglich jeder der beiden Flächen dieselbe Polarebene und diese muss, da er auf der einen Fläche liegt, durch ihn hindurchgehen. Diese Ueberlegungen lassen sich in den folgenden Satz zusammenfassen:

Besitzen zwei Flächen zweiter Ordnung eine Ebene, deren jeder Punkt dieselbe Polarebene bezüglich beider Flächen hat, so liegen alle ihre gemeinsamen Punkte in dieser Ebene und sie werden in der gemeinschaftlichen Curve von derselben Kegelfläche berührt.

Zwei Flächen zweiter Ordnung mit einer solchen Ebene, sollen einander einbeschrieben genannt werden. Bei solcher Lage der beiden Flächen sind die beiden möglichen Symptosen-Axen in die eine Ebene zusammengefallen.

Werden zwei Flächen zweiter Ordnung von einer derartigen Ebene berührt, so haben die Flächen im Berührungspunkte eine Berührung der dritten Ordnung.

Es wäre jetzt der früher ausgeschlossene Fall zu untersuchen, dass auf der Polare der Symptosen-Axe Punkte liegen, welche die Eigenschaft der Punkte der Symptosen-Axe besitzen. Dieser Fall wird am klarsten durch Untersuchung der auf der Polare der Symptosen-Axe liegenden Punktreihe erledigt.

IV.

Die Punkte der Polare der Symptosen-Axe bilden mit den Durchschnittspunkten ihrer Polarebenen bezüglich einer jeden der Flächen und der Polare eine involutorische Punktreihe. Diese beiden involutorischen Punktreihen werden im Allgemeinen bloss ein Punktepaar K und K' gemeinsam haben. Diese Punkte sind gemeinlich reell und nur dann imaginär, wenn die Doppelpunkte der beiden Involutionen reell sind und ihre Strecken teilweise auf einander liegen.

Sind die Punkte K und K' reell, so besitzt offenbar jeder von ihnen dieselbe Polarebene bezüglich beider Flächen und jeder liegt in der Polarebene des anderen. Zieht man daher durch den einen

von ihnen, etwa K, eine Gerade, so ist jedem ihrer Punkte, K ausgenommen, eine Gerade beider Flächen conjugirt und alle diese Geraden liegen in einer Ebene. Denn die beiden Ebenenbüschel, welche durch die Polarebenen der Punkte gebildet werden, haben zwei entsprechende Ebenen, die Polarebenen von K, gemeinschaftlich. Da nun die beiden Polarebenen des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Polarebene von K durch diesen Punkt gehen, so liegt K in der durch die beiden Ebenenbüschel erzeugten Ebene.

Legt man durch K irgend eine Ebene E, so haben die beiden collinearen Strahlenbündel, welche durch die Polarebenen ihrer Punkte gebildet werden, zwei entsprechende Ebenen, die Polarebene von K und die Polarebene des Durchschnittspunktes der Symptosen-Axe mit E, gemein. Die beiden zu einander projectivischen Strahlenbüschel, welche von den Bündel in jeder dieser Ebenen ausgeschnitten werden, liegen offenbar perspectivisch, da in die Verbindungslinie der beiden Pole von E hiernach zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen. Die entsprechenden Strahlen der Büschel in der Polarebene von K schneiden sich auf der Symptosen-Axe; die in der zweiten Ebene erzeugen eine Gerade, welche durch K gehen muss, da die beiden zur Durchschnittslinie der Ebene E und der Polarebene von K conjugirten Geraden K enthalten. Also schneiden sich, mit Ausnahme von K, die Polarebenen aller Punkte einer durch K gelegten Ebene auf einer durch K gehenden Geraden.

Jeder durch K gezogenen Geraden entspricht auf diese Weise eine bestimmte Ebene, die durch K geht, und jeder durch K gelegten Ebene entspricht eine Gerade, die K enthält. Man erkennt nun leicht, dass sich eine solche Gerade und Ebene wechselseitig entsprechen. Hieraus folgt, dass der Strahlenbündel in K hinsichtlich dieser Elemente ein polarer Strahlenbündel ist.

Aus der Construction der polaren Strahlenbündel in K und K' ergibt sich unmittelbar, dass die Polarebenen eines Punktes bezüglich der beiden Flächen und der Strahlenbündel sich in einer Geraden schneiden und dass also jede Symptosen-Axe und Symptosen-Ebene zweier dieser vier Gebilde*) eine solche bezüglich aller ist. Aus diesen Betrachtungen fliesst der folgende Satz:

A u f d e r P o l a r e e i n e r S y m p t o s e n - A x e z w e i e r F l ä c h e n z w e i t e r O r d n u n g b e s t e h e n i m A l l g e m e i n e n z w e i u n d n u r z w e i P u n k t e , d e r e n j e d e r d i e s e l b e P o l a r e b e n e b e z ü g l i c h

*) Was man unter der Symptosen-Ebene der beiden Strahlenbündel zu verstehen hat, ist wol aus dem Zusammenhange klar.

beider Flächen besitzt. Jeder derselben liegt in der Polarebene des anderen und ist der Mittelpunkt eines polaren Strahlenbündels. Die Polarebenen irgend eines Punktes bezüglich der beiden Flächen und Strahlenbündel schneiden sich in derselben Geraden, weshalb eine Symptosen-Ebene oder Symptosen-Axe irgend zweier dieser Gebilde eine solche für beliebige zwei derselben ist.

Ist der Ordnungskegel eines oder beider polaren Strahlenbündel reell, so vertritt derselbe in dem vorstehenden Satze seinen polaren Strahlenbündel. Diese Strahlenbündel und -Kegel können füglich Symptosen-Bündel und -Kegel genannt werden.

V.

Die Erörterungen in IV. beruhen auf der Voraussetzung, dass die beiden auf der Polare der Symptosen-Axe betrachteten involutorischen Punktreihen nur ein Punktepaar gemeinsam haben d. h. dass es auf dieser Geraden bloss zwei Punkte gibt, deren jeder dieselbe Polarebene bezüglich beider Flächen besitzt. Bedenkt man nun, dass diese beiden Involutionen durch drei zu einander projectivische Punktreihen erzeugt werden, so erhellt, dass dieselben zwei Punktepaare gemeinschaftlich haben und somit zusammenfallen, so bald noch ein dritter Punkt auf der Geraden vorhanden ist, welcher bezüglich beider Flächen dieselbe Polarebene hat. Da zwei solche involutorische Punktreihen auf jeder Geraden liegen, welche bezüglich beider Flächen dieselbe Polare hat, so folgt hieraus der Satz:

„Liegen auf einer Geraden drei Punkte, deren jeder bezüglich „zweier Flächen zweiter Ordnung dieselbe Polarebene hat, so ist diese „Gerade eine Symptosen-Axe der beiden Flächen.“

Speciell für die Polare einer Symptosen-Axe ergibt sich hieraus:

„Ist auf der Polare einer Symptosen-Axe zweier Flächen zweiter „Ordnung ausser den beiden Mittelpunkten der Symptosen-Strahlen-„bündel noch ein Punkt vorhanden, der bezüglich beider Flächen „dieselbe Polarebene besitzt, so ist diese Gerade selbst eine Sym-„ptosen-Axe.“

Da in diesem Falle die eine Symptosen-Axe die Polare der andern ist, so müssen wegen II. auf der einen dieser Symptosen-Axe zwei reelle Berührungspunkte der beiden Flächen liegen. Verbindet man jeden dieser Berührungspunkte mit der anderen Symptosen-Axe

durch Ebenen, so sind diese Berührungsebenen an die beiden Flächen Symptosen-Ebenen derselben. Denn die beiden Polarebenen irgend eines Punktes einer solchen Ebene müssen durch ihren Berührungspunkt gehen und die in der Ebene liegende Symptosen-Axe in demselben Punkte schneiden.

Ausser den beiden Berührungspunkten können die beiden Flächen keinen weiteren Punkt gemeinsam haben. Denn jeder solche Punkt besässe bezüglich beider Flächen dieselbe Polarebene, da seine beiden Polarebenen durch ihn hindurchgehen und jede der beiden Symptosen-Axen in demselben Punkte schneiden müssten, also müssten nach III. auch die beiden Symptosen-Axen in derselben Ebene liegen, was offenbar widersinnig ist.

Aus dem Vorstehenden erhält man mit Rücksicht auf III. den Satz:

Zwei Flächen zweiter Ordnung können im Allgemeinen höchstens eine Symptosen-Axe besitzen; haben sie deren zwei, so müssen dieselben entweder in einer Ebene liegen, dann sind die Flächen einander einbeschrieben, oder die eine muss die Polare der anderen bezüglich beider Flächen sein. In diesem Falle haben die beiden Flächen nur zwei Punkte, die auf der einen Symptosen-Axe liegen, gemeinsam und berühren sich in denselben. Die beiden Berührungsebenen in diesen Punkten, welche durch die zweite Symptosen-Axe hindurchgehen, sind die Symptosen-Ebenen der beiden Flächen.

Durch diesen Satz ist der in III. ausgeschlossene Fall erledigt. Derselbe führt im Verein mit den Sätzen in III. zu weiteren Folgerungen.

Haben zwei Flächen zweiter Ordnung eine Symptosen-Ebene, so schneiden sich die beiden Polarebenen des Durchschnittspunktes der Symptosen-Ebene mit der Verbindungslinie ihrer Pole auf der Symptosen-Ebene. Diese Gerade ist daher die Polare der Verbindungslinie der Pole der Symptosen-Ebene bezüglich beider Flächen. Da nun die beiden Polarebenen irgend eines Punktes dieser Polare zusammenfallen müssen, so ist dieselbe eine Symptosen-Axe. Also:

„Besitzen zwei Flächen zweiter Ordnung eine Symptosen-Ebene, „so haben sie auch eine in derselben liegende Symptosen-Axe, durch „welche, wenn die beiden Flächen nicht einander einbeschrieben sind, noch eine zweite Symptosen-Ebene hindurchgehen muss.“

Hieraus folgt im Zusammenhalt mit dem obigen Satze und II.

Besitzen zwei Flächen zweiter Ordnung eine Symptosen-Axe und ist nicht gleichzeitig auch die Polare derselben eine solche, so muss jede mögliche der beiden Symptosen-Ebenen durch dieselbe Axe hindurchgehen. Ist auch die Polare eine Symptosen-Axe, so müssen die beiden Symptosen-Ebenen in der einen dieser Axen sich schneiden.

VI.

Mit Hilfe der bisher entwickelten Sätze ist es nun möglich die Frage nach der Realität der Symptosen-Ebenen und Kegel zweier Flächen zweiter Ordnung mit einer Symptosen-Axe zu beantworten.

Es ist zunächst der folgende Satz klar:

„Durchschneiden sich zwei Flächen zweiter Ordnung, welche eine „Symptosen-Axe besitzen, so haben dieselben zwei verschiedene oder „zusammenfallende Symptosen-Ebenen, die durch die Symptosen-Axe „hindurchgehen und in denen alle ihre Durchschnittspunkte liegen „müssen."

Verbindet man die Symptosen-Axe mit einem Durchschnittspunkt der beiden Flächen durch eine Ebene, so schneiden sich die Polar-Ebenen dieses Punktes offenbar auf der Ebene. Nimmt man irgend einen zweiten Punkt in der Ebene an, so schneiden seine beiden Polar-Ebenen nach II. die Symptosen-Axe in demselben Punkt, aber überdies auch die Durchschnittslinie der Polar-Ebenen des ersten Punktes. Denn die beiden Polaren der Verbindungslinie der beiden Punkte sind die Durchschnittslinien der Polar-Ebenen des ersten Punktes mit der einzigen Polar-Ebene des Durchschnittspunktes dieser Verbindungslinie und der Symptosen-Axe. Also ist diese Ebene eine Symptosen-Ebene und alle ihre Durchschnittspunkte mit der einen Fläche sind gemeinsame Punkte der beiden Flächen. Nach V. haben die beiden Flächen noch eine zweite Symptosen-Ebene und in dieser müssen alle anderweitigen Durchschnittspunkte der beiden Flächen liegen, da sonst wegen I. die Flächen drei Symptosen-Ebenen besässen.

Berücksichtigt man, dass ein polarer Strahlenbündel einen Ordnungs-Kegel besitzt, sobald ein Strahl in seiner entsprechenden Ebene liegt, so erhält man:

„Durchschneiden sich zwei Flächen zweiter Ordnung, welche einen „Symptosen-Strahlenbündel haben, so besitzen sie auch einen Symptosen-„Kegel und dieser geht durch alle ihre gemeinsamen Punkte."

Zwei Flächen zweiter Ordnung mit einer Symptosen-Axe können also nach dem ersten Satze entweder in zwei Curven zweiter Ordnung sich schneiden oder blos in einer oder drittens sie schneiden sich gar nicht.

Im ersten Falle schneidet die Polare der Symptosen-Axe entweder die Flächen gar nicht, dann sind die Doppelpunkte der bei den Involutionen in IV., nämlich die Durchschnittspunkte der Polare mit den Flächen, imaginär oder sie schneidet nach II. beide Flächen, dann liegt aber die Strecke der Doppelpunkte der einen Involution innerhalb der anderen. Also sind in diesem Falle die beiden Symptosen-Strahlenbündel vorhanden und ihre Ordnungs-Kegel sind nach dem vorhergehenden Satze reell. Somit:

Schneiden sich zwei Flächen zweiter Ordnung in zwei Curven zweiter Ordnung, so sind die Ebenen dieser Curven die beiden möglichen Symptosen-Ebenen der Flächen und die Curven selbst liegen in den beiden möglichen Symptosen-Kegeln.

Haben die beiden Flächen blos eine Durchschnittsebene, so besteht ausser dieser noch eine zweite Symptosen-Ebene. Die beiden Symptosen-Strahlenbündel sind aber in diesem Falle imaginär, da die Polare der Symptosen-Axe die beiden Flächen so schneiden muss, dass die Durchschnittspunkte der Polare mit der einen von denen mit der anderen getrennt werden. Also:

Haben zwei Flächen zweiter Ordnung blos eine Curve zweiter Ordnung gemeinsam, und berühren sie sich nicht etwa in derselben, so besitzen sie nur zwei Symptosen-Ebenen, deren eine die Durchschnitts-Ebene ist.

Schneiden sich drittens zwei Flächen zweiter Ordnung mit einer Symptosen-Axe gar nicht, so müssen sie entweder ganz in oder ganz aus einander liegen. In jedem dieser Fälle können nach IV. die beiden Flächen entweder nur zwei Symptosen-Ebenen oder nur einen Symptosen-Kegel besitzen. Es lässt sich leicht zeigen, dass stets das eine oder andere dieser beiden Gebilde vorhanden sein muss.

In beiden Fällen sind offenbar auf der Polare der Symptosen-Axe die beiden Punkte K und K' vorhanden d. h. die Flächen besitzen die beiden möglichen Symptosen-Strahlenbündel.

Die Punkte K und K' verbinde man durch zwei Ebenen mit der Symptosen-Axe der beiden Flächen. Nimmt man nun einen Punkt dergestalt an, dass er innerhalb des Dreiecks zu liegen kommt, welches auf der durch ihn und die Polare der Symptosen-Axe ge-

legten Ebene von den Punkten K, K und dem Durchschnittspunkt mit der Symptosen-Axe gebildet wird, so muss die dem Punkte bezüglich beider Flächen conjugirte Gerade diese Ebene ausserhalb des angegebenen Dreiecks schneiden. Denn sonst läge das Ebenenpaar, welches den Punkt und seine conjugirte Gerade mit der Symptosen-Axe verbindet, innerhalb des Ebenenpaares, das durch die Symptosen-Axe und K und K' bestimmt ist. Also hätten (II.) die beiden Flächen zwei Symptosen-Ebenen, überdies besässen sie aber auch zwei Symptosen-Kegel. Denn verbindet man den Punkt mit K', so läge auf dieser Geraden der Punkt und der Durchschnittspunkt derselben mit seiner Polar-Ebene im Strahlenbündel K innerhalb K' und der Polar-Ebene von K' für den Strahlenbündel K; also hätte der Symptosen-Strahlenbündel K einen Ordnungs-Kegel. Das Gleiche gilt vom Symtosen-Strahlenbündel K'.

Die beiden Flächen können aber nicht gleichzeitig die beiden Symptosen-Ebenen und einen Symptosen-Kegel besitzen, da sie sich (IV.) in zwei Curven schneiden müssten: Es muss also der Durchschnittspunkt der erwähnten Ebene mit der dem angenommenen Punkte bezüglich beider Flächen conjugirten Geraden ausserhalb jenes Dreiecks liegen. Verbindet man nun diesen Durchschnittspunkt und den angenommenen Punkt mit den Ecken des Dreiecks, so liegen zwei, aber nur zwei dieser Verbindungslinien innerhalb eines Winkels des Dreiecks. Ist also die Spitze dieses Winkels der Durchschnittspunkt der Ebene mit der Symptosen-Axe, so besitzen die beiden Flächen zwei Symptosen-Ebenen, ist es K oder K', so hat der betreffende polare Strahlenbündel einen Ordnungs-Kegel. Somit:

Haben zwei Flächen zweiter Ordnung eine Symptosen-Axe und durchschneiden sie sich nicht, so besitzen sie immer die beiden möglichen Symptosen-Strahlenbündel und entweder die beiden Symptosen-Ebenen oder einen Symptosen-Kegel.

Es ist wol überflüssig die Umkehrungen ausdrücklich hervorzuheben.

VII.

Besitzen zwei Flächen zweiter Ordnung eine Symptosen-Axe, so liegen die Pole jeder Ebene bezüglich der beiden Flächen in einer Geraden, welche die Polare der Symptosen-Axe schneidet. Denn diese Pole liegen in der Polar-Ebene des Durchschnittspunktes der Ebene mit der Symptosen-Axe. Dieser Satz steht dem in II. riprok gegenüber und bildet den Aus-

gangspunkt einer dem Vorhergehenden reciproken Betrachtung, deren Ergebnisse hier in Kürze angeführt werden sollen.

Nimmt man in der Polare der Symptosen-Axe einen Punkt P an, so liegen die Pole aller Ebenen, die man durch diesen Punkt legen kann, in seinen beiden Polar-Ebenen. In denselben bilden die Pole aller dieser Ebenen zwei collineare ebene Systeme, die perspectivisch liegen, da jede Ebene, die man durch P und die Polare der Symptosen-Axe legt, bezüglich beider Flächen denselben auf der Symptosen-Axe liegenden Pol besitzt, also die beiden collinearen ebenen Systeme alle Punkte ihrer Schnittlinien gemeinsam haben. Somit gehen die Geraden, welche die Pole derselben durch P gelegten Ebene verbinden, durch denselben Punkt P', der auf der Polare der Symptosen-Axe liegen muss, da diese die Pole der durch P und die Symptosen-Axe bestimmten Ebene verbindet.

Diese Punkte P und P' entsprechen sich wechselseitig. Dies wird offenbar bewiesen sein, wenn sich zeigen lässt, dass zu einer durch P' gezogenen Geraden g sich nur eine einzige Ebene findet, deren Pole auf dieser Geraden g liegen. Da sich nun die Polaren von g in demselben Punkte der Symptosen-Axe schneiden müssen, so liegen beide in einer Ebene. Die Pole dieser Ebenen aber liegen auf g, und dieselbe ist offenbar die einzige derartige Ebene. Es bilden somit die Punkte auf der Polare der Symptosen-Axe in Ansehung dieser Elemente P und P' eine involutorische Punktreihe.

Besitzt die Involution zwei Doppelpunkte U und U', so liegen die beiden Pole jeder Ebene, welche man durch einen solchen Punkt legt auf einer durch diesen Punkt gehenden Geraden, und jeder Geraden, welche man durch diesen Punkt zieht, ist eine durch ihn gehende Ebene bezüglich beider Flächen conjugirt. Jeder dieser Strahlenbündel U und U' ist hinsichtlich dieser Elemente, wie aus dem vorhergehenden klar ist, ein polarer Strahlenbündel. Hieraus ergibt sich der folgende Satz:

Besitzen zwei Flächen zweiter Ordnung eine Symptosen-Axe, so bilden die Durchschnittspunkte jeder Ebene und der ihr bezüglich beider Flächen conjugirten Geraden mit der Polare der Symptosen-Axe eine involutorische Punktreihe. Die etwaigen Ordnungspunkte derselben sind die Mittelpunkte zweier polarer Strahlenbündel, deren etwaige Ordnungskegel beide Flächen berühren.

Diese Punkte, Strahlenbündel und Kegel sollen bezüglich Umbilical-Punkte, Strahlenbündel und Kegel genannt werden.

Diese Gebilde entsprechen, wie aus ihrer Entstehungsweise deutlich hervorgeht, reciprok den Symptosen-Ebenen, ihren Polar-Systemen und ihren etwaigen Schnittcurven mit den Flächen.

Aus der reciproken Betrachtung von III. ergibt sich, dass zwei Flächen zweiter Ordnung höchstens zwei Umbilical-Punkte besitzen können, und dass dieselben bei den einander einbeschriebenen Flächen in einen einzigen Punkt, den Pol ihrer Symptosen-Ebene zusammenfallen.

Die reciproke Untersuchung von IV. ergibt, dass ausser in dem Falle, wo die von der Symptosen-Axe an die eine der beiden Flächen gelegten Tangential-Ebenen die an die andere trennen, immer zwei Ebenen k und k' bestehen, welche durch die Symptosen-Axe gehen und bezüglich beider Flächen einander conjugirt sind. Es sind dies die Polar-Ebenen der Mittelpunkte der beiden Symptosen-Strahlenbündel. Jede dieser Ebene, etwa R, hat die folgenden Eigenschaften:

„Legt man durch eine ihrer Geraden Ebenen, so liegen die Verbindungslinien der beiden Pole jeder dieser Ebenen mit der Polare „der Symptosen-Axe in einer Ebene und schneiden sich in einem „Punkte der Ebene k."

Jeder Geraden in einer solchen Ebene entspricht also ein bestimmter Punkt, und dieselben entsprechen sich wechselseitig. Es ist also jede dieser Ebenen hinsichtlich dieser Elemente ein ebenes Polar-System. Bestehen die Umbilical-Punkte, so ist offenbar jedes dieser polaren Systeme die Projection der beiden polaren Strahlenbündel in den Umbilical-Punkten. Diese Ausführungen ergeben den folgenden Satz:

Durch die Symptosen-Axe zweier Flächen zweiter Ordnung geben im Allgemeinen zwei und nur zwei Ebenen, welche einander bezüglich beider Flächen conjugirt sind. Jede derselben ist der Träger eines Polar-Systems. Die Pole irgend einer Ebene bezüglich der beiden Flächen und der beiden Polar-Systeme liegen in derselben Geraden, weshalb ein Umbilical-Punkt irgend zweier dieser Gebilde ein solcher für beliebige zwei derselben ist*).

Ist die Ordnungscurve eines oder beider Polar-Systeme reell, so vertritt dieselbe in dem vorstehenden Satze ihr Polar-System. Diese

---

*) Der Begriff eines Umbilical-Punktes zweier Polar-Systeme mit derselben Symptosen-Axe ist wol aus dem vorhergehenden vollständig klar.

Digitized by Google

Polar-Systeme und Ordnungs-Curven können passend Umbilical-Ebenen und -Curven genannt werden. Sie stehen offenbar den Symptosen-Strahlenbündeln und Kegeln dual gegenüber.

Aus der in VI. reciproken Untersuchung folgt:

Haben zwei Flächen zweiter Ordnung mit einer Symptosen-Axe eine gemeinschaftliche Tangente, so besitzen sie zwei verschiedene oder zusammenfallende Umbilical-Punkte und jede gemeinschaftliche Tangente der beiden Flächen muss durch irgend einen von ihnen hindurchgehen. Alle gemeinschaftlichen Tangenten, welche durch denselben Umbilical-Punkt gehen, bilden einen Kegel.

„Jede Tangente, welche man von einem Umbilical-Punkt an die „eine zweier Flächen zweiter Ordnung ziehen kann, berührt auch die „andere.“

„Haben zwei Flächen zweiter Ordnung, welche eine Umbilical-„Ebene besitzen, eine gemeinschaftliche Tangente, so besitzen sie auch „eine Umbilical-Curve und in dieser schneiden alle gemeinschaftlichen „Tangenten die Umbilical-Ebene, sowie umgekehrt die Tangenten von „den Punkten einer Umbilical-Curve an die eine Fläche auch die „andere berühren.“

Hieraus folgt aus Umkehrung eines früheren Satzes:

„Die Spitzen der beiden Kegel, welche durch zwei Umbilical-„Curven bestimmt werden, sind die Umbilical-Punkte der beiden „Flächen.“

Aus der Bestimmung der beiden Umbilical-Ebenen ergibt sich, dass ihre Durchschnittspunkte mit der Polare der Symptosen-Axe sowol zu den etwaigen Umbilical-Punkten als auch zu den Schnittpunkten der beiden Flächen mit der Polare der Symptosen-Axe conjugirt harmonisch sind. Die Umbilical-Ebenen bestehen also immer, wenn nur die Umbilical-Punkte zwei Schnittpunkte einer Fläche mit der Polare der Symptosen-Axe nicht trennen.

Hierans erhält man mit Rücksicht auf die früheren Sätze:

„Haben zwei Flächen zweiter Ordnung zwei Umbilical-Kegel, so „besitzen sie auch zwei Umbilical-Curven.“

„Haben zwei Flächen zweiter Ordnung nur einen Umbilical-Kegel, „so besitzen sie noch einen zweiten Umbilical-Punkt aber keine „Umbilical-Ebene.“

Da zwei Flächen zweiter Ordnung mit einer Symptosen-Axe entweder zwei Umbilical-Punkte oder doch eine Umbilical-Curve besitzen müssen, so folgt weiter:

„Haben zwei Flächen zweiter Ordnung, welche eine Symptosen-„Axe besitzen, keinen Umbilical-Kegel, so besitzen sie die beiden „möglichen Umbilical-Ebenen und eine Umbilical-Curve."

VIII.

Aus den zuletzt entwickelten Sätzen ergibt sich im Zusammenhalt mit denen in VI. die Möglichkeit, dass zwei Flächen zweiter Ordnung gleichzeitig zwei Umbilical-Punkte und zwei Symptosen-Ebenen besitzen können. Es soll nun die Notwendigkeit dieser Consistenz der Symptosen-Ebenen mit den Umbilical-Punkten nachgewiesen werden und zwar in einer Weise, die neue wichtige Eigenschaften dieser Gebilde erkennen lässt.

Es lässt sich leicht zeigen, dass in dem Falle, als zwei Flächen zweiter Ordnung sowol die beiden Umbilical-Punkte als auch Symtosen-Ebenen besitzen, die beiden Flächen perspectivisch liegen, dergestalt, dass jeder Umbilical-Punkt als Centrum der Collineation und eine beliebige der beiden Symptosen-Ebenen als Collineations-Ebene angenommen werden darf.

Denn construirt man zu der einen Fläche eine ihr perspectivische, indem man den einen der Umbilical-Punkte als Collineations-Centrum, die eine Symptosen-Ebene als Collineations-Ebene und die beiden Polar-Ebenen dieses Umbilical-Punktes als entsprechende annimmt, so muss diese Fläche mit der anderen gegebenen zusammenfallen. Denn diese beiden Flächen sind einander einbeschrieben, weil ihr Umbilical-Punkt, das Collineations-Centrum, dieselbe Polar-Ebene bezüglich dieser beiden Flächen besitzt, und überdies haben sie zwei Symptosen-Ebenen, die Polar-Ebene des Collineations-Centrums und die Collineations-Ebene.

Diese Bemerkung führt leicht zum Beweise der obigen Behauptung.

Es mögen zwei Flächen zweiter Ordnung einen Umbilical-Punkt und also auch eine Symptosen-Axe besitzen. Vom Umbilical-Punkte U ziehe man zwei Gerade, deren eine die beiden Flächen F und F_1 durchschneide: A und A_1 seien zwei dieser Durchschnittspunkte, die auf verschiedenen Flächen liegen, während die andere die beiden Polarebenen von U in B und B_1 treffe. Hierbei mögen die Punkte A und B zum System der Fläche F, A_1 und B_1 zu F_1 gehören.

Man bestimme nun auf der ersten Geraden einen Punkt M, auf der zweiten N dergestalt, dass

$$(UMAA_1) = (UNBB_1)$$

ist. Diese Punkte M und N sind offenbar die Durchschnittspunkte der Geraden AA_1' und BB_1 mit der Ebene E, welche durch die Symptosen-Axe und den Durchschnittspunkt der AB und A_1B_1 gelegt wird. Construirt man nun für U als Collineations-Centrum, E als Collineations-Ebene und B und B_1 als entsprechende Punkte zu F eine perspectivische Fläche F_2, so haben diese die Ebene E zur Symptosen-Ebene. Die Flächen F_1 und F_2 sind dann einander einbeschrieben, denn ihr Umbilical-Punkt U hat bezüglich beider dieselbe Polar-Ebene. Sie haben aber überdies den Punkt A_1 gemeinschaftlich, da der der dem Punkte A in F entsprechende Punkt A_2 in F_2 durch die Relation bestimmt ist:

$$(UMAA_2) = (UNBB_1) = (UMAA_1)$$

Also fallen die Flächen F_1 und F_2 zusammen, somit ist E eine Symptosen-Ebene von F und F_1. Durch die reciproke Betrachtung findet man, dass zwei Flächen zweiter Ordnung mit einer Symptosen-Ebene auch einen Umbilical-Punkt besitzen müssen.

Aus diesen Bemerkungen erhält man die Sätze:

Die Symptosen-Ebenen und Umbilical-Punkte zweier Flächen zweiter Ordnung bedingen sich gegenseitig.

Zwei Flächen zweiter Ordnung können für jeden Umbilical Punkt als Collineations-Centrum und irgend eine der Symptosen-Ebenen als Collineations-Ebene perspectivisch auf einander bezogen werden.

Hieraus fliessen mehrere Folgerungen, die sich dual gegenüberstehen.

Legt man in den Durchschnittspunkten zweier Flächen zweiter Ordnung mit irgend einem Strahl, der durch einen Umbilical-Punkt derselben geht, Tangentialebenen an die Flächen, so schneiden sich die Berührungsebenen verschiedener Flächen zu zwei und zwei auf den beiden Symptosen-Ebenen.

Legt man aus einer Geraden, welche in einer Symptosen-Ebene zweier Flächen zweiter Ordnung liegt, Tangential-Ebenen an die Flächen, so gehen die Verbindungslinien der verschiedenen Flächen angehörigen Berührungspunkte zu zwei und zwei durch die beiden Umbilical-Punkte.

Schneiden die Polar-Ebenen irgend eines Punktes einer Symptosen-Ebene zweier Flächen zweiter Ordnung die Flächen, so liegen die von den Polar-Ebenen ausgeschnittenen Curven in zwei Kegeln, deren Spitzen die beiden Umbilical-Punkte sind.

Kann man aus den Polen einer durch einen Umbilical-Punkt zweier Flächen zweiter Ordnung gehenden Ebene Berührungs-Kegel an die Flächen legen, so schneiden sich dieselben in den Symptosen-Ebenen.

Wie aus früheren Bemerkungen bekannt ist, schneiden sich die beiden Polaren einer Geraden, welche in einer Symptosen-Ebene liegt, auf dieser Ebene. Legt man daher aus einer solchen Geraden Berührungsebenen an die beiden Flächen, so schneiden sich die Verbindungslinien der Berührungspunkte derselben Flächen in der Symptosen-Ebene und jene verschiedenen Flächen gehen zu zwei und zwei durch die beiden Umbilical-Punkte. Da nun die Pole jeder Symptosen-Ebene auf der Polare der Symptosen-Axe, also auf der Verbindungslinie der Umbilical-Punkte liegt, so folgt aus dieser Figur und der reciproken Betrachtung:

Die Pole jeder Symptosen-Ebene zweier Flächen zweiter Ordnung liegen zu den beiden Umbilical-Punkten harmonisch.

Die Polar-Ebenen jedes Umbilical-Punktes zweier Flächen zweiter Ordnung liegen zu den beiden Symptosen-Ebenen harmonisch.

Ebenso wie die Symptosen-Ebenen und Umbilical-Punkte zweier Flächen zweiter Ordnung gleichzeitig bestehen, tritt auch ein Symptosen-Kegel mit der in der Polar-Ebene seiner Spitze gelegenen Umbilical-Curve und umgekehrt eine Umbilical-Curve mit dem im Pol ihrer Ebene gelegenen Symptosen-Kegel zugleich auf.

Um diese Behauptung zu erweisen, lege man durch die Polare der Symptosen-Axe dergestalt eine Ebene, dass sie sowol die beiden Flächen in zwei Kegelschnitten als auch, wenn die Flächen etwa eine Umbilical-Curve besitzen, die Umbilical-Curve in zwei Punkten schneiden. Jeder dieser beiden Punkte, deren einer mit O bezeichnet werde, hat als ein Umbilical-Punkt der Flächen die Eigenschaft, dass die Pole jeder durch ihn gezogenen Geraden bezüglich der beiden Kegelschnitte auf einer Geraden liegen, welche wieder durch ihn geht, und dass umgekehrt auf jeder etwa durch O gezogenen Geraden zwei Punkte sich vorfinden, welche die Pole einer durch O gehenden Geraden bezüglich der beiden Kegelschnitte sind. Zieht man daher durch O eine Gerade, welche den einen Kegelschnitt in A und B, den anderen in A' und B' schneidet, und legt an die Kegelschnitte in diesen Punkten Tangenten, so liegt der Schnittpunkt der demsel-

ben Kegelschnitte angehörigen Tangenten anf der Polaro von O bezüglich seines Kegelschnittes, nnd zudem liegen beide mit O in einer Geraden. Da nun zwei Kegelschnitte bekanntlich stets collinear auf einander bezogen werden können, so liegen die vorliegenden Kegelschnitte perspectivisch für O als Collineations-Centrum. Die Collineations-Axe der beiden Systeme muss durch den Pol der Ebene der Umbilical-Curve gehen, weil die Polaren von O bezüglich der beiden Kegelschnitte einander entsprechende Geraden der beiden Systeme sind. Da nun die Polaren eines jeden Punktes der Collineations-Axe bezüglich der beiden Kegelschnitte sich auf ihr schneiden müssen, so schneiden sich die beiden Polar-Ebenen eines jeden ihrer Punkte auf ihr. Daher besitzt der Umbilical-Strahlenbündel, welcher sich im Pol der Ebene der betrachteten Umbilical-Curvo befiudet, einen Strahl, der in seiner zngehörigen Ebene liegt, somit hat er einen Orduungs-Kegel.

In entsprechender Weise lässt sich der reciproke Satz erhärten.

Nennt man einen Symptosen-Kegel nud die in der Polar-Ebene seiner Spitze gelegene Umbilical-Curve einander entsprechend, so kaun man das erhaltene Resultat durch den Satz ausdrücken:

Ein Symptosen-Kegel nnd seine entsprechende Umbilical-Cnrve bedingen sich wechselseitig.

Mit Hilfe dieser Sätze kann man die in VI. und VII. abgeleiteten vervollständigeu. Da aber diese Ergänzung bloss in einer Zusammenfassnng der gewonnenen Ergebnisse besteht und zu keinen neuen Resultaten führt, so übergehe ich dieselbe.

IX.

Vermittelst der abgeleiteten Sätze liesse sich nun eine grosse Anzahl neuer Sätze über Flächen zweiter Ordnnng entwickeln. Da aber derartige Untersucbungen die gesteckten Grenzen dieser Abhandlnng überschreiten, so begnüge ich mich bloss einige dieser Sätze anzuführen.

„Besitzen zwei Flächen zweiter Ordnung mit derselben dritten „Symptosen-Ebenen, so gehen dio beiden Paare Symptosen-Ebenen „durch dieselbe Ecke des den beiden ersteren Flächen conjugirten „Tetraeders nnd ihre Durchschnittslinien sind Strahlen eines von die„ser Ecke ausgehenden Symptoseu-Kegels der beiden ersten Flächen. „Die beiden Paare Umbilical-Puukte, welche die beiden ersten Flächen „mit der dritten besitzen, liegen in der dieser Ecke gegenüberstehen„den Tetraederfläche, nnd ihre Verbindnngslinien sind Tangenten

„der in dieser Ebene gelegenen Umbilical-Curve der beiden ersten „Flächen *).“

„Besitzen drei Flächen zweiter Ordnung zu je zwelen ein Sym- „ptosen-Ebenenpaar, so schneiden sich die Ebenen derselben zu dreien „in derselben Geraden und diese vier Durchschnittslinien gehen durch „denselben Punkt. Die drei Umbilical-Punktepaare liegen in dersel- „ben Ebene und ihre Punkte zu je dreien auf derselben Geraden.“

„Haben drei Flächen zweiter Ordnung eine Symptosen-Ebene ge- „meinsam, so schneiden sich die drei übrigen in derselben Geraden. „Ihre drei Umbilical-Punktepaare liegen in derselben Ebene und ihre „Punkte zu je drei in derselben Geraden.“

Diesen Sätzen stehen reciproke zur Seite und an den letzten schliessen sich verschiedene Sätze über homothetische Flächen, auf die ich jedoch nicht eingehe.

---

*) Unter Symptosen-Kegel verstehe ich hier die Kegel, welche von den Ecken des conjugirten Tetraeders, die Schnitt-Curve zweier Flächen zweiter Ordnung projiciren. Unter Umbilical-Curve das reciproke erzeugte Gebilde, die ligne de striction des Poncelet. Ich bemerke, dass sich beide Begriffe auch für den allgemeinen Fall in ganz derselben Weise entwickeln lassen als es früher geschah.

IV.

Untersuchungen über das sphärische Pascalsche Sechseck und das sphärische Brianchons-Sechsseit.

Von

F. E. Thieme.

---

§ 1. Ein sphärischer Hauptkreisbogen wird durch die an den Endpunkten stehenden Buchstaben nach Grösse und Richtung bezeichnet; daher ist $\widehat{AB}+\widehat{BA}=0$. Welches auch die Lage eines dritten Punktes C auf dem Hauptkreisbogen sein mag, immmer ist $\widehat{AB}+\widehat{BC}=\widehat{AC}=\widehat{AB}-\widehat{CB}$.

Wenn einfach von Bogen gesprochen wird, so hat man stets darunter den Hauptkreisbogen zu verstehen. Der Durchschnittspunkt zweier sphärischen Bogen ist der Natur der Sache nach stets ein Doppelpunkt.

§ 2. Das Verhältniss des Sinus der Abschnitte von $\widehat{AB}$ in dem Punkte C, also $\frac{\sin AC}{\sin CB}$ wird mit $\sin(ABC)$ bezeichnet, woraus sich ergiebt:

$$\sin(ABC).\sin(BAC)=1 \;\ldots\ldots\; (1)$$

$\sin(ABC)$ ist, in so fern AC und CB innerhalb des zweiten Quadranten liegen, positiv, wenn C zwischen A und B, negativ, wenn es ausserhalb liegt.

Bezeichnen a und b zwei sphärische Bogen, so stellt $\overline{ab}$ den Winkel derselben dar und $\frac{\sin \overline{ac}}{\sin \overline{bc}}$ sei $\sin(\overline{abc})$. Liegt c zwischen a und b

so ist $\sin(\widehat{abc})$ positiv, im entgegengesetzten Falle negativ bei Berücksichtigung der obigen Grenze.

§ 3. In dem Punkte A von $\widehat{AB}$ errichte man senkrecht $\widehat{AM}$ und mache diesen Bogen 90^0, so ist M der sphärische Pol von $\widehat{AB}$ als sphärischer Polare, kurz Pol und Polare. Errichtet man in M senkrecht einen Bogen aa_1 auf AM, so ist derselbe die Polare von A als Pol. Man zieht $\widehat{MB}$ und bb_1 senkrecht auf $\widehat{MB}$, so ist $\overline{ab_1} = \angle AMB = 180^0 - \overline{ab}$, d. h. der Bogen der beiden Pole ergänzt den Winkel der Polaren zu 180^0. Die Richtung von $\widehat{AB}$ ist der Richtung von $\overline{ab}$ entgegengesetzt, und $\overline{ab}$ wendet $\widehat{AB}$ die hohle Seite zu.

Man nehme ausserhalb $\widehat{AB}$ auf der Seite von B den Punkt C an, ziehe $\widehat{MC}$ und cc_1 senkrecht darauf, so ist $\widehat{AC} = 180^0 - \overline{a_1c}$ und $\widehat{BC} = 180^0 - \overline{b_1c}$. Daraus folgt zugleich:

Wenn drei Punkte auf einem Kreise liegen, so schneiden sich ihre drei Polaren in einem Punkte und umgekehrt.

Da $\widehat{AC} > \widehat{AB}$, so ist $\overline{ao} < \overline{ab}$, d. h. c liegt zwischen a und b, folglich ist

$$\sin(ABC) = -\sin(\widehat{abc}) \quad \ldots . \; (2).$$

§ 4. Man verlängere Fig. 2. die Seiten des sphärischen Dreiecks ABC, so dass $\widehat{AD} = \widehat{BE} = \widehat{CF} = 90^0$ und errichte senkrecht in D, E und F respective a, b, c, so ist das Dreiseit abc die Polarfigur von $\triangle ABC$; die Winkel des Dreiseits ergänzen die entsprechenden Seiten des Dreiecks zu 180^0. Da a die Polare von A, und b von B, so ist der Schnittpunkt von a und b d. i. $a.b$ oder C_1 der Pol von AB; eben so $a.c$ d. i. B_1 der Pol von AC und $A.$ von BC, das Dreiseit ABC ist daher auch die Polarfigur von Dreieck A_1B_1C, und es ist $B_1 = 180 - AC$ u. s. w.

§ 5. Durch die Spitzen A, B und C des Dreiecks ABC sind AA_1, BB_1, CC_1 so gezogen, dass sie sich in dem Punkte D schneiden, denn aus

$$\triangle\, ADC_1 : \sin AC_1 = \frac{\sin AD}{\sin C_1} \cdot \sin ADC_1$$

$$\triangle\, C_1DB : \sin C_1B = \frac{\sin BD}{\sin C_1} \cdot \sin C_1DB,$$

folgt:

$$\sin(ABC_1) = \frac{\sin AD}{\sin DB} \cdot \frac{\sin(ADC_1)}{\sin(C_1DB)}.$$

Eben so ist:

$$\sin(BCA_1) = \frac{\sin DB}{\sin DC} \cdot \frac{\sin(BDA_1)}{\sin(A_1DC)}$$

$$\sin(CAB_1) = \frac{\sin DC}{\sin DA} \cdot \frac{\sin(CDB_1)}{\sin(B_1DA)}.$$

Da nun $\angle ADC_1 = \angle A_1DC$ u. s. w. ist, so erhält man:

$$\sin(ABC_1).\sin(BCA_1).\sin(ACB) = +1 \quad \ldots (3).$$

Das Product ist positiv, weil die Abschnitte dieselbe Richtung haben. Läge der Punkt D ausserhalb des Dreiecks, so würden zwei Abschnittsverhältnisse negativ, also das Product immer noch positiv sein. Es ist leicht zu zeigen, dass wenn die drei Bogen nicht durch einen Punkt gehen, die Factoren auf der rechten Seite sich nicht aufheben, das Product also nicht gleich 1 sein kann, woraus sich ergiebt:

Wenn die durch die Spitzen eines sphärischen Dreiecks gehenden Bogen sich in einem Punkte schneiden, so ist das Product der drei Abschnittsverhältnisse +1 und umgekehrt.

§ 6. Man bilde von Fig. 3. die Polarfigur; es seien respective $abca_1b_1c_1$ die Polaren von $ABCA_1B_1C_1$; dann ist der Pol von $AA_1 = a.a_1 = M$, von $BB_1 = b.b_1 = N$, von $CC_1 = c.c_1 = O$. Da AA_1, BB_1 und CC_1 sich in einem Punkte schneiden, so liegen MN und O auf einem Kreise; weil AB und C_1 auf einem Hauptkreise liegen, so schneiden sich ab und c_1 in einem Punkte, u. s. w., daher ist (2)

$$\sin(ABC_1) = -\sin(\overline{abc_1}),$$
$$\sin(BCA_1) = -\sin(\overline{bca_1}),$$
$$\sin(CAB_1) = -\sin(\overline{cab_1}),$$

folglich

$$\sin(\overline{abc_1}).\sin(\overline{bca_1}).\sin(\overline{cab_1}) = -1.$$

Es sei ferner $a.b = C'$, $b.c = A'$ und $c.a = B'$, so erhält man, da $\overline{ac_1} = B'O$, $\overline{c_1b} = OA'$ u. s. w. ist:

$$\sin(A'B'O).\sin(B'C'M)\sin(C'A'N) = -1 \quad \ldots (4)$$

Wenn die Seiten eines Dreiecks von einem Kreise geschnitten werden, so ist das Product der drei Abschnittsverhältnisse der Seiten gleich −1 und umgekehrt*).

---

*) Dieser Satz stammt von Menelaus (80 n. Chr.). Chasles Geschichte der Geometrie übersetzt von Prof. Dr. Sohncke S. 23.

§ 7. Fig. 4. stellt zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ dar, welche eine solche Lage haben, dass die Verbindungsbogen der entsprechenden Ecken $\widehat{AA_1}$, $\widehat{BB_1}$, $\widehat{CC_1}$ sich in einem Punkte D schneiden.

Bezeichnet man durch Untereinanderstellen der Bogen den Schnittpunkt derselben, so sei

$$\frac{A\,B}{A_1B_1} = C_2, \quad \frac{B\,C}{B_1C_1} = A_2, \quad \frac{C\,A}{C_1A_1} = B_2.$$

In so fern geschnitten wird:

$\triangle ABD$ von $\widehat{A_1B_1}$ ist: $\sin(ABC_2).\sin(BDB_1).\sin(DAA_1) = -1$

$\triangle BCD$ „ B_1C_1 „ : $\sin(BCA_2).\sin(CDC_1).\sin(DBB_1) = -1$

$\triangle CAD$ „ C_1A_1 „ : $\sin(CAB_2).\sin(ADA_1).\sin(DCC_1) = -1$

Nimmt man das Product der drei Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\sin(ABC_2).\sin(BCA_2).\sin(CAB_2).\sin(BDB_1).\sin(DBB_1).\sin(DAA_1)$$
$$\sin(ADA_1).\sin(CDC_1).\sin(DCC_1) = -1.$$

Es ist aber (1)

$$\sin(BDB_1).\sin(DBB_1) = 1$$
$$\sin(DAA_1).\sin(ADA_1) = 1$$
$$\sin(CDC_1).\sin(DCC_1) = 1$$

Daher

$$\sin(ABC_2).\sin(BCA_2).\sin(CAB_2) = -1$$

d. h. (4) C_2A_2 und B_2 liegen auf der Peripherie eines Kreises.

Wenn die Verbindungsbogen von je zwei entsprechenden Eckpunkten zweier Dreiecke sich in einem Punkte schneiden, so liegen die drei Schnittpunkte von je zwei gegenüberliegenden Seiten auf einem Kreise.

Geht man auf die Polarfigur über, so seien respective $ABCA_1B_1C_1$ die Pole von $abca_1b_1c_1$; es sei ferner $a.b = C'$, $b.c = A'$, $c.a = B'$, $a_1.b_1 = C_1'$, $b_1.c_1 = A_1'$ und $c_1.a_1 = B_1'$, dann sind C', A', B', C_1', A_1', B_1' die Pole von $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{A_1B_1}$, $\widehat{B_1C_1}$, $\widehat{C_1A_1}$.

Da A der Pol von a_1A_1 von a_1, so ist $a.a_1$ der Pol von $\widehat{AA_1}$, eben so ist $b.b_1$ der Pol von BB_1 und endlich $c.c_1 = \widehat{CC_1}$; da nun in der ursprünglichen Figur $\widehat{AA_1}$, $\widehat{BB_1}$ und $\widehat{CC_1}$ sich in einem Punkte schneiden, so müssen $a.a_1$, $b.b_1$, $c.c_1$ d. h. die Schnittpunkte der Paare von Gegenseiten auf einem Kreise liegen.

Von $\dfrac{A\,B}{A_1B_1} = C_2$ ist die Polare $C'C_1'$, von $B_2: B'B_1'$, von A_2: $A'A_1'$; da nun $A_2B_2C_2$ auf einem Kreise liegen, so schneiden sich

Google

$A'A_1'$, $B'B_1'$, $C'C_1'$, d. h. die Verbindungsbogen der Gegenecken der Polardreiecke in einem Punkte d. h.

Wenn die Schnittpunkte von jedem Paare von Gegenseiten zweier sphärischen Dreiecke auf einem Kreise liegen, so schneiden sich die Verbindungsbogen der gegenüberliegenden Ecken in einem Punkte.

§ 8. Um die im vorigen Paragraphen angegebene Lage zu erkennen, bedarf es eines algebraischen Ausdrucks; man wende folgende Bezeichnungen an, wobei das Untereinanderstellen, wie oben, den Schnittpunkt der Bogen bezeichnet:

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A_1B_1}} = C_2 \qquad \frac{\widehat{AB}}{\widehat{B_1C_1}} = D \qquad \frac{\widehat{AB}}{\widehat{C_1A_1}} = G$$

$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{B_1C_1}} = A_2 \qquad \frac{\widehat{BC}}{\widehat{C_1A_1}} = E \qquad \frac{\widehat{BC}}{\widehat{A_1B_1}} = H$$

$$\frac{\widehat{CA}}{\widehat{C_1A_1}} = B_2 \qquad \frac{\widehat{CA}}{\widehat{A_1B_1}} = F \qquad \frac{\widehat{CA}}{\widehat{B_1C_1}} = I$$

In so fern die Seiten des Dreiecks ABC

von A_1B_1 geschnitten werden, ist: $\sin(ABC_2)\sin(BCH)\sin(CAF) = -1$

" B_1C_1 " " ": $\sin(ABD)\sin(BCA_2)\sin(CAI) = -1$

" C_1A_1 " " ": $\sin(ABG)\sin(BCE)\sin(CAB_2) = -1$

Multiplicirt man die drei Gleichungen, so erhält man:

$$\sin(ABC_2).\sin(BCA_2).\sin(CAB_2).\sin(ABD).\sin(ABG).\sin(BCH). \\ \sin(BCE).\sin(CAF).\sin(CAI) = -1.$$

Da A_2, B_2 und C_2 auf einem Kreise liegen, ist (4):

$$\sin(ABC_2).\sin(BCA_2).\sin(CAB_2) = -1.$$

Dividirt man das oben erhaltene Product damit, so ergiebt sich:

$$\sin(ABD)\sin(ABG)\sin(BCH)\sin(BCE)\sin(CAF)\sin(CAI) = +1 \quad (5)$$

Ist Gleichung (5) erfüllt, so schneiden sich die Verbindungsbogen von je zwei Eckpunkten zweier Dreiecke in einem Punkte und die drei Schnittpunkte an je zwei entsprechenden Seiten liegen auf einem Hauptkreise, und ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so ist es auch die andere, und es gilt Gl. (5).

Digitized by Google

§ 9. Es seien $\begin{matrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \\ A_3B_3C_3 \end{matrix}$ drei sphärische Dreiecke, welche eine solche Lage haben, dass $A_1A_2A_3$ auf einem ersten, $B_1B_2B_3$ auf einem zweiten, $C_1C_2C_3$ auf einem dritten Kreise liegen und dass diese drei Kreise sich in einem Punkte schneiden*).

Wendet man auf $\triangle\, A_1B_1C_1$ und $\triangle\, A_2B_2C_2$ § 7. an, so ergiebt sich:

$$\begin{matrix} \widehat{A_1B_1} & \widehat{B_1C_1} & \widehat{C_1A_1} \\ \widehat{A_2B_2} & \widehat{B_2C_2} & \widehat{C_2A_2} \end{matrix} \text{ liegen auf einem Kreise.}$$

d. i. $\gamma_3 \quad \alpha_3 \quad \beta_3$

Eben so folgt aus $\triangle\, A_2B_2C_2$ und $\triangle\, A_3B_3C_3$:

$$\begin{matrix} \widehat{A_2B_2} & \widehat{B_2C_2} & \widehat{C_2A_2} \\ \widehat{A_3B_3} & \widehat{B_3C_3} & \widehat{C_3A_3} \end{matrix} \text{ liegen auf einem Kreise.}$$

d. i. $\gamma_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_1$

Endlich folgt aus $\triangle\, A_3B_3C_3$ und $\triangle\, A_1B_1C_1$:

$$\begin{matrix} \widehat{A_3B_3} & \widehat{B_3C_3} & \widehat{C_3A_3} \\ \widehat{A_1B_1} & \widehat{B_1C_1} & \widehat{C_1A_1} \end{matrix} \text{ liegen auf einem Kreise.}$$

d. i. $\gamma_2 \quad \alpha_2 \quad \beta_2$

Man ziehe nun die beiden Dreiecke $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ und $\beta_1\beta_2\beta_3$ in Betracht, so ergiebt sich

$$\frac{\widehat{\alpha_1\alpha_2}}{\widehat{\beta_1\beta_2}} = \frac{B_3C_3}{C_3A_3} = C_3,$$

$$\frac{\alpha_2\alpha_3}{\beta_2\beta_3} = \frac{B_1C_1}{C_1A_1} = C_1,$$

$$\frac{\alpha_3\alpha_1}{\beta_3\beta_1} = \frac{B_2C_2}{C_2A_2} = C_2,$$

$C_1C_2C_3$ d. h. die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten der $\triangle\, \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ und $\triangle\, \beta_1\beta_2\beta_3$ liegen auf einem Kreise, folglich schneiden sich $\widehat{\alpha_1\beta_1}$ $\widehat{\alpha_2\beta_2}$ $\widehat{\alpha_3\beta_3}$ in einem Punkte. Aber auf $\widehat{\alpha_1\beta_1}$ liegt γ_1, auf $\widehat{\alpha_2\beta_2}$ liegt γ_2 und auf $\alpha_3\beta_3$ liegt γ_3 daher schneiden sich die drei Kreise $\alpha_1\beta_2\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ und $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ in einem Punkte, das heisst:

$$\begin{matrix} \widehat{A_1B_1} & \widehat{B_1C_1} & \widehat{C_1A_1} \\ \widehat{A_2B_2} & \widehat{B_2C_2} & \widehat{C_2A_2} \end{matrix}$$

*) Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie bearbeitet von Prof. Dr. Schröder. Thl. 2. § 11.

$$\widehat{A_2B_2} \quad \widehat{B_2C_2} \quad \widehat{C_2A_2}$$
$$\widehat{A_3B_3} \quad \widehat{B_3C_3} \quad \widehat{C_3A_3}$$

$$\widehat{A_3B_3} \quad \widehat{B_3C_3} \quad \widehat{C_3A_3}$$
$$\widehat{A_1B_1} \quad \widehat{B_1C_1} \quad \widehat{C_1A_1}$$

befinden sich auf drei in einem Punkte sich schneidenden Kreisen:

Wenn die Spitzen dreier sphärischen Dreiecke auf drei in einem Punkte sich schneidenden Kreisen liegen, so befinden sich die Schnittpunkte von jedem Paare entsprechender Gegenseiten auf drei in einem Punkte sich schneidenden Kreisen.

Es ist leicht nachzuweisen dass, wenn man auf die Polarfigur übergeht, man die Umkehrung erhält.

Wenn die Schnittpunkte von jedem der drei Paare entsprechender Seiten dreier sphärischen Dreiecke auf einem Hauptkreise liegen, so befinden sich die Spitzen derselben auf drei sphärischen Bogen, welche sich in einem Punkte schneiden.

§ 10. In Fig. 5. sei M der Mittelpunkt einer Kugel, AB ein Nebenkreis auf derselben, deren Pol P, sowie der Gegenpol P', daher PM die Achse. Man ziehe den Halbmesser MA und errichte darauf senkrecht den Kreis AC', so ist derselbe die Polare von A. Der Bogen vom Pole nach einem Punkte des Nebenkreises (PA) heisse der sphärische Halbmesser; es sei $A'C'$ der Durchschnitt der Ebene PMA mit dem Kreise $A'C'$, so ist $P'A' = 90 - PA$. Durch A' lege man den Parallelkreis $A'B'$.

Verbindet man einen Punkt D' des Bogens $A'C'$ mit dem Mittelpunkte M, so bilden MA', MD' und MP' eine rechtwinklige Ecke, worin $A'MP'$ Kathete, $D'MP'$ Hypotenuse ist, daher $\angle D'MP' > \angle A'MP'$; legt man daher durch $P'D'$ einen Kreis, so ist $\widehat{P'D'} > P'A'$, woraus folgt, dass Kreis $A'C'$ den Nebenkreis $A'B'$ in dem Punkte A' tangirt. Dreht man nun den Halbmesser so, dass A längs des Nebenkreises AB sich bewegt, so werden die Polaren stets den Nebenkreis $A'B'$ berühren, so dass daher $A'B'$ die Polarfigur von AB ist: Die Polarfigur eines Nebenkreises ist wieder ein Nebenkreis, dessen sphärischer Halbmesser den ersten zu 90° ergänzt.

Daraus folgt auch, dass die Polare eines Punktes der Hauptkreis ist und umgekehrt.

Digitized by Google

Nimmt man auf der Peripherie des Nebenkreises AB zwei Punkte an und verbindet sie durch einen Hauptkreisbogen, so sind die Polaren zwei den Polarkreis berührende Kreise; der Schnitt derselben ist der Pol des Hauptkreisbogens AB. Daraus folgt, dass wenn man in dem Nebenkreise AB ein sphärisches Drei-, Vier- oder Sechseck beschreibt, die Polarfigur ein Dreiseit, Vierseit oder Sechsseit um den Polarkreis ist.

§ 11. Es stelle Fig. 6. eine Kugel mit der Kugelhaube $BCED$ dar, M ist der Mittelpunkt der Kugel, A ein Punkt der Kugeloberfläche, ABC und ADE sind den Nebenkreis schneidende Hauptkreise, AT der ihn berührende. Durch den Mittelpunkt M und die Hauptkreisbogen lege man Ebenen, welche sich in der Geraden MA schneiden. Die erweiterte Ebene des Nebenkreises schneide MA in U, sie werde von den Ebenen der Hauptkreisbogen in UDE, UBC und UT geschnitten.

Aus der Planimetrie ist bekannt, dass $UB \,.\, UC = UD \,.\, UE = UT$ ist.

Aus $\triangle\ UCM$ folgt:

$$UC = \frac{UM . \sin CMA}{\sin MCU.}$$

Da $\triangle\ MBC$ gleichschenklig, so ist

$$2 \angle MCU = 180^0 - \angle CMB$$

oder

$$\angle MCU = 90 - \tfrac{1}{2} \angle CMB,$$

daher

$$UC = \frac{UM . \sin CMA}{\cos \frac{1}{2} CMB.} = \frac{UM \sin \widehat{AC}}{\cos \frac{1}{2} \widehat{BC}.}$$

Eben so folgt:

$$UB = \frac{UM . \sin \widehat{AB}}{\cos \frac{1}{2} \widehat{BC}}.$$

folglich

$$UB \,.\, UC = \frac{UM^2 \sin \widehat{AB} . \sin \widehat{AC}}{\cos \frac{1}{2} \widehat{BC}^2}$$

Eben so ist

$$UD \,.\, UE = \frac{UM^2 \sin \widehat{AD} . \sin \widehat{AE}}{\cos \frac{1}{2} \widehat{DE}^2},$$

folglich

$$\frac{\sin \widehat{AB} . \sin \widehat{AC}}{\cos \frac{1}{2} \widehat{BC}^2} = \frac{\sin \widehat{AD} . \sin \widehat{AE}}{\cos \frac{1}{2} \widehat{DE}^2}$$

Digitized by Google

Denkt man sich AC um A herumgedreht bis zur Coincidenz mit AT, so wird $\widehat{AB}=\widehat{AC}=\widehat{AT}$ und BC gleich Null, voraus folgt:

$$\frac{\sin\widehat{AB}\,.\,\sin\widehat{AC}}{\cos\frac{1}{2}BC^2}=\frac{\sin AD\,.\,\sin AE}{\cos\frac{1}{2}DE^2}=\sin AT^2 \;\ldots.\; (6)^*)$$

Fällt A zwischen B und C so ist $\sin\frac{1}{2}\widehat{AB}\sin\frac{1}{2}\widehat{AC}$ negativ.

Die Gleichung 6 gilt auch noch für die grössere Kugelhaube.

§ 12. In Fig. 7. stellt ABC ein sphärisches Dreieck dar, welches den Nebenkreis der Kugel in den Punkten $DEFGHI$ schneidet; die Punkte D und I, E und F, G und H sind durch Hauptkreise verbunden und geben $\triangle A_1B_1C_1$. Durch Anwendung von Gl. (6) ergiebt sich:

$$\frac{\sin AD\,.\,\sin AE}{\cos\frac{1}{2}DE^2}=\frac{\sin AI\,.\,\sin AH}{\cos\frac{1}{2}HI^2}$$

$$\frac{\sin BF\,.\,\sin BG}{\cos\frac{1}{2}FG^2}=\frac{\sin BE\,.\,\sin BD}{\cos\frac{1}{2}DE^2}$$

$$\frac{\sin CH\,.\,\sin CI}{\cos\frac{1}{2}HI^2}=\frac{\sin CG\,.\,\sin CF}{\cos\frac{1}{2}FG^2}$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen erhält man

$$\sin AD\,.\sin AE\,.\sin BF\,.\sin BG\,.\sin CH\,.\sin CI=\sin AI\,.\sin AH\,.\sin BE\,.\sin BD\,.\sin CG\,.\sin CF$$

d. i.

$$\frac{\sin AD}{\sin DB}\cdot\frac{\sin AE}{\sin EB}\cdot\frac{\sin BF}{\sin FC}\cdot\frac{\sin BG}{\sin GC}\cdot\frac{\sin CH}{\sin HA}\cdot\frac{\sin CI}{\sin IA}=1,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\sin ABD\,.\sin ABE\,.\sin BCF\,.\sin BCG\,.\sin CAH\,.\sin CAG=1$$

Das ist aber Gleichung (5), folglich schneiden sich die Verbindungsbogen der gegenüberliegenden Eckpunkte $\widehat{AA_1}$, $\widehat{BB_1}$, $\widehat{CC_1}$ in einem Punkte, und die Schnittpunkte von jedem Paare von Gegenseiten

---

*) Schulz: Elementare Sphärik Thl. 2. § 54 giebt für Gl. (6)

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{AB}\,.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{AC}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{AD}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{AE}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{AT}^2.$$

Aus Fig. 6. lässt sich diese Gleichung leicht ableiten durch Anwendung von

$$\frac{a-b}{a+b}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C,$$

denn es ist

$$\frac{UA}{UM+MA}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{AB}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{AC}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{AD}.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\widehat{AE}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}AT^2.$$

Digitized by Google

$$\begin{matrix} DE & EF & FG \\ GH & HI & ID \end{matrix}$$

liegen auf einem Kreise; nun ist aber *DEFGHI* ein in einen Nebenkreis beschriebenes sphärisches Sechseck, welches Pascalsches Sechseck heisst; daraus folgt:

In einem Pascalschen Sechsecke liegen die Schnittpunkte von jedem Paare von Gegenseiten auf einem Kreise, welcher Pascalscher Kreis heisst.

§ 13. Geht man auf die Polarfigur von § 7. über, so ist D der Pol einer Tangente d an dem polaren Nebenkreise; ebenso ist die Tangente e die Polare von E, daher der Schnittpunkt der beiden Tangenten $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{e}$ der Pol von der Seite DE; die Polarfigur vom Pascalschen Sechseck ist daher ein um den polaren Nebenkreis beschriebenes Sechsseit: Brianchons-Sechsseit.

Da in dem Pascalschen Sechsecke

$$\begin{matrix} DE & EF & FG \\ GH & HI & ID \end{matrix}$$

auf einem Kreise liegen, so müssen, wenn man mit $\genfrac{}{}{0pt}{}{\widehat{dg}}{eh}$ die Verbindungsbogen der Schnittpunkte $\genfrac{}{}{0pt}{}{d}{e}$ und $\genfrac{}{}{0pt}{}{g}{h}$ bezeichnet,

$$\begin{matrix} \widehat{dg} & \widehat{ch} & \widehat{fi} \\ eh & fi & gd \end{matrix}$$

sich in einem Punkte schneiden d. h.

In einem Brianchons-Sechsseit schneiden sich die drei Verbindungsbogen von je zwei gegenüber liegenden Eckpunkten, Brianchons-Kreise genannt, in einem Punkte: Brianchons-Punkt.

§ 14*). Man bezeichne die Spitzen eines Pascalschen Sechsecks mit den Zahlen 123456, und die Folge der Zahlen bestimme zugleich die Aufeinanderfolge der entsprechenden Ecken. Permutirt man die sechs Zahlen, so erhält man 720 Verbindungen, von welchen jede ein Pascalsches Sechseck giebt; von diesen sind aber je sechs identisch,

---

*) Man vergleiche die Beziehung auf die folgende Entwickelung:
Steiner-Schröter Vorlesungen Thl. 2. § 28.
Analytische Geometrie der Kegelschnitte von George Salmon, frei bearbeitet von Prof. Dr. Fiedler Art. 286 u. 287.

Digitized by Google

nämlich 123456, 234561, 345612, 456123, 561234, 612345. Von den übrigen fallen wiederum je zwei zusammen, z. B. das Sechseck 325416 ist identisch mit 361452, daher hat man 720 durch 12 zu dividiren, um die Anzahl der verschiedenen Pascalschen Sechsecke zu erhalten, d. h. es giebt 60 Pascalsche Sechsecke (von sechs auf der Peripherie gegebenen Punkten kann man sechzig verschiedene Pascalsche Sechsecke bilden), insofern man nur die kleinern Bogen berücksichtigt

In jedem Pascalschen Sechsecke liegen die Schnittpunkte von jedem Paare von Gegenseiten, Pascalsche Punkte, auf einem Kreise, Pascalscher Kreis, daher giebt es sechzig Pascalsche Kreise.

Der Pascalsche Punkt $\frac{12}{34}$ d. h. der Schnittpunkt von $\widehat{12}$ und $\widehat{34}$, kommt in acht Pascalschen Sechsecken vor, von denen aber je zwe identisch sind:

125346	126345	125436	126435
216435	215436	216345	215346

Daher gehen vier Pascalsche Kreise durch denselben Pascalschen Punkt, die Anzahl der Pascalschen Punkte ist demnach $\frac{3 \times 60}{4} = 45$.

Man kann auch noch auf einem andern Wege zu demselben Resultate gelangen. Die sechs Eckpunkte des Pascalschen Sechsecks geben fünfzehn Verbindungsbogen. Betrachtet man den Verbindungsbogen $\widehat{12}$, so gehen durch die Endpunkte acht Verbindungsbogen ($\widehat{13}$, $\widehat{14}$, $\widehat{15}$, $\widehat{16}$ u. s. w.), folglich für die andern Punkte noch sechs Schnittpunkte übrig, für alle fünfzehn neunzig, jedoch fallen je zwei zusammen

$$\begin{pmatrix}12 & 56\\ 56 & 12\end{pmatrix}, \text{ giebt } 45.$$

Es giebt fünf und vierzig Pascalsche Punkte.

§ 15. Man stelle Brianchons-Sechsseit dar durch I. II. III. IV. V. VI. und zwar so, dass $\frac{\text{I.}}{\text{II.}}$ der Pol von $\widehat{12}$ u. s. w. ist.

Da es sechzig Pascalsche Sechsecke giebt, so giebt es auch sechzig Brianchons-Sechsseite, so wie sechzig Brianchons-Pnukte; vier Brianchons-Punkte liegen auf einem Brianchons-Kreise, deren es fünf und vierzig giebt.

§ 16. Jedes Pascalsche Sechseck kann man sich aus zwei sphärischen Dreiecken entstehend denken, wovon je eine Seite des einen je zwei Seiten des andern auf der Peripherie des Nebenkreises schneidet;

Digitized by Google

Die Seiten des einen Dreiecks seien: $AB = 12$, $BC = 34$, $CA = 56$.
„ „ „ andern „ „ $A_1B_1 = 35$, $B_1C_1 = 16$, $C_1A_1 = 24$.

Der Pascalsche Kreis des Sechsecks 124356 wird dann dargestellt durch:

$$\begin{matrix} 12 & 34 & 56 & \quad A_1B_1 & B_1C_1 & C_1A_1 \\ 35 & 16 & 24 & \quad AB & BC & CA. \end{matrix}$$

Der dritte Punkt folgt aus den beiden andern, denn aus $\begin{matrix}12 & 34\\ 35 & 16\end{matrix}$ folgt $\begin{matrix}56\\24\end{matrix}$.

Nach § 12 schneiden sich die Verbindungsbogen der gegenüber liegenden Eckpunkte in einem Punkte, das ist:

$$\left.\begin{matrix} 12 & 35 \\ 56 & 24 \\ \\ 12 & 35 \\ 34 & 16 \\ \\ 34 & 16 \\ 56 & 24 \end{matrix}\right\}$$ oder wenn man die dritten Punkte ergänzt:

$$\begin{matrix} 12 & 35 & 46 \\ 56 & 24 & 13 \\ \\ 12 & 35 & 46 \\ 34 & 16 & 25 \\ \\ 34 & 16 & 25 \\ 56 & 24 & 13 \end{matrix}$$

Dies sind die Pascalschen Kreise der drei Sechsecke:

124653
164352
134256

die sich in einem Punkte schneiden; dieser Punkt ist offenbar kein Pascalscher Punkt, er heisst **Steinerscher Punkt**. **In einem Steiner'schen Punkte schneiden sich drei Pascal sche Kreise.**

Man beachte, dass bei den Sechsecken die ungeraden Punkte unveränderlich sind, während die geraden bestehen aus 263, 632, 326.

Die Charakteristik des Steinerschen Punktes ist:

Digitized by Google

12 35 46
56 24 13
34 16 25,

wovon die beiden ersten Colonnen den ersten, die zweite und dritte den zweiten, nnd die dritte und erste den dritten Pascalschen Kreis geben. Da die dritte Colonne durch die beiden andern bestimmt ist, so liegt auf einem Pascalscheu Kreise nur ein Steinerscher Punkt, in welchem sich drei Pascalsche Kreise schneiden, woraus folgt: Es giebt zwanzig Steinersche Punkte.

§ 17. Jeder Eckpunkt vom Brianchons-Sechsseit ist der Pol einer Seite des Pascalschen Sechsecks; der Schnittpunkt von zwei gegenüber liegenden Seiten des Pascalschen Sechsecks ist daher der Pol des Verbindungsbogens zweier gegenüber liegenden Eckpunkte, d. h. ein Pascalscher Punkt ist der Pol eines Brianchons-Kreises, daher ist der Brianchons-Punkt der Pol des betreffenden Pascalschen Kreises; nun schneiden sich aber drei Pascalsche Kreise in einem Punkte, dem Steinerschen Punkte, also liegen drei Brianchons-Punkte auf einem Kreise, Steinerscher Brianchons-Kreis: Auf einem Steinerschen Brianchons-Kreise liegen drei Brianchons-Punkte; solcher Steinersche Brianchons-Kreise giebt es zwanzig.

§ 18. Um den Schnittpunkt der beiden Pascalschen Kreise

12 35 46 und 56 24 13
56 24 13 und 34 15 26

zu untersuchen, nehme man drei Pascalsche Kreise, von welchen je zwei einen Punkt gemeinschaftlich haben, als Seiten eines sphärischen Dreiecks an und Sechsecksbogen, welche in den drei Kreisen vorkommen, als Seiten eines zweiten Dreiecks, daher

12	56	34
12 35 46	56 24 13	34 15 26
45 26 13	23 15 46	16 24 35 .

Der Durchschnitt der beiden ersten Dreiecksseiten ist { 12, 45

" " " " zweiten " " { 56, 23

" " " " dritten " " { 34, 16

Diese Schnittpunkte liegen auf dem Pascalschen Kreise

Digitized by Google

12	56	34
45	23	16'

daher müssen sich die Verbinduugsbogen der gegenüber liegenden Ecken in einem Punkte schueiden, d. i.

12	46		56	24		34	26
56	13'		34	15'		12	35'

oder wenn man die dritten Punkte ergänzt:

12	46	35		56	24	13		34	26	15
56	13	24'		34	15	26'		12	35	46'

Das sind drei Pascalsche Kreise, welche sich in eiuem Punkte schneiden, welcher weder ein Pescalscher noch ein Steinerscher ist, er heisse Kirkmannscher Pnukt: Drei Pascalsche Kreise schneiden sich in einem Kirkmannschen Punkte.

Die Charakteristik des Kirkmannschen Punktes ist:

12	46	35
56	13	24
34	26	15
12	35	46.

Von den drei Verticalcolonnen ist nur die erste vollständig, die beiden andern enthalten Wiederholungen, man kann aber die zweite, die dritte und alle drei vervollständigen, dies giebt:

12	46	35		12	46	35		12	46	35
56	13	24		56	13	24		56	13	24
14	25	36'		23	45	16'		34	25	16'
35	46	12		46	12	35		12	46	35

Dies giebt drei Kirkmannsche und ein Steinerscher Puukt, welche sämmtlich auf dem Pascalschen Kreise liegen:

12	46	35
56	13	24'

Auf einem Pascalschen Kreise liegen drei Kirkmannsche und ein Steinerscher Punkt.

Da es 60 Pascalsche Kreise giebt, auf jedem derselben drei Kirkmannsche Punkte liegen, in welchen sich wieder je drei Pascalsche Kreise schneiden, so erhält man: Es giebt sechzig Kirkmannsche Punkte.

Digitized by Google

§ 19. Nach § 18. schneiden sich drei Pascalsche Kreise in einem Punkte, folglich müssen die Pole der ersten d. i. drei Brianchons-Punkte auf einem Kreise liegen: Kirkmannscher Brianchons-Kreis, welcher die Polare von dem Kirkmannschen Punkt ist. Ferner liegen drei Kirkmannsche und ein Steinerscher Punkt auf einem Pascalschen Kreise, folglich schneiden sich drei Kirkmannsche Brianchons-Kreise und ein Steinerscher Brianchons-Kreis in einem Brianchons-Punkte. Auch folgt aus § 18, dass es sechzig Kirkmannsche Brianchons-Kreise giebt.

§ 20. Die drei Pascalschen Kreise:

$$\begin{matrix} 12 & 34 & 56 \\ 45 & 16 & 23 \end{matrix} \ (\alpha) \qquad \begin{matrix} 45 & 16 & 23 \\ 36 & 24 & 15 \end{matrix} \ (\beta) \qquad \begin{matrix} 36 & 24 & 15 \\ 12 & 56 & 34 \end{matrix} \ (\gamma)$$

schneiden sich in einem Kirkmannschen Punkte. Auf jedem Kreise nehme man einen Pascalschen Punkt so an, dass je zwei wieder auf einem Pascalschen Kreise liegen; dadurch entsteht ein sphärisches Dreieck, dessen Eckpunkte auf den drei Kreisen des Kirkmannschen Punktes liegen:

$$A_1 = \begin{matrix} 56 \\ 23 \end{matrix} \qquad A_1B_1 = \begin{matrix} 56 & 24 & 13 \\ 23 & 16 & 45 \end{matrix} \qquad A_1 \text{ liegt auf } \alpha$$

$$B_1 = \begin{matrix} 24 \\ 16 \end{matrix} \qquad B_1C_1 = \begin{matrix} 24 & 15 & 36 \\ 16 & 34 & 25 \end{matrix} \qquad B_1 \text{ „ „ } \beta$$

$$C_1 = \begin{matrix} 15 \\ 34 \end{matrix} \qquad C_1A_1 = \begin{matrix} 15 & 23 & 46 \\ 34 & 56 & 12 \end{matrix} \qquad C_1 \text{ „ „ } \gamma.$$

Man bilde die Ergänzungen von A_1B_1, B_1C_1 und C_1A_1 und füge zur ersten Ergänzung eine Horizontalcolonne von α, zur zweiten von β zur dritten von γ hinzu, so erhält man

$$A_2B_2 = \begin{matrix} 14 & 35 & 26 \\ 23 & 16 & 45 \end{matrix}$$

$$B_2C_2 = \begin{matrix} 35 & 26 & 14 \\ 24 & 15 & 36 \end{matrix}$$

$$C_2A_2 = \begin{matrix} 14 & 26 & 35 \\ 56 & 34 & 12 \end{matrix}$$

Daher

$$\begin{matrix} A_2B_2 \\ C_2A_2 \end{matrix} \text{ d. i. } A_2 = \begin{matrix} 14 & 35 & 26 \\ 23 & 16 & 45 \\ 56 & 34 & 12 \\ 14 & 26 & 35 \end{matrix}$$

Das ist offenbar ein auf dem Kreise α liegender Kirkmannscher

Digitized by Google

Punkt. Ebenso zeigt man, dass B_2 ein auf β, C_2 ein auf γ liegender Kirkmannscher Punkt ist. Auf α liegen demnach die Punkte A_1 und A_2, auf β B_1 und B_2, auf γ C_1 und C_2; α, β und γ schnitten sich aber in einem Kirkmannschen Punkte; da nun je zwei gegenüber liegenden Spitzen der beiden sphärischen Dreiecke $\frac{A_1B_1C_1}{A_2B_2C_2}$ auf drei in einem Punkte sich schneidenden Kreisen liegen, so liegen die Schnittpunkte von jedem Paare von Gegenseiten auf einem Kreise d. i.

$$\begin{matrix} A_1B_1 & B_1C_1 & C_1A_1 \\ A_2B_2 & B_2C_2 & C_2A_2 \end{matrix}$$

oder

56	24	13	16	34	25	15	23	46
23	16	45	24	15	36	34	56	12
14	35	26	35	26	14	26	14	35

Dies sind aber drei Steinersche Punkte, welche demnach auf einem Kreise liegen, dieselbe haben eine Horizontalcolonne und je zwei eine Verticalcolonne gemeinschaftlich. Man kann noch einen vierten Steinerschen Punkt hinzufügen, der dieselbe Eigenschaft besitzt, nämlich:

14	26	35
25	13	46
36	45	12

Daraus folgt: **Vier Steinersche Punkte liegen auf einem Kreise, Steinerschen Kreise.**

Die Charakteristik des Steinerschen Kreises ist:

14	26	35	14	26	35	14	26	35	14	26	35
23	45	16	25	34	16	23	15	46	25	13	46
56	13	24	36	15	24	56	34	12	36	45	12.

§ 21. Die Zahlen 1—6 geben 15 Combinationen zu zwei; ordnet man 9 in drei Vertical- und drei Horizontal-Colonnen, so giebt es nur vier, welche mit 12 34 56 anfangen, nämlich:

12	34	56	12	34	56	12	34	56	12	34	56
35	26	14	36	25	14	45	26	13	46	25	13
46	15	23	45	16	23	36	15	24	35	16	24

Diese vier geben offenbar nur einen Steinerschen Kreis. Mit 12 beginnen drei Combinationen, nämlich:

12 34 56 12 35 46 12 36 45

Mit 1 beginnen folgende fünf Combinationen

12 34 56, 13 24 56, 14 23 56, 15 23 46, 16 23 45,

daher giebt es funfzehn Verbindungen, welche Charakteristiken des Steinerschen Kreises sind. Es giebt funfzehn Steinersche Kreise.

§ 22. Der Steinersche Punkt ist der Pol eines Steinerschen Brianchons Kreise; vier Steinersche Punkte liegen auf einem Steinerschen Kreise, folglich müssen sich vier Steinersche Brianchons Kreise in einem Punkte Steinerscher Brianchons Punkt schneiden.

In einem Steinerschen Brianchons Punkte schneiden sich vier Steinersche Brianchons Kreise; es giebt funfzehn Steinersche Brianchons Punkte.

§ 23. Man bilde aus den neun Punkten des Kirkmannschen Punkten

12	35	46
34	26	15
56	13	24
12	46	35

drei sphärische Dreiecke, so dass je zwei Ecken je eines Dreiecks auf einem Pascalschen Kreise liegen, also:

$$A_1 = \frac{35}{26}, \quad B_1 = \frac{24}{15}, \quad C_1 = \frac{13}{46}$$

$$A_2 = \frac{12}{34}, \quad B_2 = \frac{56}{34}, \quad C_2 = \frac{56}{12}$$

$$A_3 = \frac{46}{15}, \quad B_3 = \frac{13}{26}, \quad C_3 = \frac{24}{35}.$$

woraus sich ergiebt:

$$A_1B_1 = \frac{35\ 24\ 16}{26\ 15\ 34}, \quad B_1C_1 = \frac{24\ 13\ 56}{15\ 46\ 23}, \quad C_1A_1 = \frac{13\ 26\ 45}{46\ 35\ 12}$$

$$A_2B_2 = 34 \qquad B_2C_2 = 56 \qquad C_2A_2 = 12$$

$$A_3B_3 = \frac{46\ 13\ 25}{15\ 26\ 34}, \quad B_3C_3 = \frac{13\ 24\ 56}{26\ 35\ 14}, \quad C_3A_3 = \frac{24\ 15\ 36}{35\ 46\ 12}$$

Da die drei Bogen

Digitized by Google

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix}$$

sich in einem Kirkmannschen Punkte schneiden, so liegen (§ 9) die Schnittpunkte von jedem Paare von entprechenden Gegenseiten **auf** drei in einem Punkte sich schneidenden Kreisen, das ist:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}=\frac{16}{34}\qquad \frac{A_2B_2}{A_3B_3}=\frac{25}{34}\qquad \frac{A_1B_1}{A_3B_3}=\begin{matrix}35 & 24 & 16\\ 26 & 15 & 34\\ 13 & 46 & 25\end{matrix}$$

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2}=\frac{23}{56}\qquad \frac{B_2C_2}{B_3C_3}=\frac{14}{56}\qquad \frac{B_1C_1}{B_3C_3}=\begin{matrix}15 & 46 & 23\\ 24 & 13 & 56\\ 35 & 26 & 14\end{matrix}$$

$$\frac{C_1A_1}{C_2A_2}=\frac{45}{12}\qquad \frac{C_2A_2}{C_3A_3}=\frac{36}{12}\qquad \frac{C_1A_1}{C_3A_3}=\begin{matrix}26 & 13 & 45\\ 35 & 46 & 12\\ 24 & 15 & 36\end{matrix}$$

Der Schnittpunkt der beiden ersten Verticalcolonnen ist der Steinersche Punkt:

16	23	45
34	56	12
25	14	36.

Durch diesen Steinerschen Punkt geht der Kreis, welcher die **drei** Kirkmannsche Punkte enthält:

35	24	16	15	46	23	26	13	45
26	15	34	24	13	56	35	46	12
13	46	25	35	26	14	24	15	36
24	35	16	46	15	23	13	26	45.

Dieser Kreis, welcher einen Steinerschen und drei Kirkmannsche Punkte enthält, ist weder ein Pascalscher noch Steinerscher, er heisse Cayley-Salmonscher Kreis: Auf einem Cayloy-Salmonschen Kreise liegen ein Steinerscher und drei Kirkmannsche Punkte.

Die Charakteristik dieses Kreises ist:

16	23	45	35	24	16	15	46	23	26	13	45
34	56	12	26	15	34	24	13	56	35	46	12
25	14	36	13	46	25	35	26	14	24	15	36
			24	35	16	46	15	23	13	26	45.

Digitized by Google

Jeder Kirkmannsche Pnnkt hat mit dem Steinerschen eine Verticalcolonne gemeinschaftlich. Da von den 60 Kirkmannschen Punkten je drei auf einem Cayley-Salmonschen Kreise liegen, so ergiebt sich: Die Anzahl der Cayley-Salmonschen Kreise ist zwanzig.

§ 24. Da ein Steinerscher und drei Kirkmannsche Punkte auf einem Cayley-Salmonschen Kreise liegen, so müssen sich die Polaren derselben, d. i. ein Steinerscher Brianchons Kreis und drei Kirkmannsche Brianchons Kreise in einem Pnnkte, Cayley-Salmonscher Brianchons Punkt, schneiden: In einem Cayley-Salmonschen Brianchons Punkte schneiden sich ein Steinerscher Brianchons Kreis und drei Kirkmannsche Brianchons Kreise.

§ 25. Es seien folgende vier Cayley-Salmonsche Kreise gegeben:

$$\begin{array}{l} 12\ 34\ 56 \\ 45\ 16\ 23 \\ 36\ 25\ 14 \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 12\ 35\ 46 \\ 45\ 26\ 13 \\ 36\ 15\ 24 \\ 12\ 46\ 35 \end{array} = S_1 K_1, \qquad \begin{array}{l} 12\ 34\ 56 \\ 45\ 26\ 13 \\ 36\ 15\ 24 \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 12\ 35\ 46 \\ 45\ 16\ 23 \\ 36\ 25\ 14 \\ 12\ 46\ 35 \end{array} = S_2 K_2$$

$$\begin{array}{l} 12\ 35\ 46 \\ 45\ 16\ 23 \\ 36\ 24\ 15 \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 12\ 34\ 56 \\ 45\ 26\ 13 \\ 36\ 14\ 25 \\ 12\ 56\ 34 \end{array} = S_3 K_3, \qquad \begin{array}{l} 12\ 35\ 46 \\ 45\ 26\ 13 \\ 36\ 14\ 25 \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} 12\ 34\ 56 \\ 45\ 16\ 23 \\ 36\ 24\ 15 \\ 12\ 56\ 34 \end{array} = S_4 K_4$$

S bezeichnet einen Steinerschen, K einen Kirkmannschen Pnnkt.

S_1 und K_2 haben gemeinschaftlich den Pascalschen Kreis $\begin{array}{l} 45\ 16\ 23 \\ 36\ 25\ 14 \end{array}$

S_2 „ K_1 „ „ „ „ „ $\begin{array}{l} 45\ 26\ 13 \\ 36\ 15\ 24 \end{array}$

Diese beiden Kreise gehen durch den Pascalschen Pnnkt $\begin{array}{l} 45 \\ 36 \end{array}$. daher ist

$$\begin{array}{l} 45 \\ 36 \end{array} = \frac{S_1 K_2}{S_2 K_1}.$$

Ebenso:

S_3 und K_4 haben gemeinschaftlich $\begin{array}{l} 45\ 16\ 23 \\ 36\ 24\ 15 \end{array}$

S_4 „ K_4 „ „ $\begin{array}{l} 45\ 26\ 13 \\ 36\ 14\ 25 \end{array}$

Diese beiden Kreise gehen anch durch den Pnnkt $\begin{array}{l} 45 \\ 36 \end{array}$

Durch diesen Pnnkt gehen daher

$$\begin{matrix} S_1K_2 & S_3K_4 \\ S_2K_1 & S_4K_3 \end{matrix}.$$

Folglich ist

$$\frac{45}{36} = \frac{S_1K_2}{S_2K_1} = \frac{S_3K_4}{S_4K_3}$$

Ebenso lässt sich zeigen

$$\frac{12}{45} = \frac{S_1K_4}{S_4K_1} = \frac{S_2K_3}{S_3K_2}$$

$$\frac{36}{12} = \frac{S_2K_4}{S_4K_2} = \frac{S_1K_3}{S_3K_1}.$$

Ordnet man diese Ausdrücke so zusammen:

$$\begin{matrix} S_1 & K_1 & S_3 & K_3 \\ K_2 & S_2 & K_4 & S_4 \end{matrix} \text{ (I)} \qquad \begin{matrix} S_1 & K_1 & S_2 & K_2 \\ K_4 & S_4 & K_3 & S_3 \end{matrix} \text{ (II)} \qquad \begin{matrix} S_2 & K_2 & S_1 & K_1 \\ K_4 & S_4 & K_3 & S_3 \end{matrix} \text{ (III)}$$

so kann man je drei Verticalcolonnen als ein Dreieckspaar nehmen, bei welchen die Verbindungsbogen der Spitzen sich in einem Punkte schneiden, daher die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten auf einem Hauptkreise liegen.

Aus den obigen Verbindungen ergiebt sich leicht:

$$\frac{12}{36} = \frac{S_3K_1}{S_1K_3} = \frac{S_3K_1}{S_2K_4} = \frac{S_3K_1}{S_4K_2} = \frac{S_1K_3}{S_2K_4} = \frac{S_1K_3}{S_4K_2} = \frac{S_2K_4}{S_4K_2}$$

$$\frac{45}{36} = \frac{S_1K_2}{S_2K_1} = \frac{S_1K_2}{S_3K_4} = \frac{S_1K_2}{S_4K_3} = \frac{S_2K_1}{S_3K_4} = \frac{S_2K_1}{S_4K_3} = \frac{S_3K_4}{S_4K_3}$$

$$\frac{12}{45} = \frac{S_1K_4}{S_4K_1} = \frac{S_1K_4}{S_2K_3} = \frac{S_1K_4}{S_3K_2} = \frac{S_4K_1}{S_2K_3} = \frac{S_4K_1}{S_3K_2} = \frac{S_2K_3}{S_3K_2}$$

Aus den einzelnen Dreiecken von (I), (II) und (III) ergiebt sich:

Auf ein. Kreise lieg. die Punkte $\begin{matrix} 12 & S_1K_1 & S_2K_2 & S_3K_3 & S_4K_4 & S_1S_3 & S_2S_4 \\ 36' & S_2K_2' & S_3K_3' & S_4K_4' & S_1K_1' & K_2K_4' & K_1K_3 \end{matrix}$

„ „ „ „ „ „ $\begin{matrix} 45 & S_1K_1 & S_3K_3 & S_2K_2 & S_4K_4 & S_1S_2 & S_3S_4 \\ 36' & S_3K_3' & S_2K_2' & S_4K_4' & S_1K_1' & K_3K_4' & K_1K_2 \end{matrix}$

„ „ „ „ „ „ $\begin{matrix} 45 & S_1K_1 & S_2K_2 & S_4K_4 & S_3K_3 & S_2S_3 & S_1S_4 \\ 12 & S_2K_2' & S_4K_4' & S_3K_3' & S_1K_1' & K_1K_4' & K_2K_3 \end{matrix}$

Dies ist nur möglich wenn die Bogen

$$S_1K_1, \quad S_2K_2, \quad S_3K_3 \text{ und } S_4K_4$$

sich in einem Punkte schneiden.

Dies sind aber vier Cayley-Salmonsche Kreise, woraus folgt:

Digitized by Google

Vier Cayley-Salmonsche Kreise schneiden sich in einem Punkte, dem Cayley-Salmonschen Punkte; solcher Punkte giebt es funfzehn.

Das letztere findet man, wenn man die Betrachtung von § 21 auf die Verticalcolonnen anwendet.

§ 26. Da der Cayley-Salmonsche Brianchons Punkt der Pol eines Cayley-Salmonschen Kreises ist, so ergiebt sich nach § 25.:

Vier Cayley-Salmonsche Brianchons Punkte liegen auf einem Cayley-Salmonschen Brianchons Kreise, wovon es funfzehn giebt.

§. 27. Aus § 25. ergiebt sich aber auch noch, dass die Punkte:

12	S_1S_3	S_2S_4
36'	K_2K_4'	K_1K_3
45	S_1S_2	S_3S_4
36	K_3K_4	K_1K_2'
45	S_2S_3	S_1S_4
12'	K_1K_4	K_1K_3

auf drei Kreisen liegen, die sich in dem Cayley-Salmonschen Punkte schneiden; die Verbindungen von S geben Steinersche Kreise, denn S_1S_2 u. s. w. haben eine Vertical- und eine Horizontalcolonne gemeinschaftlich; dagegen haben K_1K_2 u. s. w. nur dieselbe Verticalcolonne vollständig, daher liegen sie nicht auf einem Pascalschen Kreise.

Durch einen Cayley-Salmonschen Punkt gehen drei Kreise mit den Charakteristiken:

S_1S_2	S_3S_4	S_1S_3	S_2S_4	S_1S_4	S_2S_3
K_3K_4	K_1K_2	K_2K_4	K_1K_3	K_2K_3	K_1K_4

§ 28. In § 14 ist nachgewiesen worden, dass es, ohne Rücksicht auf die Ergänzungen sechszig Pascalsche Sechsecke, daher auch eben so viel Brianchons Sechsseite giebt. Berücksicht man aber die Ergänzungen, so ergiebt sich: Es giebt Sechseke, 123456 als Grundform angenommen:

mit keiner Ergänzung:	1
„ einer „	1 . . 12
„ zwei Ergänzungen:	3 . . 12, 23
	12, 34
	12, 45

„ drei Ergänzungen	3 . .	12, 23, 34
		12, 23, 45
		12 34 56
„ vier „	3 . .	12 23 34 45
		12 23 34 56
		12 23 45 56
„ fünf „	1 . .	12, 23, 34, 45, 56
„ sechs Ergänzungen:	1 . .	12, 23, 34, 45, 56, 61.

Daher ist mit Berücksichtigung der Ergänzungen die Anzahl der Pascalschen Sechsecke $60 \times 13 = 780$; eben so gross ist die Anzahl der Brianchons Sechsseite.

Digitized by Google

V.

Geometrische Deutung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der Flächentheorie.

Von

R. Hoppe.

Eine Fläche sei in beliebigen Parametern u, v bestimmt. Von einem beliebigen Punkte derselben P gehen die Parameterlinien (u) und (v) und eine Linie s aus. Auf diesen drei Linien nehmen wir die entsprechenden consecutiven Punkte P_u, P_v, P_s so, dass der letzte bei gleichzeitiger Variation von u und v um dieselben Incremente ∂u, ∂v entsteht, welche die beiden ersten bestimmen. Entwickelt man die Coordinaten der 3 Punkte bis auf zweite Ordnung, so kommt:

$$x_u = x + \frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{2}$$

$$x_v = x + \frac{\partial x}{\partial v}\partial v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial v^2}{2}$$

$$x_s = x + \frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \frac{\partial x}{\partial v}\partial v + \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\partial u \partial v + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial v^2}{2} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 u}{2} + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 v}{2}$$

wo $\partial^2 u$, $\partial^2 v$ im Sinne einer Variation längs s zu verstehen sind, hier jedoch nicht näher bestimmt zu werden brauchen, weil die 2 letzten Terme auf das Resultat keinen Einfluss haben.

Die partiellen Differentialquotienten 2. Ordnung kann man nun in der Form

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = A\frac{\partial x}{\partial u} + A_1\frac{\partial x}{\partial v} + Ep$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = B\frac{\partial x}{\partial u} + B_1\frac{\partial x}{\partial v} + Fp$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = C\frac{\partial x}{\partial u} + C_1\frac{\partial x}{\partial v} + Gp$$

auf solche 1. Ordnung reduciren, wo p, q, r die Richtungscosinus der Normale, und E, F, G die Fundamentalgrössen 2. Ordnung (s. Arch. LIX. S. 230. §. 5.) bezeichnen. Dann wird

$$\left.\begin{aligned} x_u &= K\frac{\partial x}{\partial u} + K_1\frac{\partial x}{\partial v} + K_2 p + x \\ x_v &= L\frac{\partial x}{\partial u} + L_1\frac{\partial x}{\partial v} + L_2 p + x \\ x_s &= M\frac{\partial x}{\partial u} + M_1\frac{\partial x}{\partial v} + M_2 p + x \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

und die Coefficienten haben die Werte:

$$K = \partial u + \tfrac{1}{2}A\,\partial u^2; \quad K_1 = \tfrac{1}{2}A_1\,\partial u^2; \quad K_2 = \tfrac{1}{2}E\,\partial u^2$$
$$L = \tfrac{1}{2}C\partial v^2; \quad L_1 = \partial v + \tfrac{1}{2}C_1\,\partial v^2; \quad L_2 = \tfrac{1}{2}G\,\partial v^2$$
$$M = \partial u + \tfrac{1}{2}A\,\partial u^2 + B\,\partial u\,\partial v + \tfrac{1}{2}C\partial v^2 + \tfrac{1}{2}\partial^2 u$$
$$M_1 = \partial v + \tfrac{1}{2}A_1\,\partial u^2 + B_1\,\partial u\,\partial v + \tfrac{1}{2}C_1\,\partial v^2 + \tfrac{1}{2}\partial^2 v$$
$$M_2 = \tfrac{1}{2}E\,\partial u^2 + F\partial u\,\partial v + \tfrac{1}{2}G\,\partial v^2$$

Bezeichnen ferner Δ, Δ_u, Δ_v die Dreiecke PP_uP_v, PP_uP_s, PP_vP_s, und $(p)(q)(r)$, $p_u q_u r_u$, $p_v q_v r_v$ die Richtungscosinus ihrer Ebenen oder Normalen, so ist

$$2\Delta(p) = \begin{vmatrix} y_u - y & y_v - y \\ z_u - z & z_v - z \end{vmatrix}$$

$$2\Delta_u p_u = \begin{vmatrix} y_s - y_u & y_u - y \\ z_s - z_u & z_u - z \end{vmatrix}$$

$$2\Delta_v p_v = \begin{vmatrix} y_s - y_v & y_v - y \\ z_s - z_v & z_v - y \end{vmatrix}$$

und nach Einführung der Werte (1) erhält man:

$$2\Delta(p) = \begin{vmatrix} K\frac{\partial y}{\partial u} + K_1\frac{\partial y}{\partial v} + K_2 q & L\frac{\partial y}{\partial u} + L_1\frac{\partial y}{\partial v} + L_2 q \\ K\frac{\partial z}{\partial u} + K_1\frac{\partial z}{\partial v} + K_2 r & L\frac{\partial z}{\partial u} + L_1\frac{\partial z}{\partial v} + L_2 r \end{vmatrix}$$

$$2\Delta_u p_u = \begin{vmatrix} (M-K)\frac{\partial y}{\partial u} + (M_1-K_1)\frac{\partial y}{\partial v} + (M_2-K_2)q & K\frac{\partial y}{\partial u} + K_1\frac{\partial y}{\partial v} + K_2 q \\ (M-K)\frac{\partial z}{\partial u} + (M_1-K_1)\frac{\partial z}{\partial v} + (M_2-K_2)r & K\frac{\partial z}{\partial u} + K_1\frac{\partial z}{\partial v} + K_2 r \end{vmatrix}$$

$$2\Delta_v p_v = \begin{vmatrix} (M-L)\frac{\partial y}{\partial u} + (M_1-L_1)\frac{\partial y}{\partial v} + (M_2-L_2)q & L\frac{\partial y}{\partial u} + L_1\frac{\partial y}{\partial v} + L_2 q \\ (M-L)\frac{\partial z}{\partial u} + (M_1-L_1)\frac{\partial z}{\partial v} + (M_2-L_2)r & L\frac{\partial z}{\partial u} + L_1\frac{\partial z}{\partial v} + L_2 r \end{vmatrix}$$

oder nach Zerlegung der Determinanten

$$2\Delta(p) = \begin{vmatrix} K & L \\ K_1 & L_1 \end{vmatrix} tp + \begin{vmatrix} K & L \\ K_2 & L_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} q \\ \frac{\partial z}{\partial u} r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_1 & L_1 \\ K_2 & L_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} q \\ \frac{\partial z}{\partial u} r \end{vmatrix}$$

$$2\Delta_u p_u = \begin{vmatrix} M-K & K \\ M_1-K_1 & K_1 \end{vmatrix} tp + \begin{vmatrix} M-K & K \\ M_2-K_2 & K_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} q \\ \frac{\partial z}{\partial u} r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_1-K_1 & K_1 \\ M_2-K_2 & K_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} q \\ \frac{\partial z}{\partial v} r \end{vmatrix}$$

$$2\Delta_v p_v = \begin{vmatrix} M-L & L \\ M_1-L_1 & L_1 \end{vmatrix} tp + \begin{vmatrix} M-L & L \\ M_2-L_2 & L_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} q \\ \frac{\partial z}{\partial u} r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_1-L_1 & L_1 \\ M_2-L_2 & L_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} a \\ \frac{\partial z}{\partial u} r \end{vmatrix}$$

wo $t\partial u\partial v$ das Flächenelement ausdrückt. Da die Entwickelung nur auf 2 successive Ordnungen gültig ist, so können die Terme 4. Ordnung wegfallen, das sind die Producte von je 2 der Grössen K_1, K_2, L, L_2, M_2, $M-K$ und M_1-L_1, und man erhält:

$$2\Delta(p) = KL_1 tp + KL_2\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} q \\ \frac{\partial z}{\partial u} r \end{vmatrix} - L_1 K_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} q \\ \frac{\partial z}{\partial v} r \end{vmatrix}$$

$$2\Delta_u p_u = K(K_1-M_1)tp + K(K_2-M_2)\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} q \\ \frac{\partial z}{\partial u} r \end{vmatrix} + (M_1-K_1)K_2\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} q \\ \frac{\partial z}{\partial v} r \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

$$2\Delta_v p_v = (M-L)L_1 tp + (M-L)L_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & q \\ \frac{\partial z}{\partial u} & r \end{vmatrix} - L_1(M_2-L_2) \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & q \\ \frac{\partial z}{\partial v} & r \end{vmatrix}$$

Nimmt man die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der je 3 Analogen und beachtet, dass nur der erste Term in allen 3 Ausdrücken zweite Ordnung enthält, und dass die Producte des ersten und zweiten, sowie des ersten und dritten bei jener Addition eine Summe null geben, so findet man:

$$2\Delta = KL_1 t = \left(1 + \frac{A\partial u + C_1 \partial v}{2}\right) t \partial u \partial v$$

$$2\Delta_u = K(K_1 - M_1)t = -(\partial u \partial v + \left(\frac{A}{2} + B_1\right)\partial u^2 \partial v + \frac{C_1}{2}\partial u \partial v^2 + \tfrac{1}{2}\partial u \partial^2 v)t$$

$$2\Delta_v = (M-L)L_1 t = (\partial u \partial v + \frac{A}{2}\partial u^2 \partial v + \left(B + \frac{C_1}{2}\right)\partial u \partial v^2 + \tfrac{1}{2}\partial v \partial^2 u)t$$

woraus nach Division der vorigen Gleichungen:

$$(p) = p + \frac{L_2}{L_1 t} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & q \\ \frac{\partial z}{\partial u} & r \end{vmatrix} - \frac{K_2}{Kt} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & q \\ \frac{\partial z}{\partial v} & r \end{vmatrix}$$

$$p_u = p + \frac{M_2 - K_2}{M_1 t} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & q \\ \frac{\partial z}{\partial u} & r \end{vmatrix} - \frac{K_2}{Kt} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & q \\ \frac{\partial z}{\partial v} & r \end{vmatrix}$$

$$p_v = p + \frac{L_2}{L_1 t} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & q \\ \frac{\partial z}{\partial u} & r \end{vmatrix} - \frac{M_2 - L_2}{Mt} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & q \\ \frac{\partial z}{\partial v} & r \end{vmatrix}$$

das ist

$$(p) = p + \frac{G\partial v}{2t} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & q \\ \frac{\partial z}{\partial u} & r \end{vmatrix} - \frac{E\partial u}{2t} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & q \\ \frac{\partial z}{\partial v} & r \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

$$p_u = p + \frac{F\partial u + \frac{1}{2}G\partial v}{t}\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & q\\ \frac{\partial z}{\partial u} & r\end{vmatrix} - \frac{E\partial u}{2t}\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial v} & q\\ \frac{\partial z}{\partial v} & r\end{vmatrix}$$

$$p_v = p + \frac{G\partial v}{2t}\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & q\\ \frac{\partial z}{\partial u} & r\end{vmatrix} - \frac{\frac{1}{2}E\partial u + F\partial v}{t}\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial v} & q\\ \frac{\partial z}{\partial v} & r\end{vmatrix}$$

Die consecutiven Punkte auf den Parameterlinien nach negativer Seite hin, entsprechend den Incrementen $-\partial u$, $-\partial v$, seien P_u', P_v'. Diese bilden mit P und bzhw. mit P_v, P_u zwei neue Dreiecke

$$PP_vP_u', \quad PP_uP_v'$$

Die Richtungscosinus ihrer Normalen seien

$$(p_v)(q_v)(r_v), \quad (p_u)(q_u)(r_u)$$

und die Flächenwinkel, welche ihre Ebenen mit der des Dreiecks $\varDelta$ bilden,

$$\delta_v, \quad \delta_u$$

der Flächenwinkel zwischen den Ebenen der Dreiecke $\varDelta_u$ und $\varDelta_v$ bezeichnet durch δ. Dann findet man, durch Vorzeichenwechsel der ∂u, ∂v die (p_v), (p_u), und nach Subtraction:

$$(p)-(p_v) = -\frac{E\partial u}{t}\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial v} & q\\ \frac{\partial z}{\partial v} & r\end{vmatrix}$$

$$(p)-(p_u) = \frac{G\partial u}{t}\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & q\\ \frac{\partial z}{\partial u} & r\end{vmatrix}$$

$$p_u - p_v = \frac{F}{t}\left(\partial u\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & q\\ \frac{\partial z}{\partial u} & r\end{vmatrix} + \partial v\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial v} & q\\ \frac{\partial z}{\partial v} & r\end{vmatrix}\right) = \frac{F}{t}\begin{vmatrix}\partial y & q\\ \partial z & r\end{vmatrix}$$

Nun ist

$$2\sin\frac{\delta_v}{2} = \sqrt{\{(p)-(p_v)\}^2+\{(q)-(q_v)\}^2+\{(r)-(r_v)\}^2}$$

$$2\sin\frac{\delta_u}{2} = \sqrt{\{(p)-(p_u)\}^2+\{(q)-(q_u)\}^2+\{(r)-(r_u)\}^2}$$

$$2\sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{(p_u-p_v)^2+(q_u-q_v)^2+(r_u-r_v)^2}$$

Nach Einsetzung der Werte findet man:

$$\delta_v = E\frac{\sqrt{g}\,\partial u}{t}; \quad \delta_v = G\frac{\sqrt{e}\,\partial v}{t}$$

$$\delta = F\frac{\partial s}{t}$$

In Arch. LIX. S. 227. §. 1. ist die geometrische Deutung der Fundamentalgrössen 1. Ordnung e, f, g gegeben, nach welcher $\sqrt{e}\,\partial u$ und $\sqrt{g}\,\partial v$ die Parameterlinienelemente ausdrücken. Die letzten Gleichungen enthalten die Deutung der Fundamentalgrössen 2. Ordnung, die sich in folgender Form am übersichtlichsten darstellt:

$$E = \frac{\delta_v}{\sqrt{g}\,\partial v}\,\frac{t\,\partial u\,\partial v}{\partial u^2}; \quad G = \frac{\delta_u}{\sqrt{e}\,\partial u}\,\frac{t\,\partial u\,\partial v}{\partial v^2}$$

$$F = \frac{\delta}{\partial s}\,\frac{t\,\partial u\,\partial v}{\partial u\,\partial v}$$

Die Kanten der 3 Flächenwinkel sind die Sehnen der 3 Linienelemente der Curven (v), (u) und s; jeder der Winkel ist durch das zugehörige Linienelement zu dividiren, alle dann mit dem Flächenelement zu multipliciren, dann die einzelnen bzhw. mit ∂u^2, ∂v^2, $\partial u\,\partial v$ zu dividiren, endlich der Grenzwert zu nehmen. Die winkelbildenden Ebenen sind stets durch die 2 consecutiven Punkte der Parameterlinie zu beiden Seiten der Winkelkante zu legen.

Digitized by Google

VI.

Zur Theorie der Symmetriepunkte erster Ordnung.

Von

Emil Hain.

I.

Es seien x_a die Punktcoordinaten eines Punktes P in der Ebene des Fundamentaldreiecks ABC. Ist nun

$$x_a = \varphi a + \psi b + \psi c$$

wo φ und ψ constant oder auch symmetrische Functionen der Seiten abc sind und ist ausserdem:

$$x_b = \varphi b + \psi c + \psi a$$
$$x_c = \varphi c + \psi a + \psi b$$

so heisst P ein Symmetriepunkt erster Ordnung. Ist ψ nicht gleich Null, so können die Coordinaten x_a durch ψ dividirt werden und es ist dann $\varphi:\psi$ ebenfalls constant oder symmetrisch. Die Form eines Symmetriepunktes erster Ordnung ist also $\varphi a + b + c$. So erhält man für $\varphi = +1$ das Inkreiscentrum, für $\varphi = 0$ den Punkt $b + c$. Will man den Punkt a d. i. den Grebe'schen Punkt auch mit einbeziehen, so ist in diesem Falle $\varphi = \pm\infty$. Die Construction des Punktes $\varphi a + b + c$ ist, wenn φ eine numerische Constante bezeichnet, folgende:

Man zieht die Höhen des Dreiecks. Die Höhe von A auf BC wird über ihren Schnittpunkt H_a um $H_a A_1 = \varphi a + b + c$ verlängert. Man zieht durch A_1 Parallele zu BC. Sie bilden ein dem Urdreieck ähnliches Dreieck $A_2 B_2 C_2$. Die Geraden AA_2 treffen sich im Symmetriepunkt $\varphi a + b + c$.

II.

Φ und Ψ seien die Punkte $\varphi a+b+c$ und $\psi a+b+c$. Ihre Mitte ist der Punkt:

$$\frac{\varphi a+b+c}{\Sigma a(\varphi a+b+c)}+\frac{\psi a+b+c}{\Sigma a(\psi a+b+c)}$$

$$\equiv(\varphi a+b+c)(\psi\Sigma a^2+2\Sigma bc)+(\psi a+b+c)(\varphi\Sigma a^2+2\Sigma bc)$$

$$\equiv a\left[\frac{2\varphi\psi\Sigma a^2+2(\varphi+\psi)\Sigma bc}{4\Sigma bc+(\varphi+\psi)\Sigma a^2}\right]+b+c$$

Die Mitte der Punkte φ und ψ ist also der Punkt:

$$\frac{2\varphi\psi\Sigma a^2+2(\varphi+\psi)\Sigma bc}{4\Sigma bc+(\varphi+\psi)\Sigma a^2}$$

Die Mitte der Punkte $+\varphi$ und $-\varphi$ ist der Punkt: $\varphi\psi\Sigma a^2:2\Sigma bc$. Damit ein Punkt χ die Mitte zweier Punkte φ, ψ sei: ist notwendig, dass

$$\chi=\frac{2\varphi\psi\Sigma a^2+2(\varphi+\psi)\Sigma bc}{4\Sigma bc+(\varphi+\varphi)\Sigma a^2}$$

woraus:

$$\frac{\chi\varphi+\chi\psi-2\varphi\psi}{\varphi+\psi-2\chi}=\frac{2\Sigma bc}{\Sigma a^2}$$

III.

Ist $P\equiv p_a$ ein Symmetriepunkt des Dreiecks ABC und $P'\equiv p_a'$ derselbe Symmetriepunkt für das Mittendreieck, so ist:

$$p_a'=\frac{h_a-p_a}{2}$$

wo

$$h_a=\frac{2\triangle ABC}{a}=\frac{2F}{a}$$

(Archiv LVIII 164).

Für $P\equiv\varphi a+b+c$ hat man:

$$p_a=2F.\frac{\varphi a+b+c}{\varphi\Sigma a^2+2\Sigma bc}$$

$$P'\equiv\frac{1}{a}-\frac{\varphi a+b+c}{\varphi\Sigma a^2+2\Sigma bc}\equiv bc[\varphi(b^2+c^2)+bc+\Sigma bc]$$

Die Symmetriepnnkte erster Ordnung des Mittendreiecks sind Symmetriepunkte vierter Ordnung des Urdreiecks.

Google

Die Punkte $\varphi a + b + c$ liegen auf der Geraden $b - c$. Sonach liegen auch die Punkte P' auf einer Geraden. Für $\varphi = +1$ erhält man $P' \equiv bc(b+c)$. Dem Inkreiscentrum entspricht der Spiekersche Punkt. Für $\varphi = 0$ wird $P' \equiv bc(bc + \Sigma bc)$. Die Gerade $b - c$ des Mittendreiecks ist also die Verbindungsgerade der Punkte: $bc(b+c)$, $bc(bc + \Sigma bc)$; sie ist die Symmetriegerade:

$$\begin{vmatrix} ca(c+a) & ca(ca+\Sigma bc) \\ ab(a+b) & ab(ab+\Sigma bc) \end{vmatrix} \equiv a \left\{ \begin{vmatrix} c+a & \Sigma bc \\ a+b & \Sigma bc \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c+a & ca \\ a+b & ab \end{vmatrix} \right\}$$

$$\equiv a(b-c)(\Sigma bc - a^2)$$

Den Abstand d eines Punktes p_a von der Geraden $\Sigma a_1 x_a = 0$ gibt die Formel:

$$d = \frac{\Sigma a_1 p_a}{\sqrt{\Sigma a_1^2 - 2\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha}}$$

wo $\alpha = CAB$.

Für den Abstand des Punktes $bc(b+c)$ von der Geraden $b - c$ hat man also:

$$a_1 = b - c, \quad p_a = 2F.\frac{bc(b+c)}{2abc\Sigma a}$$

$$\Sigma a_1 p_a = \frac{F}{abc\Sigma a}\Sigma a^2(b-c)$$

$$\Sigma a_1^2 = 2\Sigma a^2 - 2\Sigma bc$$

$$-2\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha = \frac{\Sigma a(a-b)(a-c)(b^2+c^2-a^2)}{abc}$$

Die Gerade $a(b-c)(\Sigma bc - a^2)$ ist parallel der $b - c$, also gibt d ihren Abstand.

Der Abstand der Geraden aller Symmetriepunkte erster Ordnung eines Dreiecks von derselben Geraden des Mittendreiecks ist gegeben durch die Formel:

$$d = \frac{F}{\Sigma a}\,\frac{\Sigma a^3(b-c)}{\sqrt{abc\,[3abc\,\Sigma a^2 - 4abc\,\Sigma bc + \Sigma a^4(b+c) - \Sigma a^5]}}$$

Die Verbindungsgerade der Punkte P, P' ist die Gerade:

$$\begin{vmatrix} \varphi b + c + a & ca[\varphi(c^2+a^2) + ca + \Sigma bc] \\ \varphi c + a + b & ab[\varphi(a^2+b^2) + ab + \Sigma bc] \end{vmatrix} = \varphi^2 \begin{vmatrix} b & ca(c^2+a^2) \\ c & ab(a^2+b^2) \end{vmatrix}$$

$$+\varphi \left\{ \begin{vmatrix} b & ca(ca+\Sigma bc) \\ c & ab(ab+\Sigma bc) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c+a & ca(c^2+a^2) \\ a+b & ab(a^2+b^2) \end{vmatrix} \right\} + \begin{vmatrix} c+a & ca(ca+\Sigma bc) \\ a+b & ab(ab+\Sigma bc) \end{vmatrix}$$

$$= \varphi^2 A_2 + \varphi A_1 + A_0$$

wo A_2, A_1, A_0 nach b und c symmetrische Funktionen bezeichnen, die für ungleichseitige Dreiecke nicht Null werden. Es gilt also der Satz:

Die Einhüllende der Verbindungsgeraden der Symmetriepunkte erster Ordnung eines Dreiecks mit den entsprechenden Punkten des Mittendreiecks ist ein Kegelschnitt.

IV.

Gibt es einen Symmetriepunkt erster Ordnung, dessen Umkreispolare parallel seiner Harmonikalen ist?

Die Harmonikale eines Punktes x_a und seine Umkreispolare sind bezüglich die Geraden $x_b x_c$, $bx_c + cx_b$. Für $x_a = \varphi a + b + c$ ist:

$$x_b x_c = (\varphi b + c + a)(\varphi c + a + b) = \beta\gamma$$

$$bx_c + cx_b = b(\varphi c + a + b) + c(\varphi b + c + a) = b\gamma + c\beta$$

wenn während der Rechnung $\varphi a + b + c = \alpha$ gesetzt wird.

Die Bedingung des Parallelismus zweier Geraden a_1, a_2 ist:

$$\Sigma a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Sonach haben wir zu setzen:

$$\Sigma a \begin{vmatrix} \gamma\alpha & \alpha\beta \\ c\alpha + a\gamma & a\beta + b\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$= \Sigma \alpha \begin{vmatrix} a\gamma & a\beta \\ c\alpha + a\gamma & a\beta + b\alpha \end{vmatrix} = \Sigma \alpha \begin{vmatrix} a\gamma & a\beta \\ c\alpha & b\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma a\alpha^2(b\gamma - c\beta) = 0$$

Nun ist:

$$b\gamma - c\beta = (b - c)(a + b + c)$$

$$\alpha^2 = \varphi^2 a^2 + 2\varphi a(b + c) + (b + c)^2$$

$$\Sigma a\alpha^2(b - c) = \varphi^2 \Sigma a^3(b - c) + 2\varphi \Sigma a^2(b^2 - c^2) + \Sigma a(b^2 - c^2)(b + c)$$

Somit ist:

$$\varphi^2 \Sigma a^3(b - c) + \Sigma a^3(c - b) = 0$$

$$\varphi = \pm 1$$

Es entsprechen also nur das Inkreiscentrum und der Punkt $b + c - a$ der angegebenen Bedingung.

V.

Die Entferuung d zweier Punkte p_a, q_a ist durch folgende Formel gegeben:

$$d^2 = -\frac{abc}{4F^2}\,\Sigma a(p_b - q_b)(p_c - q_c)$$

Bezeichnet I das Inkreiscentrum, so ist für $\Phi \equiv p_a$, $I \equiv q_a$:

$$p_a = 2F.\frac{\varphi a + b + c}{\varphi \Sigma a^2 + 2\Sigma bc}, \quad q_a = \frac{2F}{a+b+c}$$

$$p_b - q_b = 2F\left[\frac{\varphi b + c + a}{\varphi \Sigma a^2 + 2\Sigma bc} - \frac{1}{\Sigma a}\right]$$

$$= \frac{2F}{(\varphi \Sigma a^2 + 2\Sigma bc).\Sigma a}\left[\varphi(b\Sigma a - \Sigma a^2) + (a+c)\Sigma a - 2\Sigma bc\right]$$

Nun ist:

$$\Sigma a.\Sigma a = \Sigma a^2 + 2\Sigma bc$$

$$(a+b+c)\Sigma a - \Sigma a^2 = 2\Sigma bc$$

$$b\Sigma a - \Sigma a^2 = -(a+c)\Sigma a + 2\Sigma bc$$

Hieraus folgt:

$$p_b - q_b = \frac{2F}{(\varphi \Sigma a^2 + 2\Sigma bc).\Sigma a}\cdot(\varphi - 1)(ba + bc - a^2 - c^2)$$

Wir können also setzen:

$$d = \frac{\varphi - 1}{\varphi + \varepsilon}\,\vartheta$$

wo ε und ϑ symmetrische Funktionen der a sind und kein φ enthalten. Demgemäss ist:

$$\Phi I = \frac{\varphi - 1}{\varphi + \varepsilon}\,\vartheta, \quad \Psi I = \frac{\psi - 1}{\psi + \varepsilon}\,\vartheta$$

$$\Phi I : \Psi I = \frac{\varphi - 1}{\varphi + \varepsilon} : \frac{\psi - 1}{\psi + \varepsilon}$$

$$(\varphi - 1)(\psi + \varepsilon)\,\Psi I = (\psi - 1)(\varphi + \varepsilon)\,\Phi I$$

$$\varphi(\psi - 1)\,\Phi I - \psi(\varphi - 1)\,\Psi I = \varepsilon\left[(\varphi - 1)\,\Psi I - (\psi - 1)\,\Phi I\right]$$

Dies führt zur folgenden Relation:

$$\frac{\varphi(\psi - 1)\,\Phi I - \psi(\varphi - 1)\,\Psi I}{(\psi - 1)\,\Phi I - (\varphi - 1)\,\Psi I} = \text{const.}$$

Wird die Distanzformel auf die Punkte $+\varphi$ und $-\varphi$ angewendet, so erhalten wir:

$$p_a = 2F.\frac{\varphi a+b+c}{\varphi\Sigma a^2+2\Sigma bc},\quad q_a = 2F.\frac{-\varphi a+b+c}{-\varphi\Sigma a^2+2\Sigma bc}$$

$$p_b - q_b = \frac{4F\varphi[2b\Sigma bc-(c+a)\Sigma a^2]}{(\varphi\Sigma a^2+2\Sigma bc)(-\varphi\Sigma a^2+2\Sigma bc)}$$

Bezeichnen wir mit d_φ die Distanz der Punkte $+\varphi$, $-\varphi$; so können wir setzen:

$$d_\varphi = \frac{\varphi}{\varphi^2-\varepsilon}\cdot\vartheta$$

wo ε und ϑ symmetrische, von φ freie Functionen der Seiten a sind.

Sonach ist:

$$d_\varphi : d_\psi = \frac{\varphi}{\varphi^2-\varepsilon} : \frac{\psi}{\psi^2-\varepsilon}$$

$$\psi(\varphi^2-\varepsilon)\,d_\varphi = \varphi(\psi^2-\varepsilon)\,d_\psi$$

$$\varphi\psi(\varphi d_\varphi-\psi d_\psi) = \varepsilon(\psi d_\varphi-\varphi d_\psi)$$

$$\varphi\psi.\frac{\varphi d_\varphi-\psi d_\psi}{\psi d_\varphi-\varphi d_\psi} = \text{const.}$$

VI.

Die Harmonikale des Punktes $\varphi a+b+c$ ist die Gerade:

$$(\varphi b+c+a)(\varphi c+a+b) = \varphi^2 bc+\varphi(b^2+c^2+ab+ac)+(a+b)(a+c)$$

Ihre Gleichung ist also:

$$\varphi^2\Sigma bcx_a+\varphi\Sigma(b^2+c^2+ab+ac)x_a+\Sigma(a+b)(a+c)x_a = 0$$

Hieraus folgt durch Differentiirung:

$$2\varphi\Sigma bcx_a+\Sigma(b^2+c^2+ab+ac)x_a = 0$$

$$\varphi = -\frac{\Sigma(b^2+c^2+ab+ac)x_a}{2\Sigma bcx_a}$$

Die Einführung dieses Wertes gibt die Gleichung der Einhüllenden:

$$\begin{vmatrix} 2\Sigma bcx_a & \Sigma(b^2+c^2+ab+ac)x_a \\ \Sigma(b^2+c^2+ab+ac)x_a & 2\Sigma(a+b)(a+c)x_a \end{vmatrix} = 0$$

Aus der Form dieser Gleichung ergibt sich die Einhüllende als ein Kegelschnitt, dessen Tangenten die Geraden bc, $(a+b)(a+c)$ d. i. die Harmonikalen des Grebe'schen Punktes und des Punktes $b+c$ sind. Will man bestimmen, in welchen Punkten dieser Kegelschnitt mit der Geraden $b^2+c^2+ab+ac$ d. i. mit der Umkreispolaren des Punktes $b+c$ sich schneidet, so erhält man:

$$\Sigma bcx_a \,.\, \Sigma(a+b)(a+c)x_a = 0$$

Die Schnittpunkte x_a gehören also dem System der Geraden bc und $(a+b)(a+c)$ an. Ihr Schnittpunkt kann nicht ein Punkt der Curve sein, weil bc und $(a+b)(a+c)$ ihre Tangenten sind. Es können also nur die Berührungspunkte dieser Tangenten jene Punkte sein, in welchen der Kegelschnitt die Gerade $b^2+c^2+ab+ac$ trifft. Diese Gerade ist also die Polare des Schnittpunktes der Geraden bc und $(a+b)(a+c)$. Nun ist aber:

$$\Sigma a \begin{vmatrix} ca & ab \\ (b+c)(b+a) & (c+a)(c+b) \end{vmatrix} = (a+b+c)\,\Sigma a^2(b^2-c^2) = 0$$

Die Geraden bc und $(a+b)(a+c)$ sind also einander parallel. Die Polare $b^2+c^2+ab+ac$ ist ein Durchmesser. Die Einhüllende ist ein Centralkegelschnitt.

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes ist:

$$\Sigma g_{aa}x_a^2 + 2\Sigma g_{bc}x_bx_c = 0$$

Hier ist:

$$g_{aa} = 2abc\Sigma a + 2b^2c^2 - a^2(b^2+c^2) - b^4 - c^4 - 2a(b^3+c^3)$$

$$g_{bc} = a(b^3+c^3) + abc\Sigma a$$
$$+ a^2(b^2+c^2) - a^4 - 2b^2c^2 - a^3(b+c) - bc(b^2+c^2)$$

woraus:

$$\Sigma g_{aa} = 2\Sigma g_{cb}$$

Wien, Mai 1876.

VII.

Beziehungen zwischen Dreieck und Kreis.

Von

Emil Hain.

I.

Der Mittelpunkt eines Kreises sei gegeben durch die Coordinaten $\alpha\beta\gamma$ in Bezug auf das Fundamentaldreieck ABC; der Radius dieses Kreises sei δ. Es ist die Gleichung desselben in trimetrischen Punktcoordinaten zu bilden.

Die Entfernung d zweier Punkte p_a, q_a ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$d^2 = \frac{-abc\,\Sigma a\,(p_b\,\Sigma aq_a - q_b\,\Sigma ap_a)\,(p_c\,\Sigma aq_a - q_c\,\Sigma ap_a)}{(\Sigma ap_a\,.\,\Sigma aq_a)^2}$$

Für $q_a = \alpha$, $p_a = x_a$, $d = \delta$ erhalten wir:

$$\delta^2\,(\Sigma a\alpha)^2\,.\,(\Sigma ax_a)^2 =$$
$$-abc\left[(\Sigma a\alpha)^2\,.\,\Sigma ax_bx_c - \Sigma a\alpha\,\Sigma ax_a\,.\,\Sigma a\,(\beta x_c + \gamma x_b) + (\Sigma ax_a)^2\,\Sigma a\beta\gamma\right]$$
$$\left[\delta^2\,.\,(\Sigma a\alpha)^2 + abc\,\Sigma a\beta\gamma\right].\,(\Sigma ax_a)^2 =$$
$$-abc\,(\Sigma a\alpha)^2\,.\,\Sigma ax_bx_c + abc\,\Sigma a\alpha\,\Sigma ax_a\,\Sigma a\,(\beta x_c + \gamma x_b)$$

Nun ist:

$$\Sigma ax_a\,.\,\Sigma a\,(\beta x_c + \gamma x_b) =$$
$$\Sigma a\,(b\gamma + c\beta)\,x_a^2 + \Sigma\left[\alpha\,(b^2 + c^2) + a\,(b\beta + c\gamma)\right]x_bx_c$$

Die verlangte Gleichung des Kreises ist also folgende:

$$\Sigma a^2\left\{\left[\delta^2\,.\,(\Sigma a\alpha)^2 + abc\,\Sigma a\beta\gamma\right] - bc\,(b\gamma + c\beta)\,\Sigma a\alpha\right\}x_a^2$$
$$+\,\Sigma bc\left\{2\left[\delta^2\,.\,(\Sigma a\alpha)^2 + abc\,\Sigma a\beta\gamma\right] - a\alpha\,(b^2 + c^2 - a^2)\,\Sigma a\alpha\right\}x_bx_c = 0.$$

Die Gleichung des Inkreises kann aus dieser allgemeinen Gleichung gebildet werden, wenn wir setzen:

$$\Sigma a\alpha = \Sigma a, \ \delta = \frac{2F}{\Sigma a}$$

Der Coefficient von x_a^2 wird:

$$a^2\{4F^2 + abc\Sigma a - bc(b+c)\Sigma a\}$$
$$= 4a^2 s(s-a)\{(s-b)(s-c) - bc\}$$
$$= -4a^2 s^2 (s-a)^2$$

wo $2s = a+b+c$.

Ferner erhalten wir für den Coefficienten von $x_b x_c$:

$$bc\{8F^2 + 2abc\Sigma a - a(b^2+c^2-a^2)\Sigma a\}$$
$$= bc\{8F^2 + a(a+b+c)(a^2-b^2-c^2+2bc)\}$$
$$= 8bcs(s-b)(s-c)(s-a+a)$$
$$= 8bcs^2(s-b)(s-c)$$

Es ist sonach die Gleichung des Inkreises:

$$\Sigma a^2(s-a)^2 x_a^2 - 2\Sigma bc(s-b)(s-c)x_b x_c = 0$$

(Archiv LIX Seite 86).

II.

Die gefundene allgemeine Kreisgleichung gewinnt in einigen Fällen eine besondere Einfachheit. Für

$$\delta^2.(\Sigma a\alpha)^2 + abc\Sigma\alpha\beta\gamma = 0$$

bekommen wir:

$$\Sigma a(b\gamma + c\beta)x_a^2 - \Sigma\alpha(b^2+c^2-a^2)x_b x_c = 0$$

Diese Gleichung ist die eines Kreises, dessen Centrum $\alpha\beta\gamma$ und dessen Radius gegeben ist durch:

$$\delta = \frac{\sqrt{-abc\Sigma\alpha\beta\gamma}}{\Sigma a\alpha}$$

Ein anderer Specialfall ist $\Sigma\alpha\beta\gamma = 0$. Dann befindet sich der Mittelpunkt des Kreises auf dem Umkreise des Fundamentaldreiecks. Wir erhalten:

$$\Sigma a^2[\delta^2\Sigma a\alpha - bc(b\gamma + c\beta)]x_a^2$$
$$+ \Sigma bc[2\delta^2\Sigma a\alpha - a\alpha(b^2+c^2-a^2)]x_b x_c = 0$$

Setzen wir hier $x_a = bc$, so folgt:

$$9\delta^2\Sigma a\alpha - \Sigma bc(b\gamma + c\beta) - \Sigma a\alpha(b^2 + c^2 - a^2) = 0$$
$$9\delta^2\Sigma a\alpha - 2\Sigma a\alpha(b^2 + c^2) + \Sigma a^3\alpha = 0$$

Setzen wir $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4s_a^2$ und bezeichnen wir mit p_a die Seitennormalen des Centrums, so wird:

$$9\delta^2 = \frac{2\Sigma a s_a^2 p_a}{F}$$

Diese Relation gilt also für alle Kreise, deren Mittelpunkte auf dem Umkreise des Fundamentaldreiecks liegen und die sich im Schwerpunkte desselben schneiden.

III.

Die Gleichung des Kreises sei:

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit μ, so kann nach I. gesetzt werden:

$$\mu g_{aa} = a^2\{[\delta^2.(\Sigma a\alpha)^2 + abc\Sigma a\beta\gamma] - bc(b\gamma + c\beta)\Sigma a\alpha\}$$
$$2\mu g_{bc} = bc\{2[\delta^2.(\Sigma a\alpha)^2 + abc\Sigma a\beta\gamma] - a\alpha(b^2 + c^2 - a^2)\Sigma a\alpha\}$$

Hieraus folgt:

$$2\mu\left(\frac{g_{aa}}{a^2} - \frac{g_{bc}}{bc}\right) = [a\alpha(b^2 + c^2 - a^2) - 2bc(b\gamma + c\beta)]\Sigma a\alpha$$

Es sind also die Differenzen:

$$\frac{g_{aa}}{a^2} - \frac{g_{bc}}{bc}$$

unabhändig von δ. Somit sind zwei Kreise (g_{aa}, g_{bc}), (g_{aa}', g_{bc}') concentrisch, wenn:

$$\frac{g_{aa}}{a^2} - \frac{g_{bc}}{bc} : \frac{g_{bb}}{b^2} - \frac{g_{ca}}{ca} : \frac{g_{cc}}{c^2} - \frac{g_{ab}}{ab} = \frac{g_{aa}'}{a^2} - \frac{g_{bc}'}{bc} : \frac{g_{bb}'}{b^2} - \frac{g_{ca}'}{ca} : \frac{g_{cc}'}{c^2} - \frac{g_{ab}'}{ab}$$

IV.

Setzen wir

$$\delta^2.(\Sigma a\alpha)^2 + abc\Sigma a\beta\gamma = \varepsilon$$

so ist nach I.

$$\frac{g_{aa}}{a^2} = \varepsilon - bc(c\gamma + c\beta)\Sigma a\alpha$$

$$\frac{g_{bb}}{b^2} = \varepsilon - ca(c\alpha + a\gamma)\Sigma a\alpha$$

$$\frac{g_{cc}}{c^2} = \varepsilon - ab(a\beta + b\alpha)\Sigma a\alpha$$

$$\frac{2g_{bb}}{bc} = 2\varepsilon - a\alpha(b^2 + c^2 - a^2)\Sigma a\alpha$$

Diese Gleichungen ergeben:

$$\frac{g_{bb}}{b^2} + \frac{g_{cc}}{c^2} - \frac{2g_{bc}}{bc} = -a^2(\Sigma a\alpha)^2$$

$$c^2 g_{bb} + b^2 g_{cc} - 2bc g_{bc} = -a^2 b^2 c^2 (\Sigma a\alpha)^2$$

Es ist also der Kegelschnitt (g_{aa}, g_{bc}) ein Kreis, wenn:

$$\begin{aligned} & b^2 g_{cc} + c^2 g_{bb} - 2bc g_{bc} \\ = & c^2 g_{aa} + a^2 g_{cc} - 2ca g_{ca} \\ = & a^2 g_{bb} + b^2 g_{aa} - 2ab g_{ab} = \text{const.} \end{aligned}$$

V.

Nach III. können wir setzen:

$$a(b^2 + c^2 - a^2)\alpha - 2bc^2\beta - 2b^2c\gamma = \mu\left(\frac{g_{aa}}{a^2} - \frac{g_{bc}}{bc}\right)$$

$$-2c^2 a\alpha + b(c^2 + a^2 - b^2)\beta - 2ca^2\gamma = \mu\left(\frac{g_{bb}}{b^2} - \frac{g_{ca}}{ca}\right)$$

$$-2ab^2\alpha - 2a^2b\beta + c(a^2 + b^2 - c^2)\gamma = \mu\left(\frac{g_{cc}}{c^2} - \frac{g_{ab}}{ab}\right)$$

Diese drei Gleichungen genügen zur Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunktes. Es ist:

$$\alpha \equiv \begin{vmatrix} \frac{g_{aa}}{a^2} - \frac{g_{bc}}{bc} & -2bc^2 & -2b^2c \\ \frac{g_{bb}}{b^2} - \frac{g_{ca}}{ca} & +b(c^2 + a^2 - b^2) & -2ca^2 \\ \frac{g_{cc}}{c^2} - \frac{g_{ab}}{ab} & -2a^2b & +c(a^2 + b^2 - c^2) \end{vmatrix}$$

$$\equiv bc \begin{vmatrix} bc(bcg_{aa} - a^2 g_{bc}) & -2c^2 & -2b^2 \\ ca(cag_{bb} - b^2 g_{ca}) & c^2 + a^2 - b^2 & -2a^2 \\ ab(abg_{cc} - c^2 g_{ab}) & -2a^2 & a^2 + b^2 - c^2 \end{vmatrix}$$

Haben die Coefficienten von g_{aa} in Bezug auf a, b, c die Dimensionen m, so ist der Mittelpunkt im Allgemeinen ein Punkt von der Dimension $m + 10$.

VI.

Zwei Kreise (g_{aa}, g_{bc}) und (g_{aa}', g_{bc}') schneiden sich höchstens in zwei Punkten. Der Kegelschnitt $(g_{aa}+\lambda g_{aa}', g_{bc}+\lambda g_{bc}')$ geht also durch dieselben. Degenerirt derselbe in ein System von zwei Geraden; so ist die eine Gerade die Radicalaxe beider Kreise von der Form a_1, die andere ist die unendlich entfernte der Dreieckebene. Dann können wir setzen:

$$\begin{aligned}\Sigma(g_{aa}+\lambda g_{aa}')x_a^2 + 2\Sigma(g_{bc}+\lambda g_{bc}')x_b x_c \\ = \Sigma a x_a . \Sigma a_1 x_a \\ = \Sigma a a_1 x_a^2 + \Sigma(bc_1+cb_1)x_b x_c\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned}aa_1 &= g_{aa}+\lambda g_{aa}' \\ bc_1+cb_1 &= 2g_{bc}+2\lambda g_{bc}'\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen muss sich λ als symmetrische Function der a ergeben. Wir erhalten:

$$2g_{bc}+2\lambda g_{bc}' = \frac{bg_{cc}+\lambda bg_{cc}'}{c} + \frac{cg_{bb}+\lambda cg_{bb}'}{b}$$

$$\lambda = \frac{b^2 g_{cc}+c^2 g_{bb}-2bcg_{bc}}{b^2 g_{cc}'+c^2 g_{bb}'-2bcg_{bc}'}$$

Die Radicalaxe der beiden Kreise ist also die Gerade:

$$bc\left(\frac{g_{aa}}{G}+\frac{g_{aa}'}{G'}\right)$$

wo

$$\begin{aligned}G &= b^2 g_{cc}+c^2 g_{bb}-2bcg_{bc} \\ G' &= b^2 g_{cc}'+c^2 g_{bb}'-2bcg_{bc}'\end{aligned}$$

für den Umkreis ist:

$$g_{aa}'=0, \quad g_{bc}'=+a$$

Also ist die Radicalaxe des Umkreises und des Kreises (g_{aa}, g_{bc}) die Gerade bcg_{aa}.

Ebenso ist die Radicalaxe des Kreises (g_{aa}', g_{bc}') in Bezug auf den Umkreis die Gerade bcg_{aa}'.

Drei Gerade a_1, a_2, a_3 schneiden sich in einem Punkt, wenn:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_4 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Für

$$a_1 = bc\,g_{aa}$$
$$a_2 = bc\,g_{aa}'$$
$$a_3 = bc\left(\frac{g_{aa}}{G} + \frac{g_{aa}'}{G'}\right)$$

erhalten wir eine Determinante, die in die Summe zweier Determinanten zerlegt werden kann, deren jede Null ist. Es schneiden sich also die Radicalaxen dreier Kreise in einem Punkte.

VII.

Der Kreis (g_{aa}, g_{bc}) trifft die Gerade BC, für welche $x_a = 0$, in den Punkten

$$g_{bb}\,x_b^2 + g_{cc}\,x_c^2 + 2g_{bc}\,x_b x_c = 0$$

woraus:

$$\frac{x_b}{x_c} = \frac{-g_{bc} \pm \sqrt{g_{bc}^2 - g_{bb}g_{cc}}}{g_{bb}}$$

Setzen wir während der Rechnung $\sqrt{g_{bc}^2 - g_{bb}g_{cc}} = \alpha$, so haben die Schnittpunkte der BC mit dem Kreise die Coordinaten:

$$0 \quad -g_{bc} + \alpha \quad + g_{bb}$$
$$0 \quad -g_{bc} - \alpha \quad + g_{bb}$$

Bezeichnen wir die Mitte dieser beiden Punkte mit A_1, so müssen wir zunächst die Seitennormalen der ersteren berechnen, um die Coordinaten von A_1 anzugeben. Die Seitennormalen sind den Coordinaten proportional, sie sind also:

$$0 \quad (-g_{bc} + \alpha)\lambda \quad g_{bb}\lambda$$
$$0 \quad (-g_{bc} - \alpha)\mu \quad g_{bb}\mu$$

wo

$$\lambda = \frac{2F}{-bg_{bc} + b\alpha + cg_{bb}}$$

$$\mu = \frac{2F}{-bg_{bc} - b\alpha + cg_{bb}}$$

Sonach ist:

$$A_1 \equiv 0, \quad \lambda(-g_{bc} + \alpha) + \mu(-g_{bc} - \alpha), \quad (\lambda + \mu)\,g_{bb}$$

Nun ist:

$$\lambda(-g_{bc} + \alpha) + \mu(-g_{bc} - \alpha) \equiv bg_{bc}^2 - cg_{bc}g_{bb} - b\alpha^2 \equiv g_{bb}(bg_{cc} - cg_{bc})$$

$$(\lambda + \mu)\,g_{bb} = g_{bb}(cg_{bb} - bg_{bc})$$

Wir haben also:

$$A_1 \equiv 0, \quad bg_{cc} - cg_{bc}, \quad cg_{bb} - bg_{bc}$$

Die Seitennormalen der A_1 sind:

$$0, \quad \frac{2F(bg_{cc} - cg_{bc})}{b^2 g_{cc} + c^2 g_{bb} - 2bc g_{bc}}, \quad \frac{2F(cg_{bb} - bg_{bc})}{b^2 g_{cc} + c^2 g_{bb} - 2bc g_{bc}}$$

Nun ist aber $b^2 g_{cc} + c^2 g_{bb} - 2bc g_{bc}$ constant. Also ist der Schwerpunkt des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ der Punkt

$$ag_{cc} - cg_{ac} + ag_{bb} - bg_{ab}$$

Es gilt demnach der Satz:

Trifft der Kreis (g_{ca}, g_{bc}) die Seiten BC des Fundamentaldreiecks in zwei Punkten, deren Mitte A_1 ist: so ist der Schwerpunkt des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ der Punkt:

$$a(g_{bb} + g_{cc}) - bg_{ab} - cg_{ac}$$

So entspricht jedem Kreise ein Punkt, der auch dann noch reell ist, wenn die Schnittpunkte des Kreises mit der BC imaginär sind.

VIII.

P sei ein Punkt in der Ebene eines Dreiecks, PA treffe BC in P_a. Es ist die Gleichung des durch die P_a gehenden Kreises zu bilden, wenn $P \equiv p_a p_b p_c$ gegeben.

Dann ist $P_a \equiv 0 p_b p_c$ und wir haben folgendes System von Gleichungen:

$$p_b^2 g_{bb} + p_c^2 g_{cc} + 2 p_b p_c g_{bc} = 0$$
$$c^2 g_{bb} + b^2 g_{cc} - 2bc g_{bc} = M$$

wo M nach a, b, c symmetrisch ist. Hieraus ergibt sich:

$$g_{aa} = \begin{vmatrix} 0 & p_b^2 & p_c^2 & p_b p_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_c^2 & 0 & p_c p_a & 0 \\ 0 & p_b^2 & 0 & 0 & 0 & p_a p_b \\ M & c^2 & b^2 & -bc & 0 & 0 \\ M & 0 & a^2 & 0 & -ca & 0 \\ M & a^2 & 0 & 0 & 0 & -ab \end{vmatrix}$$

Lassen wir den symmetrischen Factor M weg, mit dem jedes g_{aa} und g_{bc} multiplicirt ist und vertauschen wir die erste und vierte, zweite und sechste Colonne; so folgt:

$$g_{aa} = \begin{vmatrix} p_b p_c & 0 & p_c^2 & 0 & 0 & p_b^2 \\ 0 & 0 & p_c^2 & 0 & p_c p_a & 0 \\ 0 & p_a p_b & 0 & 0 & 0 & p_b^2 \\ -bc & 0 & b^2 & 1 & 0 & c^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 1 & -ca & 0 \\ 0 & -ab & 0 & 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$$

Die weitere Determinantenrechnung gibt:

$$g_{aa} = a p_b p_c (\beta' + \gamma' - \alpha')$$

wo

$$\alpha' = a p_b p_c (a p_a + b p_b)(a p_a + c p_c)$$

Werden diese Werte in die Gleichung

$$p_b^2 g_{bb} + p_c^2 g_{cc} + 2 p_b p_c g_{bc} = 0$$

eingesetzt, so bekommen wir:

$$2 g_{bc} = - p_a [b p_b (\gamma' + \alpha' - \beta') + c p_c (\alpha' + \beta' - \gamma')]$$

Der Kreis, der durch die Fusspunkte der Transversalen des Punktes $P \equiv p_a$ geht, hat also die Gleichung:

$$\Sigma a p_b p_c (\beta' + \gamma' - \alpha') x_a^2 - \Sigma p_a [b p_b (\gamma' + \alpha' - \beta') + c p_c (\alpha' + \beta' - \gamma')] x_b x_c = 0$$

Ist p_a ein Punkt von der Dimension n, so sind die Coefficienten g_{aa} von der Dimension $6n+4$. Der Mittelpunkt des Transversalkreises ist somit nach V. im Allgemeinen ein Punkt von der Dimension $6n+14$.

IX.

Trifft die Seitennormale eines Punktes P die Seiten BC des Fundamentaldreiecks in A_p, so ist:

$$A_p \equiv 0 \quad p_b + p_a \cos\gamma \quad p_c + p_a \cos\beta$$

Für einen Punkt Q erhalten wir:

$$A_q \equiv 0 \quad q_b + q_a \cos\gamma \quad q_c + q_a \cos\beta$$

Die Punkte A_p, A_q liegen auf einem Kegelschnitte:

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

Setzen wir die Coordinatenwerte für A_p, A_q ein, so bekommen wir:

$$(p_b + p_a \cos\gamma)^2 g_{bb} + (p_c + p_a \cos\beta)^2 g_{cc}$$
$$+ 2 (p_b + p_a \cos\gamma)(p_c + p_a \cos\beta) g_{bc} = 0$$

$$(q_b + q_a\cos\gamma)^2 g_{bb} + (q_c + q_a\cos\beta)^2 g_{cc}$$
$$+ 2(q_b + q_a\cos\gamma)(q_c + q_a\cos\beta) g_{bc} = 0$$

woraus:

$$\frac{g_{bb}}{2g_{bc}} = \frac{-\begin{vmatrix} (p_b+p_a\cos\gamma)(p_c+p_a\cos\beta), & (p_c+p_a\cos\beta)^2 \\ (q_b+q_a\cos\gamma)(q_c+q_a\cos\beta), & (q_c+q_a\cos\beta)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (p_b+p_a\cos\gamma)^2, & (p_c+p_a\cos\beta)^2 \\ (q_b+q_a\cos\gamma)^2, & (q_c+q_a\cos\beta)^2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-(p_c+p_a\cos\beta)(q_c+q_a\cos\beta)}{(p_b+p_a\cos\gamma)(q_c+q_a\cos\beta)+(p_c+p_a\cos\beta)(q_b+q_a\cos\gamma)}$$

Für $q_a = p_b p_c$ wird der Zäler nach a und c, der Nenner nach b und c symmetrisch. Es ist dann:

$$\frac{g_{bb}}{2g_{bc}} = \frac{-p_b(p_c+p_a\cos\beta)(p_a+p_c\cos\beta)}{p_b(p_b+p_a\cos\gamma)(p_a+p_c\cos\beta)+p_c(p_c+p_a\cos\beta)(p_a+p_b\cos\gamma)}$$

Die A_p, A_q liegen also auf dem Kegelschnitt:

$$g_{aa} = -p_a(p_b+p_c\cos\alpha)(p_c+p_b\cos\alpha)$$

$$2g_{bc} = p_b(p_b+p_a\cos\gamma)(p_a+p_c\cos\beta)+p_c(p_c+p_a\cos\beta)(p_a+p_b\cos\gamma)$$

Dieser Kegelschnitt ist ein Kreis, wenn:

$$c^2 g_{bc} + b^2 g_{cc} - 2bc g_{bc} = \text{const.}$$

Hier wird:

$$c^2 p_b(p_c+p_a\cos\beta)(p_a+p_c\cos\beta)+b^2 p_c(p_a+p_b\cos\gamma)(p_b+p_a\cos\gamma)$$
$$+bcp_b(p_b+p_a\cos\gamma)(p_a+p_c\cos\beta)+bcp_c(p_c+p_a\cos\beta)(p_a+p_b\cos\gamma)$$
$$= cp_b(p_a+p_c\cos\beta)[c(p_c+p_a\cos\beta)+b(p_b+p_a\cos\gamma)]$$
$$+bp_c(p_a+p_b\cos\gamma)[b(p_b+p_a\cos\gamma)+c(p_c+p_a\cos\beta)]$$
$$= [cp_b(p_a+p_c\cos\beta)+bp_c(p_a+p_b\cos\gamma)].\,\Sigma ap_a$$
$$= \Sigma ap_a p_c.\,\Sigma ap_a$$

Die Fusspunkte der Seitennormalen der Punkte p_a und $p_b p_c$ liegen also auf einem Kreise. (Fiedler-Salmon Kegelschnitte 3. Aufl. S. 202).

X.

Treffen die Geraden PA, QA die BC in P_a, Q_a; so liegen die Punkte P_a, Q_a auf einem Kegelschnitt. Unter welcher Bedingung wird derselbe ein Kreis?

Ist $P \equiv p_a$, $Q \equiv q_a$; so ist der Kegelschnitt (g_{aa}, g_{bc}) bestimmt durch

$$g_{aa} = p_b p_c q_b q_c, \quad g_{bc} = -p_a q_a(p_b q_c + p_c q_b)$$

(Archiv LIX Seite 85).

Dieser Kegelschnitt ist ein Kreis, wenn

$$c^2 g_{bb} + b^2 g_{cc} - 2bc\, g_{bc} = \text{const.}$$

Hier wird:

$$c^2 p_c p_a q_c q_a + b^2 p_a p_b q_a q_b + 2bc\, p_a q_a p_b q_c + 2bc\, p_a q_a p_c q_b$$
$$= p_a q_a [c^2 p_c q_c + b^2 p_b q_b + 2bc(p_b q_c + p_c q_b)]$$

Wir haben sonach folgendes System von Gleichungen:

$$q_c q_a (c^2 p_c p_a + 2bc\, p_a p_b) + q_a q_b (b^2 p_a p_b + 2bc\, p_a p_c) = M$$

wo M symmetrisch nach a, b, c ist. Die Glieder der Determinante des Nenners geben die Coefficienten der $q_b q_c$; sie lautet, wenn $ap_a + 2bp_b = a_b$ gesetzt wird:

$$\begin{vmatrix} 0 & c p_a c_b & b p_a b_c \\ c p_b c_a & 0 & a p_b a_c \\ b p_c b_a & a p_c a_b & 0 \end{vmatrix}$$

Sonach ist:

$$q_b q_c \equiv \begin{vmatrix} 1 & c p_a c_b & b p_a b_c \\ 1 & 0 & a p_b a_c \\ 1 & a p_c a_b & 0 \end{vmatrix}$$
$$= a(b p_a p_c a_b b_c + c p_a p_b a_c c_b - a p_b p_c a_b a_c)$$

Setzen wir noch $a p_b p_c = \alpha'$, so erhalten wir:

$$q_a \equiv bc(\alpha' b_a a_b + \gamma' b_c c_a - \beta' b_c b_a)(\alpha' c_a a_b + \beta' c_b b_a - \gamma' c_a c_b)$$

So entspricht also jedem Punkte ein zweiter, dessen Transversalfusspunkte mit denen des ersten auf demselben Kreise liegen. Für $p_a = \dfrac{1}{a}$ ist:

$$a_b = 3 = a_c, \quad a p_b p_c = \frac{a}{bc} = \frac{abc}{a^2} = \alpha'$$

$$q_a \equiv bc(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$
$$\equiv bc.ab.ac \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac}\right)\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}\right)$$
$$\equiv \cos\beta \cos\gamma.$$

Dem Schwerpunkt entspricht also der Höhenpunkt, die Fusspunkte ihrer Transversalen liegen auf dem Feuerbachschen Kreise.

Wien, Juni 1876.

VIII.

Die Höhenschnitte der Dreiecke aus vier Geraden.

Von

Emil Hain.

Eine Gerade schneide die Seiten BC des Dreiecks ABC in A_1. Ihre Gleichung in trimetrischen Punktcoordinaten bezogen auf dieses Dreieck sei:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

Es ist also:

$$\begin{array}{llll} A_1 \equiv & 0 & +c_1 & -b_1 \\ B_1 \equiv & -c_1 & 0 & +a_1 \\ C_1 \equiv & +b_1 & -a_1 & 0 \end{array}$$

Bezeichnen wir die Höhenschnitte der Dreiecke $B_1 C_1 A$ mit $\mathfrak{A}$, so schneiden sich in $\mathfrak{A}$ die Normalen von B_1 und C_1 auf bzhw. AB und AC.

Nun ist die Gleichung der Senkrechten, welche vom Punkte $\xi_a \xi_b \xi_c$ auf die Gerade

$$a' x_a + b' x_b + c' x_c = 0$$

gefällt wird:

$$\begin{vmatrix} x_a & \xi_a & u_a \\ x_b & \xi_b & u_b \\ x_c & \xi_c & u_c \end{vmatrix} = 0$$

wo $u_a = a' - b' \cos\gamma - c' \cos\beta$, wenn mit α die Winkel des Fundamentaldreiecks bezeichnet werden.

Indem wir diese Formel anwenden, gelangen wir zur Aufstellung der Gleichungen der $B_1\mathfrak{A}$ und $C_1\mathfrak{A}$.

Es ist

$$AC_1 \equiv AB \equiv 0,\quad 0,\quad 1.$$

Somit:

$$B_1\mathfrak{A} \equiv \begin{vmatrix} x_a & -c_1 & -\cos\beta \\ x_b & 0 & -\cos\alpha \\ x_c & +a_1 & +1 \end{vmatrix}$$

Die Coordinaten der $B_1\mathfrak{A}$ sind die Unterdeterminanten der x_a; sonach erhalten wir:

$$\mathfrak{A} \equiv a_1\cos\alpha,\quad c_1 - a_1\cos\beta,\quad c_1\cos\alpha$$

Eine Vertauschung gibt:

$$C_1\mathfrak{A} \equiv a_1\cos\alpha,\quad b_1\cos\alpha,\quad b_1 - a_1\cos\gamma$$

Somit ist $\mathfrak{A}$ der Punkt: a_a, a_b, a_c; wo

$$a_a = \begin{vmatrix} c_1 - a_1\cos\beta & c_1\cos\alpha \\ b_1\cos\alpha & b_1 - a_1\cos\gamma \end{vmatrix}$$

$$a_b = \begin{vmatrix} c_1\cos\alpha & a_1\cos\alpha \\ b_1 - a_1\cos\gamma & a_1\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$a_c = \begin{vmatrix} a_1\cos\alpha & c_1 - a_1\cos\beta \\ a_1\cos\alpha & b_1\cos\alpha \end{vmatrix}$$

Ist $H \equiv \cos\beta\cos\gamma$ der Höhenschnitt des Urdreiecks, so ist:

$$\mathfrak{A}H \equiv \cos\alpha\begin{vmatrix} a_b & a_c \\ \cos\gamma & \cos\beta \end{vmatrix},\quad \cos\beta\begin{vmatrix} a_c & a_a \\ \cos\alpha & \cos\gamma \end{vmatrix},\quad \cos\gamma\begin{vmatrix} a_a & a_b \\ \cos\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

Die Rechnung gibt:

$$\cos\alpha\begin{vmatrix} a_b & a_c \\ \cos\gamma & \cos\beta \end{vmatrix} =$$

$$a_1\cos\alpha^2\begin{vmatrix} a_1\cos\gamma + c_1\cos\alpha - b_1 & a_1\cos\beta + b_1\cos\alpha - c_1 \\ \cos\gamma & \cos\beta \end{vmatrix}$$

$$= a_1\cos\alpha^2\begin{vmatrix} c_1\cos\alpha - b_1 & b_1\cos\alpha - c_1 \\ \cos\gamma & \cos\beta \end{vmatrix}$$

$$\equiv a_1\cos\alpha^2[c_1(\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma) - b_1(\cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta)]$$

Ist r der Umkreisradius des Fundamentaldreiecks, so ist:

$$2r\cos\alpha + 2r\cos\beta\cos\gamma = \frac{2F}{a}$$

somit ist:

Digitized by Google

$$\cos\alpha \begin{vmatrix} a_b & a_c \\ \cos\gamma & \cos\beta \end{vmatrix} = \frac{F}{bcr} a_1 \cos\alpha^2 (bc_1 - cb_1)$$

Ferner ist:

$$\cos\beta \begin{vmatrix} a_c & a_a \\ \cos\alpha & \cos\gamma \end{vmatrix} = \cos\beta (a_c \cos\gamma - a_a \cos\alpha)$$

Werden die Werte für a_a und a_c eingesetzt, so folgt:

$$a_c \cos\gamma = \cos\alpha (a_1 b_1 \cos\alpha \cos\gamma + a_1^2 \cos\beta \cos\gamma - a_1 c_1 \cos\gamma)$$

$$a_a \cos\alpha = \cos\alpha (b_1 c_1 - a_1 b_1 \cos\beta - a_1 c_1 \cos\gamma + a_1^2 \cos\beta \cos\gamma - b_1 c_1 \cos\alpha^2)$$

$$a_c \cos\gamma - a_a \cos\alpha = b_1 \cos\alpha [a_1 (\cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma) - c_1 \sin^2\alpha]$$

Nun ist:

$$\cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma = \frac{F}{rb}, \quad \sin^2\alpha = \frac{aF}{bcr}$$

Wir erhalten also:

$$\cos\beta \begin{vmatrix} a_c & a_a \\ \cos\alpha & \cos\gamma \end{vmatrix} = \frac{F}{rbc} b_1 \cos\alpha \cos\beta (ca_1 - ac_1)$$

Aehnlich erhalten wir:

$$\cos\gamma \begin{vmatrix} a_a & a_b \\ \cos\beta & \cos\alpha \end{vmatrix} = \frac{F}{rbc} c_1 \cos\alpha \cos\gamma (ab_1 - a_1 b)$$

Die Gerade $\mathfrak{A}H$ hat also die Form:

$$\frac{F}{rbc} a_1 \cos\alpha^2 (bc_1 - cb_1)$$

$$\frac{F}{rbc} b_1 \cos\alpha \cos\beta (ca_1 - ac_1)$$

$$\frac{F}{rbc} c_1 \cos\alpha \cos\gamma (ab_1 - ba_1)$$

Indem wir den gemeinsamen Factor $F\cos\alpha : rbc$ ausscheiden, ergibt sich uns $\mathfrak{A}H$ als die Gerade $a_1 \cos\alpha (bc_1 - cb_1)$. Somit fallen, wie bekannt, die $\mathfrak{A}H$ zusammen. Die Punkte $\mathfrak{A}$ liegen mit H in einer Geraden.

Ist a_1 eine Symmetriegerade, so ist diese Gerade der Höhenschnitte die Symmetriegerade $a_1 (bc_1 - cb_1) \cos\alpha$. So erhält man z. B. für $a_1 = 1$ die Gerade $(b - c)\cos\alpha$. Sie trifft die $b - c$ im Punkte:

$$\begin{vmatrix} c - a & a - b \\ (c - a)\cos\beta & (a - b)\cos\gamma \end{vmatrix} \equiv (c - a)(a - b)(b - c) \equiv b + c - a$$

Die Gerade a_1 trifft die $a_1 (bc_1 - cb_1)\cos\alpha$ im Punkte:

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1(ca_1-ac_1)\cos\beta \\ c_1 & c_1(ab_1-ba_1)\cos\gamma \end{vmatrix} \equiv$$

$$ab_1c_1[cb_1(a^2+b^2-c^2)+bc_1(a^2+c^2-b^2)-2abca_1]$$

Ist p_a ein Symmetriepunkt von der Dimension n, so ist seine Harmonikale von der Dimension $2n$ und die Gerade der Höhenschnitte in Bezug auf die Harmonikale von p_a trifft dieselbe in einem Punkte, dessen Dimension im Allgemeinen $6n+4$ ist.

Wien, Juni 1876.

IX.

Ueber isogonal entsprechende Punkte des Dreiecks.

Von

Emil Hain.

Ist $P \equiv p_a$ ein Symmetriepunkt des Dreiecks ABC und I dessen Inkreiscentrum; so fallen im Allgemeinen AP und AI nicht zusammen, sondern bilden einen Winkel α', so dass $PAI = \alpha'$. Auf der andern Seite der AI kann eine Gerade denselben Winkel α' mit AI bilden. Sie treffe die BC in Q_a, so dass $Q_aAI = \alpha'$. Für diesen Fall gilt nun der Satz, dass sich die AQ_a in einem Punkte treffen. (Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, Seite 63.) Dieser Punkt ist der Symmetriepunkt $Q \equiv p_b p_c$. Scheudel nennt die Punkte P, Q einander isogonal entsprechend. (Schendel, Elemente der analytischen Geometrie, Seite 45). Man kann sie auch wegen der Form ihrer Coordinaten reciproke Punkte nennen.

Um diesen Satz zu beweisen, verlängern wir PA, bis die BC in P_a getroffen wird. Ziehen wir von P_a die Senkrechten auf AC und AB, so sind die Seitennormalen von P_a:

$$0 \qquad AP_a \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha'\right) \qquad AP_a \sin\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha'\right)$$

wo $CAB = \alpha$.

Ebenso sind die Seitennormalen von Q_a:

$$0 \qquad AQ_a \sin\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha'\right) \qquad AQ_a \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha'\right)$$

Also ist:

$$P_a \equiv 0 \qquad \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha'\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha'\right)} \qquad 1$$

$$Q_a \equiv 0 \qquad 1 \qquad \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha'\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha'\right)}$$

Es ist aber auch:

$$P_a \equiv 0 \quad p_b \quad p_c$$
$$\equiv 0 \quad \frac{p_b}{p_c} \quad 1$$

Sonach ist:

$$\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha'\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha'\right)} = \frac{p_b}{p_c}$$

$$Q_a \equiv 0 \quad 1 \quad \frac{p_b}{p_c}$$
$$\equiv 0 \quad p_c \quad p_b$$
$$\equiv 0 \quad p_a p_c \quad p_a p_b$$

Die AQ_a treffen sich also im Punkte $Q \equiv p_b p_c$. Ist also $P \equiv p_a$ gegeben, so kann durch einfache Zeichnung der Punkt $Q \equiv p_b p_c$ bestimmt werden. So entspricht dem Schwerpunkte $S \equiv bc$ der Grebe'sche Punkt $G \equiv a$, dem Höhenschnitt $H \equiv \cos\beta\cos\gamma$ das Umkreiscentrum $U \equiv \cos\alpha$.

Die reciproken Punkte der Symmetriepunkte erster Dimension sind zweiter Dimension. So ist:

$$P \equiv \varphi a + b + c$$
$$Q \equiv (\varphi b + c + a)(\varphi c + a + b)$$

Man hat identisch:

$$\Sigma(b-c)(\varphi a + b + c) = 0$$

Somit liegen die Punkte P auf der Geraden $b-c$. Ferner ist:

$$\Pi(\varphi a + b + c)\Sigma(b-c)(\varphi a + b + c) =$$
$$\Sigma(b-c).(\varphi a + b + c)(\varphi c + a + b).(\varphi a + b + c)(\varphi b + c + a) = 0$$

Es liegen also die Punkte Q auf dem Kegelschnitt:

$$\Sigma(b-c)x_b x_c = 0$$

welcher dem Fundamentaldreieck umschrieben ist und durch das In-

kreiscentrum desselben geht. Nun ist aber I ein innerer Punkt. Es kann der Kegelschnitt also nur eine Hyperbel sein.

Die Form der Polare des Punktes ξ_a in Bezug auf den Kegelschnitt

$$\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

ist:

$$\frac{\partial . \Sigma g_{bc} \xi_b \xi_c}{\partial \xi_a} = g_{ca} \xi_c + g_{ab} \xi_b$$

In unserem Falle hat die Gerade die Form:

$$(a-b)\,\xi_b - (a-c)\,\xi_c$$

Also ist die Gerade $b-c$ Tangente in I. Setzen wir

$$(a-b)\,\xi_b - (a-c)\,\xi_c = a$$

so ist ξ_a der Mittelpunkt und man findet

$$\xi_a = a(b-c)^2$$

Er ist also ein innerer Punkt des Dreiecks.

Die Tangenten dieses Kegelschnittes in den Ecken des Dreiecks haben die Formen:

$$\begin{matrix} 0 & a-b & c-a \\ a-b & 0 & b-c \\ c-a & b-c & 0 \end{matrix}$$

Das Dreieck dieser Tangenten hat den Flächeninhalt:

$$\frac{abc\,F\Delta^2}{\Delta_a\,\Delta_b\Delta_c}$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a-b & c-a \\ a-b & 0 & b-c \\ c-a & b-c & 0 \end{vmatrix} = 2\Pi(b-c)$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} a-b & 0 & b-c \\ c-a & b-c & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2a(b-c)^2$$

Die Tangenten des Reciprocalkegelschnittes aller Symmetriepunkte erster Dimension in den Ecken des Fundamentaldreiecks bilden ein Dreieck, dessen Fläche die Hälfte der des Fundamentaldreiecks beträgt.

Der Umkreis des Fundamentaldreiecks, dessen Gleichung

$$\Sigma a x_b x_c = 0$$

trifft die Hyperbel

$$\Sigma(b-c)x_b x_c = 0$$

ausser in den Punkten A noch in einem vierten Punkte ξ_a. Dann ist:

$$\Sigma\frac{b-c}{\xi_a} = 0, \qquad \Sigma\frac{a}{\xi_a} = 0$$

Die Elimination von ξ_a gibt:

$$\frac{\xi_b}{\xi_c} =$$

$$\frac{ca+cb-a^2-b^2}{bc+ba-c^2-a^2} \times \frac{ab+ac-b^2-c^2}{ab+ac-b^2-c^2}$$

$$\xi_a \equiv (bc+ba-c^2-a^2)(ca+cb-a^2-b^2)$$

Der reciproke Punkt von ξ_a liegt im Unendlichen, da

$$\Sigma a\xi_b\xi_c = \Sigma a^2(b+c) - \Sigma a(b^2+c^2) = 0$$

wie überhaupt alle reciproken Punkte des Umkreises auf der Geraden a liegen.

Die Gerade p_a ist die Harmonikale des Isogonalpunktes von p_a. Für welchen Punkt ist die Gerade p_a senkrecht auf der $p_b p_c$?

Die Bedingung der Orthogonalität zweier Geraden a_1, a_2 ist:

$$\Sigma a_1 a_2 = \Sigma(b_1 c_2 + b_2 c_1)\cos\alpha$$

Für $a_1 = p_a$, $a_2 = p_b p_c$ erhalten wir:

$$3p_a p_b p_c = \Sigma p_a(p_b^2 + p_c^2)\cos\alpha$$

Der Ort aller Punkte, deren Harmonikalen senkrecht stehen auf den Harmonikalen ihrer Isogonalpunkte ist die Curve:

$$\Sigma x_a(x_b^2 + x_c^2)\cos\alpha - 3x_a x_b x_c = 0$$

Zwei Gerade a_1, a_2 sind parallel, wenn:

$$\Sigma a(b_1 c_2 - b_2 c_1) = 0$$

Der Ort aller Punkte, deren Harmonikalen parallel sind den Harmonikalen ihrer Isogonalpunkte ist also:

$$\Sigma a x_a(x_b^2 - x_c^2) = 0$$

eine Curve dritten Grades, welche durch die Ecken des Dreiecks und sein Inkreiscentrum hindurchgeht.

Trifft PA die Gerade BC in P_a, und setzen wir $BP_a = a_b$, $CP_a = a_c$; so gibt die Figur:

$$P_a \equiv 0 \qquad a_c \sin\gamma \qquad a_b \sin\beta$$

Verschieben wir a_b und a_c, so dass:

$$BQ_a' = CP_a = a_c$$
$$CQ_a' = BP_a = a_b$$

so ist:

$$Q_a' \equiv 0 \qquad a_b \sin\gamma \qquad a_c \sin\beta$$

Es ist aber auch:

$$P_a \equiv 0 \qquad \frac{a_c}{a_b}\cdot\frac{c}{b} \qquad 1$$

$$\equiv 0 \qquad \frac{p_b}{p_c} \qquad 1$$

Somit ist:

$$\frac{a_c}{a_b} = \frac{b p_b}{c p_c}$$

$$Q_a' \equiv 0 \qquad 1 \qquad \frac{b p_b}{c p_c}\cdot\frac{b}{c}$$

$$\equiv 0 \qquad c^2 p_c \qquad b^2 p_b$$

$$\equiv 0 \qquad a^2c^2 p_c p_a \qquad a^2b^2 p_a p_b$$

Die AQ_a' treffen sich in $Q' \equiv b^2c^2 p_b p_c$. Die Punkte p_a und $b^2c^2 p_b p_c$ stehen also, wie die Punkte p_a und $p_b p_c$, in einfacher gegenseitiger Beziehung und werden für ein anderes Coordinatensystem auch reciprok. (Hoppe, Archiv LVII Seite 422) für $P \equiv p_b p_c$ wird $Q' \equiv b^2c^2 p_a$.

Construirt mau also für die Punkte einer Geraden die Isogonalpunkte in Bezug auf die Winkelhalbirenden und von diesen die Punkte der gleichen Seitenabschnitte, so liegen die letzteren auf einer Geraden.

Steiner hat in Crelle's Journal Band II. folgenden Satz über das Dreieck aufgestellt:

Fällt man aus einem willkürlichen Punkte P in der Ebene eines Dreiecks ABC auf die Seiten die Lote PA_p, nimmt in diesen drei Loten drei beliebige Punkte A_1 als Ecken eines anderen Dreiecks $A_1B_1C_1$ an und fällt auf dessen Seiten aus den Ecken des gegebenen Dreiecks Lote, so treffen sich diese in einem Punkte Q.

Wir wollen die Form dieses Punktes Q für den Fall $PA_1 = A_1A_p$ untersuchen. Es ist dann:

$$P \equiv p_c \qquad p_b \qquad p_c$$

$$A_p \equiv 0 \qquad p_b + p_a\cos\gamma \qquad p_c + p_a\cos\beta$$

$$A_1 \equiv \frac{p_a}{2} \qquad \frac{p_a\cos\gamma + 2p_b}{2} \qquad \frac{p_a\cos\beta + 2p_c}{2}$$

Sonach ist:

$$\begin{matrix} B_1 \equiv p_b\cos\gamma+2p_a & p_b & p_b\cos\alpha+2p_c \\ C_1 \equiv p_c\cos\beta+2p_a & p_c\cos\alpha+2p_c & p_c \end{matrix}$$

Die Gleichung der B_1C_1 sei:

$$a_a x_a + a_b x_b + a_c x_c = 0$$

Und zwar ist:

$$a_a = \begin{vmatrix} p_b & p_b\cos\alpha+2p_c \\ p_c\cos\alpha+2p_b & p_c \end{vmatrix}$$

$$a_b = \begin{vmatrix} p_b\cos\alpha+2p_c & p_b\cos\gamma+2p_a \\ p_c & p_c\cos\beta+2p_a \end{vmatrix}$$

$$a_c = \begin{vmatrix} p_b\cos\gamma+2p_a & p_b \\ p_c\cos\beta+2p_a & p_c\cos\alpha+2p_b \end{vmatrix}$$

Die Rechnung gibt:

$$a_a = -[3p_bp_c + p_bp_c\cos\alpha^2 + 2\cos\alpha(p_b^2+p_c^2)]$$
$$a_b = p_c(p_b\cos\alpha\cos\beta - p_b\cos\gamma + 2p_c\cos\beta) + 2p_a(p_b\cos\alpha + p_c)$$
$$a_c = p_b(p_c\cos\alpha\cos\gamma - p_c\cos\beta + 2p_b\cos\gamma) + 2p_a(p_c\cos\alpha + p_b)$$

Die Senkrechte vom Punkte ξ_a auf die Gerade a_1 hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_a & \xi_a & u_a \\ x_b & \xi_b & u_b \\ x_c & \xi_c & u_c \end{vmatrix} = 0$$

wo

$$u_a = a_1 - b_1\cos\gamma - c_1\cos\beta$$

für die Normale von A auf B_1C_1 ist:

$$\xi_a = 1, \qquad \xi_b = 0 = \xi_c$$
$$a_1 = a_a, \qquad b_1 = a_b, \qquad c_1 = a_c$$

Die Gleichung lautet also:

$$\begin{vmatrix} x_a & 1 & u_a \\ x_b & 0 & u_b \\ x_c & 0 & u_c \end{vmatrix} \equiv \frac{x_b}{u_b} - \frac{x_c}{u_c} = 0$$

Die weitere Aufführung gibt:

$$u_b = 2p_c\omega, \quad u_c = 2p_b\omega$$

wo

$$\omega = p_a(1-\cos\alpha^2) + p_b(\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma) + p_c(\cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta)$$

Die Gleichung der Normalen von A auf B_1C_1 ist also:

$$\frac{x_b}{p_c} - \frac{x_c}{p_b} = \frac{x_b}{p_a p_c} - \frac{x_c}{p_a p_b} = 0$$

Diese Normalen schneiden sich also im Punkt $Q \equiv p_b p_c$. Es ist hiemit eine andere Construction des reciproken Punktes von $P_a \equiv p_a$ gegeben:

Man fälle von P auf die BC Lote, welche in A_p treffen und halbire PA_p in A_1. Die Normalen von A auf B_1C_1 treffen sich in $Q \equiv p_b p_c$.

Der Umkreispol der Geraden

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

ist der Punkt: $a(bb_1 + cc_1 - aa_1)$.

(Archiv LVIII Seite 89).

Trifft die Gerade a_2 die Seiten BC in A', so liegen die Mitten der AA' in einer Geraden, der Gaussischen Geraden der a_2. Ihre Form ist:

$$a(bc_2 a_2 + ca_2 b_2 - ab_2 c_2)$$

(Archiv LIX Seite 384)

Für $a_2 = p_b p_c$, $a_1 = p_a$ werden die Geraden a_2 und a_1 die Harmonikalen von P und Q. Sonach gilt der Satz:

Die Gaussische Gerade der Harmonikalen eines Punktes und der Umkreispol der Harmonikalen des reciproken Punktes haben dieselbe Form.

Wien, Juli 1876.

Digitized by Google

X.

Miscellen.

1.

Eine geometrische Aufgabe.

(Fortsetzung von N. XXX. 1. im vorigen Teile.)

Ferner bedürfen wir der Wertbestimmung von $\cos(u_1 - u_2)$, $\cos(u_1 + u_2)$ und $\sin(u_1 + u_2)$, nämlich $\cos(u_1 - u_2) = 1 - 2\sin^2\frac{u_1 - u_2}{2} = \frac{N - 2\varrho^2}{N}$, $\cos(u_1 + u_2) = \cos^2\frac{u_1 + u_2}{2} - \sin^2\frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{(r\cos\varphi + a)^2 - r^2\sin^2\varphi}{N}$, $\sin(u_1 + u_2) = 2\sin\frac{u_1 + u_2}{2}\cos\frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2r\sin\varphi(r\cos\varphi + a)}{N}$.

Durch Einsetzung dieser Werte in Gl. (3) erhält man nun nach Beseitigung des Nenners N und Anordnung der Glieder nach den Unbekannten $\cos\varphi$, wobei die mit $\cos^2\varphi$ und $\cos^3\varphi$ multiplicirten Glieder sich tilgen:

(7) $$a\cos\varphi(a^2 - r^2 \mp 2r\varrho) = r^3 - r^2\varrho - r(2\varrho^2 + a^2) \pm a^2\varrho$$

und

$$\cos\varphi = \frac{\pm\varrho - r}{a}\,\frac{a^2 - r^2 \mp 2r\varrho}{a^2 - r^2 \mp 2r\varrho}.$$

Hieraus ergiebt sich

a) das Hauptresultat, dass unter der Voraussetzung: $a^2 - r^2 \mp 2r\varrho = 0$ der Wert von φ beliebig ist.

b) dass für $a^2 - r^2 \mp 2r\varrho \gtrless 0$ $\cos\varphi = \frac{\pm\varrho - r}{a}$, welcher Wert

geometrisch leicht zu deuten aber nur dann real ist, wenn entweder $a > \varrho + r$ (wodurch zugleich $a > \varrho - r$) oder $\varrho - r < a < \varrho + r$, d. h. wenn die Kreise entweder ganz getrennt liegen oder einander schneiden. Unbrauchbar aber ist das Ergebniss b) für $a < r - \varrho$ (wodurch zugleich $a < r + \varrho$), d. h. wenn der eine Kreis ganz im anderen liegt und keinen Punkt mit ihm gemein hat, — natürlich unter der immer noch geltenden Annahme, dass $a^2 - r^2 \mp 2r\varrho \gtrless 0$

Für $a = \varrho \pm r$, also für (äusserlich oder innerlich) berührende Kreise ist $\varphi = 0$.

Endlich sei bemerkt, dass — abgesehen von der Annahme $a^2 - r^2 \mp 2r\varrho = 0$ — die Coordinaten des Punktes A

$$x = a + \frac{r^2}{a} \mp \frac{r\varrho}{a}, \quad y = \frac{r}{a}\sqrt{(a + r \mp \varrho)(a - r \pm \varrho)}$$

geometrisch leicht darzustellen sind.

Berlin. Ed. Liebrecht.

2.

Kugel von excentrischer Masse und centrischer Trägheit.

Die gegebene Masse M soll in einer gegebenen Kugel vom Radius c so verteilt werden, dass sie einen gegebenen Schwerpunkt und für alle Axen, die durch den Mittelpunkt gehen, ein gleiches gegebenes Trägheitsmoment J hat.

Der Mittelpunkt sei Anfang der xyz, die z Axe gehe mit ihrem positiven Arme durch den Schwerpunkt. Sei ferner

$$x = \varrho \cos\vartheta \cos\varphi; \quad y = \varrho \cos\vartheta \sin\varphi; \quad z = \varrho \sin\vartheta$$

also das Volum

$$v = \int_0^c \varrho^2 \partial\varrho \int_{-R}^{R} \cos\vartheta \partial\vartheta \int_0^{4R} \partial\varphi$$

und e der Abstand des Schwerpunkts vom Mittelpunkt.

Um nun die Aufgabe in grösster Allgemeinheit zu lösen, setzen wir die gesuchte Dichtigkeit

$$Q = q + q'$$

wo q willkürliche Function von ϱ, ϑ, φ ist, während q' die sämmtlichen Bedingungen speciell auf einfachste Weise erfüllen soll. Sei

$$q' = a + a_1 \cos 2\varphi + a_2 \sin 2\varphi + (a_3 + a_4 \cos\varphi + a_5 \sin\varphi) \cos\vartheta$$
$$+ (a_6 + a_7 \cos\varphi + a_8 \sin\varphi) \sin\vartheta + a_9 \varrho$$

dann wird bei Integration über die ganze Kugel

$$\int q' \partial v = \frac{4Rc^3}{3}\left(2a + Ra_3 + \frac{3c}{2} a_9\right)$$

$$\int xq' \partial v = \frac{2Rc^4}{3} a_4$$

$$\int yq' \partial v = \frac{2Rc^4}{3} a_5$$

$$\int zq' \partial v = \frac{2Rc^4}{3} a_6$$

$$\int (y^2 + z^2) q' \partial v = \frac{Rc^5}{5}\left(\frac{16}{3} a - \frac{4}{3} a_1 + \frac{5R}{2} a_3\right) + \frac{8Rc^6}{9} a_9$$

$$\int (z^2 + x^2) q' \partial v = \frac{Rc^5}{5}\left(\frac{16}{3} a + \frac{4}{3} a_1 + \frac{5R}{2} a_3\right) + \frac{8Rc^6}{9} a_9$$

$$\int (x^2 + y^2) q' \partial v = \frac{Rc^5}{5}\left(\frac{16}{3} a + 3Ra_3\right) + \frac{8Rc^6}{9} a_9$$

$$\int yzq' \partial v = \frac{Rc^5}{5} \frac{R}{2} a_8$$

$$\int zxq' \partial v = \frac{Rc^5}{5} \frac{R}{2} a_7$$

$$\int xyq' \partial v = \frac{Rc^5}{5} \frac{4}{3} a_2$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$\int q \partial v = m;\quad \int xq \partial v = X;\quad \int yq \partial v = Y;\quad \int zq \partial v = Z$$
$$\int (y^2 + z^2) q \partial v = A;\quad \int yzq \partial v = -D$$
$$\int (z^2 + x^2) q \partial v = B;\quad \int zxq \partial v = -E$$
$$\int (x^2 + y^2) q \partial v = C;\quad \int xyq \partial v = -F$$

so erhält man die 10 Bedingungsgleichungen:

$$M = m + \frac{4Rc^3}{3}(2a + Ra_3 + \frac{3c}{2} a_9)$$

$$0 = X + \frac{2Rc^4}{3} a_4;\qquad 0 = Y + \frac{2Rc^4}{3} a_5$$

$$eM = Z + \frac{2Rc^4}{3} a_6$$

$$J = A + \frac{Rc^5}{5}\left(\frac{16}{3} a - \frac{4}{3} a_1 + \frac{5R}{2} a_3\right) + \frac{8Rc^6}{9} a_9$$

$$J = B + \frac{Rc^5}{5}\left(\frac{16}{3} a + \frac{4}{3} a_1 + \frac{5R}{2} a_3\right) + \frac{8Rc^6}{9} a_9$$

$$J = C + \frac{Rc^5}{5}\left(\frac{16}{3} a + 3Ra_3\right) + \frac{8Rc^6}{9} a_9$$

$$0 = -D + \frac{Rc^5}{5}\frac{R}{2} a_8; \quad 0 = -E + \frac{Rc^5}{5}\frac{R}{2} a_7$$

$$0 = -F + \frac{Rc^5}{5}\frac{4}{3} a_2$$

Hierdurch werden 6 von den 10 constanten Coefficienten direct einzeln bestimmt, während die 4 übrigen, a, a_1, a_3, a_9, aus 4 linearen Gleichungen gefunden werden. Setzt man die so erhaltenen Werte in q' ein, so wird die gesuchte Dichtigkeit (1)

$$Q = q + \frac{5}{Rc^5}\left(\frac{A+B+25C-27J}{16} + 3\frac{A-B}{8}\cos 2\varphi + \frac{3}{4} F \sin 2\varphi \right.$$
$$\left. + \frac{A+B-2C}{R}\cos\vartheta + 2\frac{E\cos\varphi + D\sin\varphi}{R}\sin\vartheta - 3\frac{A+B+C-3J}{4c}\varrho\right)$$
$$+ \frac{3}{2Rc^4}\left\{(M-m)\left(\frac{5}{2}c - 3\varrho\right) + Me\sin\vartheta - (X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\cos\vartheta - Z\sin\vartheta\right\}$$

In Betreff des anomal gewählten Terms $a_9\varrho$ ist folgendes zu bemerken. Stellt man den Ausdruck

$$a_9 = -\frac{9}{2Rc^4}\left(M - m + 5\frac{A+B+C-3J}{12c^2}\right)$$

entwickelt dar, so reducirt sich der Factor in der Klammer auf

$$M - m + 5\frac{A+B+C-3J}{12c^2} = \int^c \left(1 - \frac{5\varrho^2}{3c^2}\right)\varrho^2 \partial\varrho \int\int q' \cos\vartheta\,\partial\vartheta\,\partial\varphi$$

Wäre nun q' unabhängig von ϱ, so zerfiele das Integral zur Rechten in 2 Factoren, und der erste ist dann null. Demnach wäre M bestimmt durch m, J, A, B, C und liesse sich nicht einer beliebigen Grösse gleich machen. Folglich musste, um der Aufgabe zu genügen, mindestens ein Term ϱ enthalten.

Die einfachste Lösung entspricht offenbar $q = 0$, wofür zugleich A, B, C, D, E, F, m verschwinden. Es bleibt:

$$Q = \frac{45J}{4Rc^5}\left(\frac{\varrho}{c}-\frac{3}{4}\right)+\frac{3M}{2Rc^4}\left(\frac{5}{2}c-3\varrho+e\sin\vartheta\right) \tag{2}$$

Setzt man

$$J=\frac{2}{5}\left(1+\frac{\sigma}{9}\right)Mc^2 \tag{3}$$

so wird

$$Q=\frac{3M}{2Rc^4}\left(\frac{\sigma}{3}\varrho+\frac{1-\sigma}{4}c+e\sin\vartheta\right) \tag{4}$$

Soll also die Dichtigkeit in allen Punkten positiv sein, so erhält man die 2 Bedingungen:

$$0<\sigma<1;\quad 0<e<\frac{1-\sigma}{4}c$$

Offenbar gilt der letzte Ausdruck von Q nicht allein für $q=0$, sondern für jedes q, das die Form von q' für beliebige Coefficienten a hat, weil es dann mit q' verschmilzt. Um also andere Grenzbedingungen zu erhalten, muss man in der Wahl von q die Form von q' überschreiten. Dass überhaupt die Grenzen eines positiven Q erweitert werden können, mag an einem Beispiel gezeigt werden.

Sei $q=b\varrho^2$; dann wird

$$m=\frac{8Rbc^5}{5};\quad A=B=C=\frac{16Rbc^7}{21}$$

die übrigen Integrale verschwinden, und man erhält:

$$Q=b\varrho^2+\left(\frac{\sigma M}{2Rc^4}-\frac{48bc}{35}\right)\varrho+3\left(\frac{1-\sigma}{8}\frac{M}{Rc^3}+\frac{bc^2}{7}\right)+\frac{3Me\sin\vartheta}{2Rc^4} \tag{5}$$

oder, wenn man

$$M=4Rbc^5\mu$$

setzt,

$$Q=bc^2\left\{\left(\frac{\varrho}{c}\right)^2+2\left(\sigma\mu-\frac{24}{35}\right)\frac{\varrho}{c}+\frac{3}{2}(1-\sigma)\mu+\frac{3}{7}+6\mu\frac{e\sin\vartheta}{c}\right\}$$

Benutzen wir diesen Ausdruck zuerst für positives b, so ist bei unbeschränkter Variation von ϱ und ϑ der kleinste Wert:

$$Q_1=bc^2\left\{\frac{3}{7}+\frac{3}{2}(1-\sigma)\mu-\left(\sigma\mu-\frac{24}{35}\right)^2-\frac{6\mu e}{c}\right\}$$

Dieser wird in 2 Fällen nicht erreicht. Erstens wenn

$$\sigma\mu-\frac{24}{35}\geqq 0$$

ist, so ist der kleinste Wert:

$$Q_2 = bc^2 \left\{ \frac{3}{7} + \frac{3}{2}(1-\sigma)\mu - \frac{\sigma\mu e}{c} \right\}$$

Zweitens wenn

$$-\sigma\mu \overset{=}{>} \frac{11}{35}$$

ist, das Minimum also ausserhalb der Kngel liegt, so ist der kleiuste Wert:

$$Q_3 = bc^2 \left\{ \frac{3+\sigma}{2}\mu - \frac{2}{35} - \frac{6\mu e}{c} \right\}$$

In allen 3 Fällen muss

$$\frac{3}{7} + \frac{3}{2}(1-\sigma)\mu > 0$$

sein, damit Q positiv wird.

Im ersten Falle, bedingt dnrch

$$-\frac{11}{35} < \sigma\mu < \frac{24}{35}$$

hat, bei unbeschränkter Variation von μ, Q, seinen grössten Wert für

$$\pm\sigma\mu = \frac{\sqrt{51}}{35} \quad (\mu > 0;\ \ \pm\sigma > 0) \tag{7}$$

und dieser liegt für beide Vorzeicheu innerhalb der Grenzen des Falles. Eutsprecheud den 2 Vorzeichen wird

$$Q_1 = 6b\mu c^2 \left\{ \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{17}{3}}\right)\frac{\sigma}{35} - \frac{e}{c} \right\}$$

positiv für

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{4\sqrt{51}+9}{7} < \sigma < \dfrac{4\sqrt{51}-9}{7} \\[2ex] \dfrac{e}{c} < \dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{3}{4} \pm \sqrt{\dfrac{17}{3}}\right)\dfrac{\sigma}{35} \quad (\pm\sigma > 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

Die beiden andern Fälle schränken die Intervalle für σ und e bei günstigster Bestimmung von μ enger ein als der erste, kommen daher nicht in Betracht. Dasselbe gilt von der Anwendung negativer b. Setzen wir den Wert (7) von μ ein, so hat sich gezeigt, dass die Dichtigkeit

$$Q = \frac{M}{4Rc^3} \left\{ \pm \frac{35\sigma}{\sqrt{51}} \left(\frac{\varrho}{c}\right)^2 + 2\sigma\left(1 \mp 8\sqrt{\frac{3}{17}}\right) + 3\,\frac{1-\sigma}{2} \pm 5\sigma\sqrt{\frac{3}{17}} \right.$$

$$\left. + \frac{6e\sin\vartheta}{c} \right\} \tag{9}$$

wenn s und e in den Intervallen (8), d. i. in Decimalen geschrieben

$$-5{,}3664\ldots < \sigma < 2{,}7950\ldots$$

$$0 < \frac{e}{c} < \begin{cases} 0{,}25-3{,}1305\sigma & (\sigma > 0) \\ 0{,}25+1{,}6305\sigma & (\sigma < 0) \end{cases}$$

liegen, in allen Punkten der Kugel positiv ist, und die Kugel die Masse M, für alle diametralen Axen das Trägheitsmoment J (3) und einen Schwerpunkt im Abstand $=e$ vom Mittelpunkt hat. Die Grenzen von σ sind viel weiter als für $b=0$; die äusserste Grenze von e ist $\frac{1}{4}c$ geblieben. Ihr entspricht nur $\sigma=0$, d. i.

$$J=\frac{2}{5}Mc^2;\quad Q=\frac{3N}{8Rc^3}(1+\sin\vartheta)$$

Wie mit der Kugel, kann man offenbar mit jedem Körper verfahren und den Schwerpunkt und das Trägheitscentrum in 2 beliebige Punkte legen. R. Hoppe.

3.

Démonstration élémentaire de deux formules logarithmiques.

1. Formule logarithmique. Considérons une hyperbole équilatère $xy=1$, et la tangente YAX, au sommet A, qui rencontre les axes de coordonnées en des point X, Y, tels que $OX=OY=2$.

Soit M un point de l'hyperbole dont l'abscisse $OP=OB+BP=1+z$ est comprise entre celle du sommet A, savoir $OB=1$ et $OX=2$. Supposons que l'ordonnée PMe de ce point rencontre la tangente XY en T, et une parallèle AN à l'axe des x, en N.

On aura

$$TP=1-z,\quad PM=\frac{1}{1+z},\quad PN=1$$

aire hyperbolique $AMPB=\operatorname{log\,nat}(1+z)$

aire du rectangle $ANPB=AB\times BP=z$

aire du trapèze $ATPB=\frac{(AB+TP)BP}{2}=\frac{(1+1-z)z}{2}=z-\frac{z^2}{2}$

aire du trapèze $AMPB=\frac{(AB+MP)BP}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1+z}\right)z=$

$$\frac{2z+z^2}{2(1+z)}=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2(1+z)}<z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2}$$

L'aire hyperbolique étant comprise entre le rectangle et le premier trapèze, ou entre les deux trapèzes, on a

$$\log(1+z) = z - \frac{\theta z^2}{2}, \quad 0 < \theta < 1 \tag{1}$$

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \theta' \frac{z^3}{2}, \quad 0 < \theta' < 1 \tag{2}$$

2. Formule antilogarithmique. Posons $\log(1+z) = u$, $1+z = e^u = x$. La formule (1) pourra s'écrire

$$u = z - \frac{\theta z^2}{2}, \quad z = u + \frac{\theta z^2}{2};$$

d'où, en élévant au carré et remarquant que u est une partie $\theta'' z$ de z,

$$u^2 = z^2 - \theta z^3 + \frac{\theta^2 z^4}{4} \quad \text{ou} \quad z^2 = u^2 + \theta z^3 - \frac{\theta^2 z^4}{4} \tag{1'}$$

$$z^2 = u^2 + \theta z^2 u + \frac{\theta^2 z^4}{4} \quad \text{ou} \quad z^2 = u^2 + \theta\theta'' z^3 + \frac{\theta^2 z^4}{4} \tag{1''}$$

La formule (2) devient, en ajoutant l'unité aux deux membres et transposant quelques termes:

$$x = 1 + u + \frac{z^2}{2} - \frac{\theta'}{2} z^3$$

Remplaçons z^2 par sa valeur tirée des équations (1') (1''), il viendra:

$$x = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{z^3}{2}\left(\theta - \theta' - \frac{\theta^2}{4} z\right).$$

$$x = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{z^3}{2}\left(\theta\theta'' - \theta' + \frac{\theta^2}{4} z\right).$$

On a évidemment

$$\theta - \theta' - \frac{\theta^2}{4} z < \theta, \quad \theta\theta'' - \theta' + \frac{\theta^2}{4} z > -\theta'$$

Donc

$$x = 1 + u + \frac{u^2}{2} \pm \theta''' \frac{z^3}{2}, \quad 0 < \theta''' < 1$$

Il est facile de faire disparaître z du second membre. On a

$$u' = u - \frac{\theta z^3}{2} = z - \frac{z^2}{2}$$

D'où, en resolvant par rapport à z

$$z = 1 - \sqrt{1 - 2u'}$$

Si l'on remplace dans le second membre par u', on trouve une valeur plus grande, donc

$$z = \theta^{IV}(1-\sqrt{1-2u}),\quad \theta < \theta^{IV} < 1$$

Donc enfin, en substituant cette valeur de z, dans l'expression de $x=e^u$

$$e^u = 1+\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\frac{\lambda}{2}(1-\sqrt{1-2u})^3,\quad -1 < \lambda < 1$$

Naturellement, dans cette formule, on ne peut pas supposer $2u$ supérieur à 1. P. Mansion.

4.

Elementarer Beweis eines Satzes aus der Optik.

Der Satz lautet: Ein Lichtstral gebraucht, um von einem Punkte eines Mediums bis zu einem Punkte eines andern Mediums zu gelangen, ein Minimum der Zeit, wenn es einen solchen Weg zurücklegt, dass das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels gleich dem Verhältniss der Lichtgeschwindigkeiten in beiden Medien ist.

Es sei angenommen (s. d. Fig.), dass das Verhältniss

$$\frac{\sin J}{\sin i} = \frac{c}{c_1}$$

gleich dem Verhältniss der beiden Geschwindigkeiten sei. Es ist nachzuweisen, dass die auf dem Wege abc verbrauchte Zeit kleiner ist als die auf jedem andern Wege $ac'b$ verbrauchte, dass also

$$\left\{\frac{ae}{c}+\frac{eb}{c_1}\right\} - \left\{\frac{ae'}{c}+\frac{e'b}{c_1}\right\} < 0$$

Ist dies für einen Punkt b der Fall, so folgt es auch für jeden nähern Punkt b' auf eb, da $bb' > e'b - e'b'$ ist. Man braucht es daher nur für einen unendlich fernen Punkt zu beweisen. Dann wird die Differenz der im zweiten Medium zurückgelegten Wege durch eL' dargestellt, wo $e'L'$ das Lot auf eb ist. Da nun, wenn aL das Lot auf gg' bezeichnet,

$$eL' = ee'\sin i = \sin i(Le' - Le) = aL\sin(\operatorname{tg} J_1 - \operatorname{tg} J)$$

$$ae = \frac{aL}{\cos J};\quad ae' = \frac{aL_1}{\cos J_1}$$

ist, so geht die zu beweisende Ungleichung nach Division durch aL, welches positiv sein muss, über in

$$\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\cos J}-\frac{1}{\cos J_1}\right)+\frac{\sin J}{c_1}(\operatorname{tg} J_1-\operatorname{tg} J)<0$$

ein Ausdruck, der sich nach Einsetzung des Wertes von $\frac{c}{c_1}$ reducirt auf

$$\cos(J-J_1)-1<0$$

was, sofern J_1 nicht $=J$ ist, offenbar stattfindet.

Hier ist vorausgesetzt, dass Winkel beg spitz ist; wäre es ein rechter, $i=J=0$, so wäre das Ergebniss selbstverständlich.

Kiel, d. 24. Juni 1875. Fr. Brodersen, cand. phil.

5.

Zur Theorie der Kegelschnitte.

Zieht man von einem Punkte der Ebene Tangenten an einen gegebenen Kegelschnitt und verbindet den Mittelpunkt desselben mit den Berührungspunkten der Tangenten, so entsteht ein Viereck, das zur einen Diagonale die Polare des Punktes bezüglich des gegebenen Kegelschnittes, zur andern die Verbindungslinie des Punktes mit dem Kegelschnittsmittelpunkte hat.

Es soll nun zunächst der Inhalt dieses Viereckes bestimmt werden, wenn die Coordinaten x_0, y_0 des Punktes und die Gleichung:

$$f(x,y)=a_{00}x^2+a_{11}y^2+2a_{01}xy+2a_{02}x+2a_{12}y+a_{22}=0$$

des Kegelschnittes gegeben sind.

Denke man sich der gegebene Kegelschnitt sei Ellipse, m ihr Mittelpunkt, P die Polare des Punktes 0; δ, δ_1 die Längen der Senkrechten, die von den Punkten m und 0 auf die Polare P gefällt sind, und d sei die Länge des vom Kegelschnitte ausgeschnittenen Stückes der Polaren; so ergibt sich für den Inhalt des oben genannten Viereckes:

$$J=\tfrac{1}{2}d(\delta+\delta_1)$$

Setzt man nun:

$$a_{00}x+a_{01}y+a_{02}=u$$
$$a_{10}x+a_{11}y+a_{12}=v$$
$$a_{20}x+a_{21}y+a_{22}=w$$

so ergibt sich für die Gleichnng von P:

$$x_0 u + y_0 v + w = 0$$

oder auch:

$$x u_0 + y v_0 + w_0 = 0$$

somit ist:

$$\delta_1 = \frac{x_0 u_0 + y_0 v_0 + w_0}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}$$

da

$$f(x, y) = xu + yv + w = 0$$

ist. Ferner ist:

$$\delta = -\frac{x_0 u_m + y_0 v_m + w_m}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}$$

worin u_m, v_m, w_m die Werte von u, v, w bedeuten, wenn man darin statt x und y die Coordinaten des Mittelpunktes m einsetzt. Nun sind aber:

$$u_m = 0, \quad v_m = 0, \quad w_m = \frac{\varDelta}{\varDelta'}$$

wenn nämlich:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \varDelta' = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix}$$

Es wird also:

$$\delta = -\frac{\varDelta}{\varDelta' \sqrt{u_0^2 + v_0^2}}$$

Für die Länge d der Berührsehne P ergibt sich aber der bekannte Ausdruck:

$$d = \frac{2\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{a_{00} v_0^2 - 2a_{01} u_0 v_0 + a_{11} u_0^2} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & u_0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & v_0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & w_0 \\ u_0 & v_0 & w_0 & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

Durch Umformung geht der im Nenner stehende Ausdruck über in $\varDelta' f_0 - \varDelta$, und die Determinante in $-\varDelta f_0$, so dass:

$$d = \frac{2\sqrt{u_0^2 + v_0^2} \,.\, \sqrt{-\varDelta f_0}}{\varDelta' f_0 - \varDelta}$$

wird. Es ist demnach:

$$J = \frac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2} \,.\, \sqrt{-\varDelta f_0}}{\varDelta' f_0 - \varDelta} \left(\frac{f_0}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}} - \frac{\varDelta}{\varDelta' \sqrt{u_0^2 + v_0^2}} \right)$$

oder:

$$J = \frac{\sqrt{-\Delta f_0}}{\Delta'}$$

$$J^2 = -\frac{\Delta}{\Delta'^2} f_0$$

oder:

$$J^2 = \frac{1}{k} f_0$$

worin k den Transformationsfactor bedentet. (LVII. Teil. 4. Heft. XXII).

Setzt man also statt der variablen Coordinaten diejenigen irgend eines Punktes der Ebene in die, in der Normalform gegebenen, Kegelschnittsgleichung ein, so stellt der hiedurch erhaltene Wert das Quadrat des Inhaltes desjenigen Viereckes dar, welches bestimmt ist durch die vom angenommenen Punkte an den Kegelschnitt laufenden Tangenten und die Durchmesser ihrer Berührpunkte.

Handelt es sich nun um den geometrischen Ort aller jener Punkte O, denen lauter gleichgrosse Vierecke zukommen, so hat man hiefür die Gleichung $\frac{1}{k} f_0 = \text{const.}$

Diese Bedingungsgleichung stellt aber als Ort des Punktes O einen Kegelschnitt vor, der mit dem gegebenen ähnlich, ähnlichliegend und concentrisch ist.

Da aber die sämmtlichen einem Kegelschnitte umschriebenen Parallelogramme inhaltsgleich sind, so müssen ihre Ecken auf einem dem gegebenen Kegelschnitte ähnlichen, ähnlichliegenden und concentrischen Kegelschnitte liegen. Diesem gehören aber auch insbesondere die Schnittpunkte der Scheiteltangenten an, welche mit den Halbaxen a und b ein Rechteck vom Inhalte a, b bilden, so dass die Gleichung des Ortes für die Schnittpunkte aller conjugirten Tangenten des gegebenen Kegelschnittes $\frac{1}{k} f = a^2 b^2$ wird; oder da

$$a^2 b^2 = \frac{\Delta'}{K^2} \quad \text{und} \quad K = -\frac{\Delta'^2}{\Delta}$$

(LVII. Teil. 4. Heft. XXII..) so hat man hiefür:

$$f + \frac{\Delta}{\Delta'} = 0$$

Aus Obigen geht zugleich folgender Satz hervor:

Beschreibt man einem Dreiecke einen Kegelschnitt ein, der den Schwerpunkt zum Mittelpunkte hat und verbindet diesen mit den Berührungspunkten der Dreiecksseite, so entstehen drei Vierecke von gleichem Inhalte.

Denn, legt man durch die Ecken des Dreiecks einen Kegelschnitt der ebenfalls den Schnittpunkt zum Mittelpunkt hat, so ist dieser bekanntlich mit dem einbeschriebenen Kegelschnitte ähnlich, ähnlichliegend und concentrisch.

Es soll nun die Gleichung desjenigen Kegelschnittes aufgestellt werden, der durch den Punkt 0 und die Schnittpunkte von P mit dem Kegelschnitte geht und die Mitte s der Linie $m0$ zum Mittelpunkte hat.

Seine Gleichung hat die Form: $f-P(\alpha x+\beta y+\gamma)=0$, worin α, β, γ noch zu bestimmende Grössen sind.

Differentiirt man diese Gleichung nach x und nach y, so erhält man zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten x_s und y_s des Mittelpunktes:

$$2U_s-\alpha P_s-u_0(\alpha x_s+\beta y_s+\gamma)=0$$
$$2V_s-\beta P_s-v_0(\alpha x_s+\beta y_s+\gamma)=0$$

da aber

$$x_s=\frac{x_0+x_m}{2} \qquad y_s=\frac{y_0+y_m}{2}$$

so sind:

$$u_s=\tfrac{1}{2}u_0, \quad v_s=\tfrac{1}{2}v_0, \quad w_s=w_0+\tfrac{1}{2}\frac{\Delta}{\Delta'}$$

$$P_s=x_0u_s+y_0v_s+w_s=\tfrac{1}{2}\left(f_0+\frac{\Delta}{\Delta'}\right)$$

Obige Gleichungen gehen somit über in:

$$\alpha(P_s+u_0x_s)+\beta u_0y_s+\gamma u_0=u_0$$
$$\alpha vx_s+\beta(P_s+v_0y_s)+\gamma v_0=v_0$$

da genannter Kegelschnitt auch den Punkt 0 enthalten soll und

$$f_0=P_0$$

ist, so folgt:

$$\alpha x_0+\beta y_0+\gamma=1$$

Aus den drei letzten Gleichungen für α, β, γ, ergeben sich:

$$\alpha=0, \quad \beta=0, \quad \gamma=1$$

Also ist die Gleichung des gesuchten Kegelschnittes:

$$f-P=0$$

dieser Kegelschnitt enthält von selbst den Mittelpunkt m und hat $m0$ zur Hauptaxe.

Da das Aehnlichsein zweier Kegelschnitte blos abhängt von den Coefficienten von x, xy, y^2 ihrer Gleichungen, so folgt, dass alle Kegel-

schnitte $f-P=0$ für alle Punkte 0 der Ebene einander ähnlich und zugleich ähnlich dem gegebenen Kegelschnitte sind.

Es soll nun noch der geometrische Ort jener Punkte 0 bestimmt werden, für welche die Mittelpunkte s der Kegelschnitte

$$f-P=0$$

auf den gegebenen Kegelschnitt selbst zu liegen kommen. Alsdann muss:

$$f_s=0$$

sein, oder:

$$x_s u_s+y_s v_s+w_s=0$$

$$\frac{x_0+x_m}{2}\frac{u_0}{u}+\frac{y_0+y_m}{2}\frac{v_0}{2}+\frac{w_0}{2}+\frac{\Delta}{2\Delta'}=0$$

$$f_0+(x_m u_0+y_m v_0+w_0)+\frac{2\Delta}{\Delta'}=0$$

oder:

$$f_0+(x_0 u_m+y_0 v_m+w_m)+\frac{2\Delta}{\Delta'}=0$$

Da aber $u_m=0$ $v_m=0$ $w_m=\frac{\Delta}{\Delta'}$ ist, so folgt als Gleichung der gesuchten Ortscurve: $f_0+\frac{3\Delta}{\Delta'}=0$, welche also ein mit dem Gegebenen ähnlicher, ähnlichliegender und concentrischer Kegelschnitt ist, der notwendig doppelt so grosse Axen und folglich einen viermal so grossen Inhalt als der gegebene Kegelschnitt hat.

Regensburg, den 6. Januar 1876.

Max Greiner,
Lehrer der Mathematik und Physik
an der Kreisgewerbeschule da.

XI.

Ueber die oscillatorischen Bewegungen einer Walze mit excentrischer Schwerpunktsachse.

Von

C. Bender.

Eine Walze mit kreisförmigem Querschnitt befinde sich auf horizontaler Ebene und werde ein wenig aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht, alsdann sich selbst überlassen. Es ist die Bewegungsgleichung dieses Apparates festzustellen.

Der Abstand des Schwerpunkts von der Achse sei $= r$, der Radius des Querschnitts $= R$. An der Walze sei das Achsensystem der xyz fest; die z Achse sei die Achse der Walze, der positive Arm der y Achse gehe durch den Schwerpunkt. Die Einfachheit der zu Grunde gelegten Verhältnisse lässt uns ein zweites bewegliches Achsensystem entbehrlich erscheinen. Hierdurch und durch die weitgehende Anwendbarkeit der elliptischen Functionen unterscheidet sich die vorliegende Aufgabe von der viel allgemeineren, welche in den classischen Untersuchungen von Bessel*) ausgeführt ist.

Es sei φ der Winkel, um welchen sich die Scheibe gedreht hat, wenn sie aus der Gleichgewichtsstellung in eine Nachbarstellung durch Rollbewegung längs der positiven X Achse übergegangen ist. Dieser Winkel φ, welcher besser definirt wird, als der Winkel, welchen die Verbindungslinie von Schwerpunkt und Mittelpunkt der Scheibe für die erwähnte Stellung des Apparates mit der Y Achse bildet, werde,

*) Abhandlungen der Berliner Akademie 1826.

was hier bequemer ist, in der Richtung der Bewegung der Urzeiger positiv angenommen. Die Gleichung der Bahn des Schwerpunktes ist nunmehr, wenn wir mit x_3 und y_3 die Coordinaten des Schwerpunktes bezeichnen

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= R\varphi - r\sin\varphi \\ y_3 &= R - r\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

Bezeichnen wir mit M das Trägheitsmoment der Walze in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse, mit m ihre Masse, so ist die Differentialgleichung der Bewegung:

$$\Gamma + mgr\cos\varphi = \frac{m}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left(R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2 + \frac{M}{m}\right)$$

Hier bedeutet g die Beschleunigung der Erdschwere, Γ eine Constante. Diese Constante können wir auch dadurch ausdrücken, dass wir mit φ_0 den Winkel bezeichnen, bei welchem das aus der Gleichwichtslage gebrachte System seine Bewegung beginnt. In diesem Augenblick ist $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ und wir erhalten daher:

$$mgr(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = \frac{m}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left(R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2 + \frac{M}{m}\right) \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Wir geben dieser Differentialgleichung zunächst die Form:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2rg(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}{R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2 + \frac{M}{m}}}$$

woraus:

$$\frac{\partial \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\partial t} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{2}\sqrt{\frac{4rg\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \cos^2\frac{\varphi_0}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)}{(R-r)^2 + \frac{M}{m} + \left\{(R+r)^2 + \frac{M}{m}\right\}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}} \quad \text{II.}$$

und setzen

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\cos\operatorname{coam} u$$

für einen Modul k, der die Bedingung zu erfüll n hat:

$$\left(\frac{k'}{k}\right)^2 = \frac{(R-r)^2 + \frac{M}{m}}{(R+r)^2 + \frac{M}{m}}\cot^2\frac{\varphi_0}{2}$$

wenn k' den conjugirten Modul bezeichnet. Hieraus ergiebt sich der Wert:

$$k = \sin\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{\frac{(R+r)^2+\frac{M}{m}}{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi_0+\frac{M}{m}}}$$

Nach dieser Substitution geht die Differentialgleichung über in

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\cos\frac{\varphi_0}{2}}{k'}\sqrt{\frac{rg}{(R-r)^2+\frac{M}{m}}}\left\{1-\frac{4Rrk^2\sin^2 am\,u}{(R+r)^2+\frac{M}{m}}\right\}$$

Da der Coefficient von $k^2\sin^2 am\,u$ stets < 1 ist, so kann man setzen

$$\sin am\,a = \sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2+\frac{M}{m}}}$$

woraus:

$$\cos am\,a = \sqrt{\frac{(R-r)^2+\frac{M}{m}}{(R+r)^2+\frac{M}{m}}}$$

$$\varDelta am\,a = \sqrt{\frac{(R-r)^2+\frac{M}{m}}{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi_0+\frac{M}{m}}}$$

Wenn man jetzt ∂t aus der Gleichung entwickelt, so kommt:

$$\partial t = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\,\frac{\cos am\,a\,\varDelta am\,a}{\sin am\,a}\,\frac{\partial u}{1-k^2\sin^2 am\,a\sin^2 am\,u}$$

Bezeichnet also Π das elliptische Integral 3. Gattung:

$$\Pi(u,a) = \int\frac{k^2\sin am\,a\cos am\,a\,\varDelta am\,a\sin^2 am\,u\,\partial u}{1-k^2\sin^2 am\,a\sin^2 am\,u}$$

$$= \frac{\Theta' a_1}{\Theta a_1}u_1+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u_1-a_1)}{\Theta(u_1+a_1)}$$

wo

$$\frac{u}{u_1} = \frac{a}{a_1} = \Theta^2\frac{\pi}{2} = \frac{2K}{\pi}$$

so wird nach Integration

$$t = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\left\{u\frac{\cos am\,a\,\varDelta am\,a}{\sin am\,a}+\Pi(u,a)\right\}$$

$$= 2\sqrt{\frac{R}{g}}\left\{u_1 Z(a_1)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u_1-a_1)}{\Theta(u_1+a_1)}\right\}$$

Digitized by Google

wo

$$Z(a_1) = \frac{\Theta^2 0\, \Theta^2 \frac{\pi}{2} \Theta^2\left(a_1 + \frac{\pi}{2}\right) H^2\left(a_1 + \frac{\pi}{2}\right)}{H^2 \frac{\pi}{2} \Theta n_1 H a_1} + \frac{\Theta' a_1}{\Theta a_1}$$

Während einer vollen Oscillation variirt φ von $-\varphi_0$ bis $+\varphi_0$ und wieder zurück, gleichzeitig u von $-K$ bis K und von K bis $3K$, u im ganzen von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$. Demnach ist die Oscillationsdauer

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}}\, Z(a_1)$$

In besonderer Rücksicht auf kleine Elongationen φ_0, deren höhere als 2. Potenzen vernachlässigt werden mögen, setzen wir, von Gl. (II) ausgehend,

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \sin v$$

dann kommt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\sqrt{rg} \cos \frac{\varphi_0}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 v\right)}{\sqrt{(R-r)^2 + \frac{M}{m} + \left\{(R+r)^2 + \frac{M}{m}\right\} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 v}}$$

das ist entwickelt:

$$\partial t = \sqrt{\frac{(R-r)^2 + \frac{M}{m}}{rg}} \left\{1 + \frac{\varphi_0^2}{8} + \frac{\varphi_0^2}{4} \sin^2 v + \right.$$

$$\left. + \frac{(R+r)^2 + \frac{M}{m}}{(R-r)^2 + \frac{M}{m}} \frac{\varphi_0^2}{8} \sin v^2 \right\} \partial v$$

und giebt integrirt von $v = 0$ bis 2π:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R-r)^2 + \frac{M}{m}}{rg}} \left\{1 + \frac{(R+r)^2 + \frac{M}{m}}{(R-r)^2 + \frac{M}{m}} \frac{\varphi_0^2}{16}\right\}$$

Der Apparat geht in einfaches Pendel über, wenn man die ganze Masse in einen äussern Punkt verlegt und den Radius der Walze verschwinden lässt, so dass nur ihre Achse übrig bleibt, die dann unbeweglich ist. Dann wird

$$R = 0; \quad M = 0$$

und man findet:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right)$$

in Uebereinstimmung mit dem bekannten Werte.

XII.

Ueber einige Beziehungen der elastischen Curve zu den elliptischen Functionen, speciell zu dem elliptischen Bogen.

Von

C. Bender.

Auf eine elastische Linie ab, welche zunächst in der X Achse eines bestimmten Coordinatensystems ausgestreckt liegen möge, wirke eine bestimmte Kraft, in dem Punkte a eingreifend in der Richtung ab und eine ebenso grosse Kraft in b angreifend in der Richtung ba. Unter dem Einfluss beider Kräfte wird eine Biegung der elastischen Linie eintreten, welche in der XY Ebene des Coordinatensystems stattfinden möge. Die Gleichung der elastischen Curve lässt sich dann aus der Bemerkung ableiten, dass für jeden Punkt der Curve der Krümmungsradius ϱ umgekehrt proportional ist dem statischen Moment einer der Kräfte, welche in a und b angreifen. Wir drücken dieses aus durch die Gleichung:

$$y = \frac{c}{\varrho}$$

wobei c eine Constante bedeutet, welche von dem Biegungswiderstande und der Spannung der Linie abhängig ist. Durch Einführung des

analytischen Ausdrucks für den Krümmungsradius und durch Multiplication mit $2dy$ auf beiden Seiten der entstehenden Gleichung erhalten wir, nach erfolgter Integration:

$$1) \ldots\ldots y^2 = C - \frac{2c}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

woraus die Gleichung der elastischen Linie in Gestalt eines elliptischen Integrals resultirt:

$$a = \int \frac{(y^2 - C)dy}{(4c^2 - C^2 + 2Cy^2 - y^4)^{\frac{1}{2}}}$$

in welchen Gleichungen die weitere Constante C noch näher zu bestimmen ist.

Wir geben nunmehr der Gleichung 1) durch Einführung von

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

die Gestalt:

$$2) \ldots\ldots \frac{dx}{ds} = C + cy^2$$

wobei C und c jedoch nicht mehr dieselben sind wie in Gleichung 1) von welcher weiter kein Gebrauch gemacht wird. Wie die Anschauung der Figur 1) ergibt wächst $\frac{dx}{ds}$ mit y, den beiden Constanten C und c kommen daher positive Werte zu.

Wir haben nun, da $\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{ds^2}}$

$$3) \ldots \frac{dy}{ds} = \sqrt{1-C^2}\sqrt{\left(1 - \frac{cy^2}{1-C}\right)\left(1 + \frac{cy^2}{1+C}\right)}$$

Für $y = 0$ erhalten wir:

$$3^a) \ldots\ldots \frac{dy}{ds} = \sqrt{1-C^2}$$

$\frac{dx}{ds}$ ist aber in diesem Falle ($y = 0$) der Sinus desjenigen Winkels, welchen die Tangente im Anfangspunkte der Curve mit der X Achse bildet. Nennen wir diesen Winkel φ so zeigt 3^a, dass

$$4) \ldots\ldots C = \cos\varphi$$

Durch Einführung von 4) in 3) entsteht:

5) $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi \sqrt{(1 - \frac{c}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} y^2)(1 + \frac{c}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} y^2)}$

Setzen wir nun:

6) . . . . $y = \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{2}{c}} \cdot z$

in 5) ein, so entsteht:

7) . . . . $\frac{dz}{ds} = \cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{c}{2}} \cdot \sqrt{(1 - z^2)(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} z^2)}$

Aus der Theorie der elliptischen Functionen wissen wir nun, dass dieser Differentialgleichung für z der Wert entspricht:

8) . . . $z = \cos am(s\sqrt{\frac{c}{2}} + \Gamma)$; Modulus $= \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

wobei Γ eine noch zu bestimmende Constante bedeutet.

Hieraus erhalten wir:

9) . . . $y = \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{2}{c}} \cos am\,(s\sqrt{\frac{b}{2}} + \Gamma)$; Mod. $= \sin\frac{\varphi}{2}$

Für

$$s\sqrt{\frac{c}{2}} + \Gamma = 0$$

erhält y einen maximalen Wert. Wir können nun das Coordinatensystem jederzeit so wählen, dass dieser maximale Wert für

$$s = 0$$

eintritt. In diesem Falle, welcher auch in der Fig. 1) aufgezeichnet ist, wird

9a) . . . . $\Gamma = 0$

und die Y Achse teilt die Curve in zwei symmetrische Teile.

Die Constante c lässt sich auf zweierlei Weise ausdrücken. Einmal ist da $\Gamma = 0$ in Gleichung 9) für $s = 0$

$$y = H$$

oder gleich der grössten Erhebung des Bogens der elastischen Curve über die X Achse. Also:

$$H = \sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{2}{c}}$$

oder:

$$9^{b}) \quad \ldots \ldots \quad c = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{H^2}$$

weiter ist in Gleichung 9) für $s = S =$ dem halben Bogen der Curve

$$y = 0$$

und also

$$S\sqrt{\frac{c}{2}} = K$$

wodurch

$$9^{c}) \quad \ldots \ldots \quad c = 2\,\frac{K^2}{S^2}$$

Unter Berücksichtigung der Werte 9^{a}) 9^{b}) 9^{c}) erhalten wir nun aus 9) für y folgende zwei Gleichungen, welche nur scheinbar sich von einander unterscheiden:

$$\text{I} \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{ll} y = H\cos am\left(\frac{s}{H}\sin\frac{\varphi}{2}\right); & \text{Mod.} = \sin\frac{\varphi}{2} \\ y = \frac{S}{K}\sin\frac{\varphi}{2}\cos am\left(s\,.\,\frac{K}{S}\right); & \text{Mod.} = \sin\frac{\varphi}{2} \end{array} \right.$$

Interessanter sind die Resultate, welche man durch Vergleichung von 9^{b}) mit 9^{c}) erhält. Diese ergiebt

$$\text{II} \quad \ldots\ldots \quad S = \frac{K\,.\,H}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

oder

$$\text{II}^{a} \quad \ldots\ldots \quad \frac{S}{H} = \frac{K}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Bedenken wir nun, dass φ bei gegebener elastischer Curve eine ganz bestimmte Grösse ist, weiter, dass $\sin\frac{\varphi}{2}$ den Modulus k vorstellt und K durch die Relation

$$K = \frac{\Pi}{2}(1+k_0)(1+k_{00})(1+k_{000})\ \ldots$$

wobei

$$k_0 = \frac{1-k'}{1+k'}; \quad k' = \sqrt{1-k^2}$$

$$k_{00} = \frac{1-k_0'}{1+k_0'}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

mit $\sin\frac{\varphi}{2} = k$ verbunden ist, so ersehen wir, dass die rechte Seite IIª. eine constante Grösse ist.

Wir erhalten daher aus II. und IIª. folgende interessante Sätze:

Die Länge des halben Bogens einer ebenen elastischen Curve ist gleich dem Producte aus K in die grösste Erhebung des Bogens über die x Achse dividirt durch den Sinus des halben Winkels, welchen Tangente und x Achse im Anfangspunkte (Fusspunkte) der Curve mit einander bilden. Das Verhältniss des halben Bogens zur grössten Erhebung einer elastischen Curve ist für alle elastischen Curven constant, welche mit dem gleichen Winkel φ aufsteigen.

Wir kehren zur Differentialgleichung 2) zurück und setzen den Wert für y, wie ihn die zweite Gleichung II. liefert, unter Berücksichtigung von 9ᶜ) in diese Differentialgleichung. Wir erhalten so:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi + 2\sin\frac{2\varphi}{2}\cos^2 am\left(\frac{sK}{S}\right)$$

oder nach einer leichten Umformung:

$$\frac{dx}{ds} = -1 + 2\left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2 am\frac{sK}{S}\right)$$

Da

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = k^2$$

so ist

$$1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2 am\frac{sK}{S} = \Delta^2 am\left(\frac{sK}{S}\right)$$

und also

$$\frac{dx}{ds} = -1 + 2\Delta^2 am\left(\frac{sK}{S}\right)$$

hieraus

$$10) \quad \ldots\ldots \int_0^x dx = \int_0^s - ds + \frac{2S}{K}\int_0^{\frac{sK}{S}}\Delta^2 am\left(\frac{sK}{S}\right)d\left(\frac{sK}{S}\right)$$

Es ist nun nach der Theorie der elliptischen Functionen:

$$11) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \int_0^v \Delta^2 am\, v\, dv = E_v$$

gleich dem elliptischen Bogen über der Abscisse

$$x = \sin am\, v$$

wenn die halbe grosse Achse der Ellipse = 1 und deren Excentricität = k ist.

Die Gleichung 10) liefert durch Integralion

$$12) \quad \ldots\ldots \frac{(x+s)K}{2S} = \int_0^{\frac{sK}{S}} \Delta^2 am\left(\frac{sK}{S}\right) d\left(\frac{sK}{S}\right)$$

Da sich $\sin am\left(\frac{sK}{S}\right)$ aus einer der beiden Gleichungen II) ermitteln lässt und zwar

$$13) \quad \ldots\ldots \sin am\left(\frac{sK}{S}\right) = \sqrt{1-\frac{y^2}{H^2}} = \frac{1}{H}\sqrt{H^2-y^2}$$

gefunden wird, so erhalten wir aus der Verbindung der Bemerkung 11) mit 12) und 13)

III. Der über der Abscisse $\xi = \frac{1}{H}\sqrt{H^2-y^2}$ stehende Bogen einer Ellipse, deren halbe grosse Achse = 1 und deren Excentricität = $\sin\frac{\varphi}{2}$, ist gleich dem bis zur Ordinate y gehenden Bogen einer elastischen Curve, welche mit dem Winkel φ aufsteigt, vermehrt um die der Ordinate y entsprechende Abscisse x, diese Summe multiplicirt mit $\frac{K}{2S}$ oder was dasselbe ist mit $\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{2H}$

Wird $x = X$ gleich der halben Spannweite der elastischen Curve, so geht s über in

$$s = S$$

gleich dem halben Bogen dieser Curve. Hierbei geht ξ über in

$$\xi = 1$$

gleich der halben grossen Achse der Elsipse.

Der elliptische Quadrant einer Ellipse deren halbe grosse Achse = 1 und deren Excentricität = $\sin\frac{\varphi}{2}$ ist daher gleich:

$$\text{III}^a. \ldots\ldots\ldots\ldots E = \frac{(X+S)\sin\frac{\varphi}{2}}{2H}$$

in welchem Ausdruck X die halbe Spannweite, S den halben Bogen und H die grösste Erhebung einer elastischen Curve bedeutet, welche mit dem Winkel φ aufsteigt.

Der Ausdruck III[a]. lässt sich verwenden bei der Berechnung des Winkels, welchen die Tangenten in a) und b) mit einander bilden für den Fall, dass beide Punkte in denselben Punkt der X Achse zusammenstossen. Wir haben alsdann in III[a]. zu setzen:

$$\varphi = \varphi_0 \qquad \text{(Fig. 2.)}$$
$$X = 0$$

Da jedoch der elliptische Quadrant E auch von φ abhängig ist, so wählen wir für E die aus den elliptischen Functionen bekannte Form:

$$E = (1 - k^2 A) K^2$$

wobei A die convergente Reihe:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{k_0}{4} + \frac{k_0 . k_{00}}{8} + \frac{k_0 . k_{00} . k_{000}}{16} \cdots$$

vorstellt und K die schon oben angegebene Bedeutung hat. Wir erhalten demgemäss die Gleichung:

$$\text{IV.} \quad \ldots\ldots \quad (1 - k^2 A) K^2 = \frac{S}{2H} \cdot \cdot \sin \frac{\varphi_0}{2}$$

in welcher k, A, K Functionen des Winkels φ_0 sind, und welche folglich φ_0 annähernd berechnen lässt. Der gesuchte Winkel α ist alsdann:

$$\alpha = 2(\varphi_0 - 90^0)$$

Entfernen sich nun die beiden Kräfte von einander, indem sie in dem zu Anfang gegebenen Sinne weiter vorwärts gehen, so entsteht eine Schleife. Die Grösse X, welche auch hier wieder den halben Abstand der Punkte a) und b) bedeutet, ist in III[a] negativ einzuführen, so dass wir erhalten:

$$\text{V.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad E = \frac{(S - X) \sin \frac{\varphi}{2}}{2H}$$

Für $S = X$ ist die Excentricität $= 1$ und es geht die Ellipse in eine gerade Linie über, ebenso die elastische Linie.

Nicht uninteressant möchte es erscheinen den Bogen s_1 zu bestimmen für denjenigen Punkt der Y Achse, in welchem sich die Curvenäste schneiden. Man hat hierbei auf Gleichung 12) zurückzugehen und darin

$$s = s_1\,;\; x = 0$$

zu setzen. So erhalten wir:

$$\frac{s_1 K}{2S} = \int_0^{\frac{s_1 K}{S}} \varDelta^2 am\left(\frac{s_1 K}{S}\right) d\left(\frac{s_1 K}{S}\right)$$

Das Integral rechts kann nun nach der Lehre von den elliptischen Functionen ausgedrückt werden durch den elliptischen Quadranten und eine convergente Form mit dem Argument $\frac{s_1 K}{S}$, welche gewöhnlich mit $z\left(\frac{s_1 K}{S}\right)$ bezeichnet wird, so dass also:

$$\int_0^{\frac{s_1 K}{S}} \varDelta^2 am\left(\frac{s_1 K}{S}\right) d\left(\frac{s_1 K}{S}\right) = \frac{E}{K}\left(\frac{s_1 K}{S}\right) + z\left(\frac{s_1 K}{S}\right)$$

wobei E wie seither den elliptischen Quadranten einer Ellipse bedeutet, deren halbe grosse Achse $= 1$ und deren Excentricität $= \sin\frac{\varphi}{2}$ ist. Durch Einführung und Vergleichung entsteht die in Bezug auf s_1 aufzulösende transcendente Gleichung

VI. . . . . $\frac{s_1 K}{2S} = \frac{E . s_1}{S} + z\left(\frac{s_1 K}{S}\right)$

welche jedoch wenig Interesse darbietet.

Die in Vorstehendem entwickelten Lehrsätze sind in hohem Grade interessant. Sie erheben jedoch vorläufig keinen Anspruch auf besondere Wichtigkeit.

XIII.

Théorème général sur les courbes unicursales.

Par

Paul Appell,

Docteur ès sciences, Agrégé de l'Université, Ancien élève de l'Ecole Normale supérieure de Paris.

Soit une courbe unicursale et un faisceau de courbes algébriques tel qu'une des courbes du faisceau soit déterminée par $2n$ points et coupe la courbe unicursale en $2n+1$ points variables, Cy a $2n+1$ courbes du faisceau osculatrices à la proposée, c'est à dire la coupant en $2n+1$ points confondus, et les $2n+1$ points de contact sont sur une courbe du faisceau.

En effet, si l'on choisit arbitrairement sur la courbe unicursale $2n$ points pour faire passer par ces $2n$ points une courbe du faisceau, cette courbe coupera la courbe unicursale en un $(2n+1)^{ème}$ point parfaitement déterminé; aussi les courbes du faisceau déterminent sur la courbe unicursale des groupes de $2n+1$ points tels que $2n$ points d'un groupe étant choisis arbitrairement, le $(2n+1)^{ème}$ est connu. Soit λ le paramètre en fonction du quel sont exprimées les coordonnées de la courbe unicursale et soient $\lambda_1\, \lambda_2\, \ldots\, \lambda_{2n+1}$ les $2n+1$ valeurs de ce paramètre correspondant aux $2n+1$ points d'un des groupes: d'après ce qui précède, lorsque $2n$ de ces valeurs sont choisis arbitrairement la $(2n+1)^{ème}$ est déterminée; il doit donc y avoir entre ces $(2n+1)$ valeurs une relation du premier degré par rapport à chacune d'elles; de plus cette relation est évidemment symétrique par rapport à ces $2n+1$ valeurs. Elle est donc de la forme

(1) $$AS_{2n+1} + A_1 S_{2n} + \dots A_p S_{2n+1-p} = 0$$

S_k désignant les somme des produits k à k des $2n+1$ valeurs $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{2n+1}$.

Si l'on considère une courbe du faisceau osculatrice à la courbe unicursale en un point dont le paramètre est λ, les $2n+1$ valeurs du paramètre entrant dans la relation (1) sont égales entre elles et égales à λ. Cette valeur λ vérifie donc l'équation

(2) $$A\lambda^{2n+1} + C_1^{2n+1} A_1 \lambda^{2n} + C_2^{2n+1} A_2 \lambda^{2n+1} + \dots + C_p^{2n+1} A_p \lambda^{2n+1-p} + \\ + \dots + A_{2n+1} = 0$$

C_p^{2n+1} désignant le nombre de combinaisons de $2n+1$ objets p à p.

L'équation (2) étant de degré $2n+1$, on sait qu' il y a $2n+1$ courbes du faisceau osculatrices à la courbe unicursale: les racines de cette équation sont les valeurs du paramètre correspondant aux $2n+1$ points de contact.

Pour démontrer que ces $2n+1$ points de contact sont sur une courbe du faisceau, il suffit de faire voir que les $2n+1$ racines de l'équation (2) satisfont à la relation (1).

Désignons par Σ_p la somme des produits p à p des racines de l'équation (2): je vais démontrer que l'on a

$$A_p \Sigma_{2n+1-p} + A_{2n+1-p} \Sigma_p = 0$$

En effet

$$\Sigma_{2n+1-p} = (-1)^{2n+1-p} C_{2n+1-p}^{2n+1} \frac{A_{2n+1-p}}{A}$$

$$\Sigma_p = (-1)^p C_p^{2n+1} \frac{A_p}{A}$$

et comme

$$C_{2n+1-p}^{2n+1} = C_p^{2n+1}$$

on a bien

$$A_p \Sigma_{2n+1-p} + A_{2n+1-p} \Sigma_p = 0$$

On a donc aussi

$$A \Sigma_{2n+1} + A_1 \Sigma_{2n} + \dots + A_p \Sigma_{2n+1-p} + \dots + A_{2n+1-p} = 0$$

Car, d'après ce qui précède, la somme de 2 termes également distant des extrêmes est nulle. Le théorème général que nous avons énoncé est donc démoutré.

Applications.

Déduisons d'abord du théorème général un théorème bien connu. Considérons une courbe unicursale du 3° ordre et coupons la par les droites du plan. Une droite coupe la courbe en 3 points et est

déterminée par 2 points: on est donc bien dans les conditions de l'énoncé. Le théorème indique alors que la courbe a 3 points d'inflexion, et que ces 3 points sont en ligne droite.

Voici maintenant un autre théorème qui me semble nouveau. Considérons une droite fixe et coupons la par des courbes du 3° ordre passant par 7 points fixés.

Ces courbes coupent la droite en 3 points variables, et une d'entre elles est déterminée par 2 de ces points. Donc par 7 points donnés on peut mener 3 courbes du 3° ordre osculatrices à une droite, c'est à dire ayant cette droite pour tangente d'inflexion; les 3 points de contact de ces 3 courbes sont sur une courbe du 3° ordre passant par les 7 points.

Ces 2 exemples suffisent pour donner une idée de la fécondité du théorème énoncé.

Ajoutons encore que le même théorème s'applique aux courbes gauches unicursales coupées par un faisceau de surfaces algébriques.

Pour exemple si l'on considère une cubique gauche, c'est à dire une courbe gauche unicursale du 3° ordre, cette courbe est coupée en 3 points variables par des plans passant par un point fixe: et un de ces plans est déterminé par 2 points. Donc d'un point on peut mener 3 plans osculateurs à une cubique gauche et les 3 points de contact se trouvent sur un plan passant par le point.

XIV.

Résolution d'un système d'équations, dont une est du second degré tandis que les autres sont linéaires.

Par

Monsieur **J. Versluys,**

Professeur de mathématiques à Gröningen.

Deux équations à deux inconnues.

§ 1. Soit donné le système

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$$
$$px+qy+rz=0$$

et déterminons les rapports $x:y$, $x:z$ et $y:z$ par lesquels ces équations sont satisfaites. Soit

$$X=\begin{vmatrix} a & h & g & p \\ h & b & f & q \\ g & f & c & r \\ p & q & r & \end{vmatrix}$$

le déterminant qu' on obtient en bordant le discriminant de l'équation du second degré des coefficients de l'équation linéaire.

Le déterminant à éléments réciproques correspondant au déterminant X soit

$$\begin{vmatrix} A & H & G & P \\ H & B & F & Q \\ G & F & C & R \\ P & Q & R & \end{vmatrix}$$

On a (Voir Günther Kap. II, § 12)

$$\left.\begin{array}{l} pP+qQ+rR=X \\ pG+qF+rC=0 \\ pH+qB+rF=0 \\ pA+qH+rG=0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

§ 2. L'équation donnée du second degré est identique au dernier déterminant bordé des inconnues et égalé à zéro:

$$\begin{vmatrix} A & H & G & P & x \\ H & B & F & Q & y \\ G & F & C & R & z \\ P & Q & R & & \\ x & y & z & & \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Pour vérifier cette identité il suffit de remarquer que le coëfficient de x^2 dans la dernière équation est (Voir Günther Kap. III, § 4)

$$\begin{vmatrix} B & F & Q \\ F & C & R \\ Q & R & \end{vmatrix} = aX^2, \text{ etc.}$$

§ 3. On peut donc remplacer l'équation donnée du second degré par la première équation du paragraphe précédent. Pour éliminer z de l'équation (2) et de

$$px+qy+rz=0$$

ajoutons la première ligne du déterminant (2) multipliée par p, et la deuxième multipliée par q à la troisième ligne multipliée par r. En appliquant les identités (1) on trouve

$$\begin{vmatrix} A & H & G & P & x \\ H & B & F & Q & y \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 \\ P & Q & R & & \\ x & y & z & & \end{vmatrix} = 0$$

Des deux éléments z l'un reste. Pour éliminer celui-ci multiplions la première colonne du dernier déterminant par p, la deuxième par q et ajoutons ces produits au produit de la troisième colonne par r. Le résultat est

$$\begin{vmatrix} A & H & 0 & P & x \\ H & B & 0 & Q & y \\ 0 & 0 & 0 & H & 0 \\ P & Q & H & & \\ x & y & 0 & & \end{vmatrix} = 0, \text{ on}$$

$$\begin{vmatrix} A & H & x \\ H & B & y \\ x & y & \end{vmatrix} = 0, \text{ ou}$$

$$Bx^2 - 2Hxy + Ay^2 = 0$$

§ 4. La dernière équation nous donne

$$\frac{x}{y} = \frac{H \pm \sqrt{(H^2 - AB)}}{B} = \frac{H \pm \sqrt{-X\frac{d^2X}{da\,.\,db}}}{B} = \frac{H \pm r\sqrt{X}}{B}$$

De la même manière on trouve

$$Cx^2 + Az^2 - 2Gxz = 0$$

$$\frac{x}{z} = \frac{G \pm q\sqrt{X}}{C}$$

$$Cy^2 + Bz^2 - 2Fyz = 0$$

$$\frac{y}{z} = \frac{F \pm p\sqrt{X}}{C}$$

§ 5. **Résultat.** En éliminant x, y et z entre les équations

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$
$$\text{et } px + qy + rz = 0$$

on obtient successivement

$$\begin{vmatrix} B & F & y \\ F & C & z \\ y & z & \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & G & x \\ G & C & z \\ x & z & \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \quad \begin{vmatrix} A & H & x \\ H & B & y \\ x & y & \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$Cy^2 + Bz^2 - 2Fyz = 0$$
$$Cx^2 + Az^2 - 2Gxz = 0$$
$$Bx^2 + Ay^2 - 2Hxy = 0.$$

$$\frac{y}{z} = \frac{F \pm p\sqrt{X}}{C} = \frac{B}{F \mp p\sqrt{X}}$$

$$\frac{z}{x} = \frac{G \pm q\sqrt{X}}{A} = \frac{C}{G \mp q\sqrt{X}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{H \pm r\sqrt{X}}{B} = \frac{A}{H \mp r\sqrt{X}}$$

Remarque. De ces résultats on voit immédiatement que les

Digitized by Google

racines sont imaginaires, quand X est négatif. Quand $X = 0$, les racines sont

$$x:y:z = A:H:G = H:B:F = G:F:C = P:Q:R$$

§ 6. **Application à la géométrie analytique.** Quand les équations données représentent une conique et une droite en coordonnées trilinéaires, les résultats précédents nous donnent les points d'intersection de la conique et de la droite.

Pour obtenir les points d'intersection d'une conique et d'une droite, dont les équations sont données en coordonnées cartésiennes, nous posons $z = 1$, ce qui donne

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$px + qy + r = 0$$

$$\begin{vmatrix} A & G & x \\ G & C & 1 \\ x & 1 & \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } Cx^2 - 2Gx + A = 0$$

$$\begin{vmatrix} B & F & y \\ F & C & 1 \\ y & 1 & \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } Cy^2 - 2Fy + B = 0$$

$$x = \frac{G \mp q\sqrt{X}}{C} = \frac{A}{G \pm q\sqrt{X}}$$

$$y = \frac{F \pm p\sqrt{X}}{C} = \frac{B}{F \mp p\sqrt{X}}$$

Quand $X = 0$, la droite est tangente à la conique et les coordonnées du point de contact sont

$$x = \frac{A}{G} = \frac{H}{F} = \frac{G}{C} = \frac{P}{R}; \quad y = \frac{B}{F} = \frac{F}{C} = \frac{H}{G} = \frac{Q}{R}$$

Trois équations à trois inconnues.

§ 7. Soit donné le système d'équations

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta = 0$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2\delta = 0$$

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 + 2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + 2n\alpha\beta + \dots$$
$$+ 2p\alpha\delta + 2q\beta\delta + 2r\gamma\delta = 0$$

$$\text{Posons } X \equiv \begin{vmatrix} a & n & m & p & a_1 & a_2 \\ n & b & l & q & b_1 & b_2 \\ m & l & c & r & c_1 & c_2 \\ p & q & r & d & d_1 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & & \end{vmatrix}$$

Le déterminant à éléments réciproques soit

$$\begin{vmatrix} A & N & M & P & A_1 & A_2 \\ N & B & L & Q & B_1 & B_2 \\ M & L & C & R & C_1 & C_2 \\ P & Q & R & D & D_1 & D_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & \end{vmatrix}$$

§ 8. L'équation donnée du second degré peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} A & N & M & P & A_1 & A_2 & \alpha \\ N & B & L & Q & B_1 & B_2 & \beta \\ M & L & C & R & C_1 & C_2 & \gamma \\ P & Q & R & D & D_1 & D_2 & \delta \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & & & \end{vmatrix} = 0$$

Ajoutons au produit de la quatrième ligne par d_1 la première ligne multipliée par a_1, la deuxième multipliée par b_1 et la troisième multipliée par c_1

Puisqu'on a

$$Aa_1 + Nb_1 + Mc_1 + Pd_1 = 0$$
$$Na_1 + Bb_1 + Lc_1 + Qd_1 = 0$$
$$Ma_1 + Lb_1 + Cc_1 + Rd_1 = 0$$
$$Pa_1 + Qb_1 + Rc_1 + Dd_1 = X^5$$
$$A_2a_1 + B_2b_1 + C_2c + D_2d_1 = 0$$
$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta = 0$$

tous les éléments de la quatrième ligue, la cinquième excepté, deviennent zéro. De la même manière on peut rendre zéro tons les éléments de la quatrième colouue à l'exption du cinquième élément. L'équation du secoud degré peut donc être remplacée par cette autre

$$\begin{vmatrix} A & N & M & A_2 & \alpha \\ N & B & L & B_2 & \beta \\ M & L & C & C_2 & \gamma \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \\ \alpha & \beta & \gamma & & \end{vmatrix} = 0$$

qui ne contient pas δ.

§ 9. Pour éliminer γ, de

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta = 0$$
$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2\delta = 0$$

déduisons l'équation suivante sans δ

$$(a_1d_2 - a_2d_1)\alpha + (b_1d_2 - b_2d_1)\beta + (c_1d_2 - c_2d_1)\gamma = 0$$

Dans le dernier déterminant nous multiplions la première ligne par $(a_1d_2 - a_2d_1)$, la deuxième ligne par $(b_1d_2 - b_2d_1)$ et nous ajoutons ces produits à la troisième ligne multipliée par $(c_1d_2 - c_2d_1)$. Au lieu du terme γ de la troisième ligne on obtient zéro. Le premier terme de cette ligne devient

$$\begin{aligned} & A(a_1d_2 - a_2d_1) + N(b_1d_2 - b_2d_1) + M(c_1d_2 - c_2d_1) \\ & = (Aa_1 + Nb_1 + Mc_1)\,d_2 - (Aa_2 + Nb_2 + Mc_2)\,d_1 \\ & = (-Pd_1)\,d_2 - (-Pd_2)\,d_1 = 0 \end{aligned}$$

De cette manière on montre que tous les termes de la troisième ligne, à l'exception du quatrième, deviennent zéro. De la même manière on peut rendre zéro tous les termes de la troisième colonne à l'exception du quatrième. L'équation devient donc

$$\begin{vmatrix} A & N & \alpha \\ N & B & \beta \\ \alpha & \beta & \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$B\alpha^2 - 2N\alpha\beta + A\beta^2 = 0$$

De la dernière équation s'ensuit

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{N \pm \sqrt{(N^2 - AB)}}{B} = \frac{N \pm \sqrt{\left(-X\dfrac{d^2X}{da\,.\,db}\right)}}{B}$$

Or $$\frac{d^2X}{da\,.\,db} = \begin{vmatrix} c & r & c_1 & c_2 \\ r & d & d_1 & d_2 \\ c_1 & d_1 & & \\ c_2 & d_2 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}^2,$$ donc

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{N \pm \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} \sqrt{-X}}{B}$$

§ 10. De la même manière que dans les paragraphes précédents on trouve

$$\begin{vmatrix} A & P & \alpha \\ P & D & \delta \\ \alpha & \delta & \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } D\alpha^2 - 2P\alpha\delta + A\delta^2 = 0$$

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{P \pm \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \sqrt{-X}}{D}$$

$$\begin{vmatrix} B & Q & \beta \\ Q & D & \delta \\ \beta & \delta & \end{vmatrix} = \text{ ou } D\beta^2 - 2Q\beta\delta + B\delta^2 = 0$$

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{Q \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \sqrt{-X}}{D}$$

$$\begin{vmatrix} C & R & \gamma \\ R & D & \delta \\ \gamma & \delta & \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } D\gamma^2 - 2R\gamma\delta + C\delta^2 = 0$$

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{R \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \sqrt{-X}}{D}$$

Remarque. Les valeurs trouvées nous montrent immédiatement que les racines sont imaginaires quand X est positif.

§ 11. Les solutions du paragraphe précédent vous donnent les points d'intersection en coordonnées quadriplanaires d'une surface du second degré et d'une droite.

En coordonnées cartésiennes on a pour les points d'intersection de la surface

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy + 2px + 2qy + 2rz + d = 0$$

$$\text{et de la droite} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{P \pm \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \sqrt{-X}}{D} = \frac{A}{P \mp \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \sqrt{-X}}$$

Digitized by Google

$$y = \frac{Q \mp \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \sqrt{-X}}{D} = \frac{B}{Q \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \sqrt{-X}}$$

$$z = \frac{R \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \sqrt{-X}}{D} = \frac{C}{R \mp \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \sqrt{-X}}$$

Quand $X = 0$ la droite est tangente à la surface et les coordonnées du point de contact sont

$$x_1 = \frac{P}{D}, \quad y_1 = \frac{Q}{D} \text{ et } z_1 = \frac{R}{D}.$$

La courbe d'intersection d'une surface du second degré et d'un plan.

§ 12. L'équation d'une surface du second degré soit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy + 2px + 2qy + 2rz + d = 0$$

et l'équation d'un plan

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

En éliminant x de la même manière que dans le paragraphe 3 on trouve pour la projection de la courbe d'intersection sur le plan des yz

$$\begin{vmatrix} B & L & Q & y \\ L & C & R & z \\ Q & R & D & 1 \\ y & z & 1 & \end{vmatrix} = 0$$

De même pour les autres projections.

Quatre équations à quatre inconnues.

§ 13. Soient données

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta + e_1\varepsilon = 0$$
$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2\delta + e_2\varepsilon = 0$$
$$a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma + d_3\delta + e_3\varepsilon = 0$$
$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 + e\varepsilon^2 + 2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + 2n\alpha\beta + 2p\alpha\delta + 2q\beta\delta + 2r\gamma\delta + 2s\alpha\varepsilon + 2t\beta\varepsilon + 2u\gamma\varepsilon + 2v\delta\varepsilon = 0$$

$$\text{Posons } X \equiv \begin{vmatrix} a & n & m & p & s & a_1 & a_2 & a_3 \\ n & b & l & q & t & b_1 & b_2 & b_3 \\ m & l & c & r & u & c_1 & c_2 & c_3 \\ p & q & r & d & v & d_1 & d_2 & d_3 \\ s & t & u & v & e & e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & & & \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & & & \end{vmatrix}$$

L'équation du second degré peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} A & N & M & P & S & A_1 & A_2 & A_3 & \alpha \\ N & B & L & Q & T & B_1 & B_2 & B_3 & \beta \\ M & L & C & R & U & C_1 & C_2 & C_3 & \gamma \\ P & Q & R & D & V & D_1 & D_2 & D_3 & \delta \\ S & T & U & V & E & E_1 & E_2 & E_3 & \varepsilon \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & & & & \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & E_3 & & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & & & & \end{vmatrix} = 0$$

Eliminant γ, δ et ε comme dans les §§ 8 et 9 on trouve

$$\begin{vmatrix} A & N & \alpha \\ N & B & \beta \\ \alpha & \beta & \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad B\alpha^2 - 2N\alpha\beta + A\beta^2 = 0$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{N \pm \sqrt{(N^2 - AB)}}{B} = \frac{N \pm \sqrt{-X \dfrac{\partial^2 X}{da\,.\,db}}}{B}$$

Or

$$\frac{d^2 X}{da\,.\,db} = \begin{vmatrix} c & r & u & c_1 & d_1 & e_1 \\ r & d & v & c_2 & d_2 & e_2 \\ u & v & e & c_3 & d_3 & e_3 \\ e_1 & d_1 & e_1 & & & \\ e_2 & d_2 & e_2 & & & \\ c_3 & d_3 & e_3 & & & \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix}$$

donc

Digitized by Google

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{N \pm \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} \sqrt{X}}{B}$$

De même pour les autres inconnues.

On peut continuer ainsi pour un nombre quelconque d'équations linéaires. Les formules qu'on obtient sont à la fois très-simples et très-mnémoniques. Pour n équations linéaires on a

$$\frac{\sigma}{\beta} = N \pm \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & \dots \\ c_2 & d_2 & \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ c_n & & \end{vmatrix} \sqrt{X(-1)^{n-1}}$$

Groningue, 1 Juillet 1876.

XV.

Untersuchungen über algebraische Gleichungen.

Von

Alfred Siebel.

Fortsetzung von XI. in T. LVIII.

Artikel V. (§ 18 — § 24.)

Hierzu eine Figurentafel und drei Tabellen.

Hülfsberechnungen zur Trennung.

A.

Berechnung von $\overset{m}{z}_{s,r}$ und $\overset{m}{a}_{s,r}$.

§ 18.

I. Es handelt sich bei der Trennung nach dem vorigen Artikel in gewissen Fällen um die Bestimmung eines Näherungswertes der positiven Wurzel einer Gleichung der folgenden Form (siehe § 15 (3) und § 16 (1))

$$(1)^a \quad G(x) = \frac{(r-e)(r-1)}{e} . x^{r-2} - (r-2)x^{r-3} - (r-3)x^{r-4} - \dots - 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

oder (was dasselbe) derjenigen Wurzel von

$$(1)^b \quad M(x) = e . (x-1)^2 . G(x) = r(r-1)(x-1)^2 x^{r-2} - e\varphi_r(x) = 0$$

welche > 1 ist, wo

$$\varphi_r(x) = (r-1)x^r - r . x^{r-1} + 1,$$

e und r ganze Zahlen sind und

$$2 < e < r.$$

Bezeichnen wir jene Wurzel statt wie früher mit $\overset{\mathfrak{m}}{z}_{e,r}$ im Folgenden kürzer mit $\mathfrak{m}$, so dass

$$\mathfrak{m} = \overset{\mathfrak{m}}{z}_{e,r},$$

so ist

$$(2)^a \qquad \overset{\mathfrak{m}}{a}_{e,r} = \sqrt[e]{\frac{\binom{r}{e}}{\varphi_r(\mathfrak{m})}\,\frac{f(x_1)}{c_{n-2}}},$$

oder wegen $(1)^b$

$$(2)^b \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overset{\mathfrak{m}}{a}_{e,r} = A_{e,r} \cdot \sqrt[e]{\dfrac{f(x_1)}{c_{n-e}}} \\ \text{wo} \\ A_{e,r} = \sqrt[e]{\dfrac{e\binom{r}{e}}{r(r-1)(\mathfrak{m}-1)^2\mathfrak{m}^{r-2}}} \end{array} \right.$$

aus welcher Formel sich $\overset{\mathfrak{m}}{a}_{e,r}$ leicht logarithmisch berechnen lässt, wenn $\mathfrak{m}$ bekannt ist. (Siehe III).

II. Wir beschäftigen uns zunächst mit den Functionen $G(x)$ und $M(x)$ für

$$x > 1.$$

Die beiden ersten Abgeleiteten von $G(x)$ sind

$$G'(x) = \frac{(r-e)(r-1)(r-2)}{e} . x^{r-3} - (r-2)(r-3)x^{r-4} - \ldots$$
$$- 4.3x^2 - 3.2.x - 2.1,$$

$$G''(x) = \frac{(r-e)(r-1)(r-2)(r-3)}{e} . x^{r-4} - (r-2)(r-3)(r-4)x^{r-5} - \ldots$$
$$- 4.3.2x - 3.2.1$$

und wegen

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$1.2 + 2.3 + \ldots + (n-2)(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3},$$

$$1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + (n-3)(n-2)(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4},$$

ist speciell

$$G(1) = r(r-1)\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{2}\right) < 0$$

$$G'(1) = r(r-1)(r-2)\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3}\right) \lesseqgtr 0, \text{ wenn } e \gtreqless 3$$

$$G''(1) = r(r-1)(r-2)(r-3)\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{4}\right), \quad \text{wenn } e \begin{cases} = 3 \\ = \\ < 4 \end{cases}$$

Bemerken wir noch, dass die Functionen $G(x)$, $G'(x)$, $G''(x)$ zwischen 0 und $+\infty$ Einmal ihr Zeichen ändern, ($r > 3$ vorausgesetzt) so können wir uns leicht ein Bild der Curve

$$y = G(x)$$

machen. Fig. I. stellt diese dar für $r = 6$, $e = 3$, $1 = 20^{mm}$.

Ferner ist

$$M'(x) = e(x-1)^2 G'(x) + G(x).2e(x-1)$$
$$M''(x) = e(x-1)^2 G''(x) + 4e(x-1)G'(x) + 2e.G(x),$$

speciell

$$M(1) = 0; \quad M'(1) = 0, \quad M''(1) = 2eG(1) = r(r-1)(2-e) < 0.$$

Um $M'(x)$ und $M''(x)$ zu entwickeln, gehen wir auf I $(1)^b$ zurück:

$$M'(x) = r(r-1)[(x-1)^2.(r-2)x^{r-3} + x^{r-2}.2(x-1)] - e.r(r-1)x^{r-2}(x-1)$$
$$= r(r-1)(x-1)x^{r-3}\{(r-2)(x-1) + 2x - ex\}$$

(1) $$M'(x) = r(r-1)(x-1)x^{r-3}(sx-(r-2))$$

also

(2) $$M'\left(\frac{r.2}{s}\right) = 0$$

$$M''(x) = r(r-1)x^{r-4}\{(r-1)sx^2 - (r+s-2)(r-2)x + (r-3)(r-2)\}$$

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich der Verlauf von

$$y = M(x)$$

wie in Fig. II. ($r = 6$, $e = 3$, $1 = 20^{mm}$).

III. Die Figuren I. und II. lassen erkennen, dass sich die Euler-sche Näherungs-Methode mit Vorteil zur Berechnung von $\mathrm{m} = \overset{m}{z}_{s,r}$ anwenden lässt. Die Annäherung ist eine sehr rasche.

Man erhält speciell die Näherungswerte

$$\overset{\mathfrak{m}}{z}_{1,4} = 2,414\,213\,562 \qquad \log A_{3,4} = 9^{*},644\,473$$

$$_{1,5} = 3,627\,365\,085 \qquad _{4,5} = 9,370\,546$$

$$_{2,5} = 1,697\,122\,616 \qquad _{3,5} = 9,933\,444$$

$$_{1,6} = 4,732\,626\,153 \qquad _{5,4} = 9,231\,112$$

$$_{2,6} = 2,304\,173\,145 \qquad _{4,6} = 9,655\,075$$

$$_{3,6} = 1,461\,722\,631 \qquad _{3,6} = \bar{0},104\,269$$

Wir werden im Folgenden eine **zweite Methode zur Berechnnng** von $\mathfrak{m}$ ableiten, welche sich besonders bei grösserem r empfiehlt (§ 20).

Man wird sich dabei mit einer weniger genanen Annäherung wie die vorstehende begnügen und eine solche Hülfsberechnung**) auch mitunter ganz umgehen. (Nötig ist letztere überhaupt zur Trennnng nicht).

§. 19.

Tabelle über die Anfangsziffern von $\mathfrak{m}$.

s \ r	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	.	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
3	.	.	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
4	.	.	.	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
5	.	.	.	.	1	1	1	1	2	2	2	2	2
6	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	2	2	2
7	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	2

Es zeigt sich gleich zu Anfang der Berechnung dieser Tabelle, dass die Ziffern nach einem einfachen Bildnngsgesetz fortschreiten und nach diesem sind die weiteren Werte eingeschrieben·

Dasselbe lässt sich so formnliren:

*) Zur Abkürzung für $-1 + 0,6 \ldots$

**) Der Verf. behält sich die Berechnung von $z_{s,r}^{\mathfrak{m}}$ und $\log A_{s,r}$ für $r < 6$ vor.

(1) Ist bei der Division von r durch $s = r - e\ q$ der grösste Quotient, t der entspr. (kleinste) Rest, so dass

$$r = q.s + t, \quad 0 \leqq t < s,$$

so stimmt jene Anfangsziffer mit der von

$$\frac{r-2}{s}$$

überein.

Sie ist $= q - 2 = r - 2$ wenn $s = 1$

$= q - 1$ „ $s > 1$ und $t < 2$

$= q$ „ „ „ $t \geqq 2$

Zum Beweise dieser auf inductivem Wege gefundenen interessanten Eigenschaft der pos. Wurzel der Gleichung (1)[a] in § 18 I. formen wir die Function $M(x)$, § 18 I., indem wir zunächst den Ausdruck für $\varphi_r(x)$ substituiren, wie folgt um:

$$M(x) = x^r\{r(r-1) - e(r-1)\} - x^{r-1}\{2r(r-1) - er\} + x^{r-2}.r(r-1) - e$$
$$= x^{r-2}.N(x) - e,$$

wo

$$N(x) = (r-1)s.x^2 - (r+s-2)r.x + r(r-1)$$

Setzen wir

$$x = \frac{r-z}{s},$$

so wird

$$s.N(x) = (r-1)(r-z)^2 - (r+s-2)r(r-z) + r(r-1)s$$

$$N(x) = \frac{1}{s}\{z^2.(r-1) - z.r(r-s) + r(r-s)\}$$

$$N\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{r(r-s)}{s} = \frac{r.e}{s} \text{ entspr. } z = 0$$

$$N\left(\frac{r-1}{s}\right) = \frac{r-1}{s} \qquad „ \quad z = 1$$

also

$$M\left(\frac{r}{s}\right) = (r-s)\left(\frac{r}{s}\right)^{r-1} - e = e\left(\left(\frac{r}{s}\right)^{r-1} - 1\right)$$

$$M\left(\frac{r-1}{s}\right) = \left(\frac{r-1}{s}\right)^{r-1} - e.$$

Da $M\left(\frac{r}{s}\right) > 0$, so liegt $\frac{r}{s}$ auf der pos. Seite von m.

Untersuchen wir, welche Lage $\frac{r-1}{s}$ zu $\mathfrak{m}$ hat. Es ist

$$M\left(\frac{r-1}{s}\right)=\left(\frac{r-1}{r-e}\right)^{r-1}-e=\left(1+\frac{e-1}{r-e}\right)^{r-1}-e$$

$$=-e+1+\binom{r-1}{1}\frac{e-1}{r-e}+\binom{r-1}{2}\left(\frac{e-1}{r-e}\right)^2+\dots$$

$$>(e-1)\left(\frac{r-1}{r-e}-1\right)=\frac{(e-1)^2}{r-e}>0,$$

also auch

$$\frac{r-1}{s}>\mathfrak{m}.$$

Wie $\frac{r-2}{s}$ zu $\mathfrak{m}$ liegt, brauchen wir nicht in vorstehender Weise zu untersuchen, da aus § 18 II (2), siehe auch Fig. II., hervorgeht, dass

$$\frac{r-2}{s}<\mathfrak{m}.$$

(2) Es resultirt hieraus, dass sich $\mathfrak{m}$ in dem Intervall

$$\left(\frac{r-2}{s},\ \frac{r-1}{s}\right)$$

befindet, dessen Grösse $=\frac{1}{s}\overset{=}{<}1$ wenn $s\overset{=}{>}1$.

Also wenn

$s=1$, so ist $r-2<\mathfrak{m}<r-1$

$s>1$ und $t=0$, $q=\frac{r}{s}$ „ $q-1\overset{=}{<}\frac{r-2}{s}<\mathfrak{m}<\frac{r-1}{s}<\frac{r}{s}=q$

„ $=1$, $=\frac{r-1}{s}$; $q-1<$ „ „ „ $=q<\frac{r}{s}$

„ $=2$, $=\frac{r-2}{s}$; $q=$ „ „ „ $<\frac{r}{s}\overset{=}{<}q+1$

„ >2, $=\frac{r-t}{s}$; $q<$ „ „ „ $<\frac{r}{s}<q+1$

(W. z. b.)

Aus $M(x)=e(x-1)^2G(x)$; $M'(x)=e(x-1)^2G'(x)+G(x).2e(x-1)$ folgt ferner

$$\frac{M'(x)}{M(x)}=\frac{G'(x)}{G(x)}+\frac{2}{x-1}$$

Für $x=\frac{r-2}{s}$ fanden wir $M'(x)=0$, $M(x)<0$, also

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = -\frac{2}{x-1}.\quad \frac{G(x)}{G'(x)} = -\frac{x-1}{2}$$

Zwischen jenem x nnd $x - \frac{G(x)}{G'(x)}$, d. h. zw. x und $\frac{3x-1}{2}$ liegt (nach Euler) die Wurzel m. Die Grösse dieses Intervalls, dessen Anfangswert mit dem von (2) übereinstimmt, ist

$$\frac{x-1}{2} = \frac{r-2-s}{2s} \overset{=}{\lessgtr} \frac{1}{s},\quad \text{wenn } e \overset{=}{\lessgtr} 4$$

Wir haben somit ein 3tes Kriterium:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Ist } e = 3, \text{ so liegt m in dem Intervall} \\ \qquad \left(\frac{r-2}{s},\quad \frac{r-1{,}5}{s}\right) \\ \text{d. i.} \\ \qquad \left(1+\frac{1}{r-3},\quad 1+\frac{3}{2(r-3)}\right). \\ \text{welches halb so gross als das nach (2) ist.} \end{array}\right.$$

Untersnchen wir die gegenseitige Lage von

$$\frac{r-2}{s},\quad z_0,\quad z_1,\quad z_{11} \text{ zu m}$$

mit z_1 und z_{11} die Wurzeln von $N(x) = 0$ bezeichnet, so dass

$$\left.\begin{array}{l} z_1 \\ z_{11} \end{array}\right\} = z_0 \pm \sqrt{z_0^2 - \frac{r}{s}}$$

$$z_0 = \frac{r+s-2}{2(r-1)} \cdot \frac{r}{s}$$

nnd zwar zunächst die Lage von $\frac{r-2}{s}$ zn z_0, dann die von $\frac{r-2}{s}$ zu z_{11} und z_1, so finden wir, jene Wnrzeln als reell vorausgesetzt:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Ist } s > \frac{(r-2)^2}{r} \text{ so } \frac{r-2}{s} < z_{11} < z_0 < z_1 < \text{m} \\ \quad ,, \ \underline{<} \quad ,, \quad ,, \quad ,, \ \underline{<} \frac{r-2}{s} < z_1 < \text{m} \end{array}\right\} \frac{r-2}{s} < z_1 < \text{m}$$

$\left(s = \frac{(r-2)^2}{r} \text{ bedingt } r = 4,\ s = 1\right)$

Es ergaben sich noch folgende Kriterien, worin

$$F(x) = \sqrt[r-2]{\frac{e}{N(x)}}$$

(5)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ist } z_0^2 - \frac{r}{s} \underset{=}{>} 0, \text{ so hat man für jedes } x \overset{=}{>} z_1 \\[2ex] \alpha)\ z_1 \quad \underset{\rightarrow \ldots \cdot}{x} < \mathfrak{m} < \underset{\leftarrow}{F(x)} \quad \text{oder} \quad \beta)\ \underset{\rightarrow \ldots \cdot}{F(x)} < \mathfrak{m} < \underset{\leftarrow}{x} \end{array} \right.$$

Die Pfeile deuten an, in welchem Sinne $F(x)$ und x sich gleichzeitig ändern; bis sie mit $\mathfrak{m}$ zusammen fallen (sämmtliche Werte als Abscissen gedacht).

(6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ist } z_0^2 - \frac{r}{s} < 0, \quad \text{so} \quad \frac{r-2}{s} < z_0 \gtrless \mathfrak{m} \\[2ex] \text{Ist dabei 1) } F(z_0) < z_0, \text{ so ferner } \mathfrak{m} < F(z_0) < z_0 \text{ und} \\[1ex] \qquad \alpha)\ \mathfrak{m} < \underset{\cdot \ldots \leftarrow}{F(x)} < \underset{\leftarrow}{x} < z_0 \quad \text{oder} \quad \beta)\ \ \underset{\rightarrow}{x} \quad \underset{\rightarrow \ldots \cdot}{F(x)} \quad \mathfrak{m} \quad z_0 \\[2ex] \text{Ist} \qquad 2)\ F(z_0) > z_0 \quad \text{so} \quad z_0 < \mathfrak{m} \quad \text{und} \\[1ex] \qquad \alpha)\ z_0 \quad \underset{\rightarrow \ldots \cdot}{x} \quad \mathfrak{m} \quad \underset{\leftarrow}{F(x)} \quad \text{oder} \quad \beta)\ \ z_0 \quad \underset{\rightarrow \ldots \cdot}{F(x)} \quad \mathfrak{m} \quad \underset{\ldots \leftarrow}{x} \end{array} \right.$$

§ 20.

Mit Hülfe der gewonnenen Kriterien lässt sich die Wurzel

$$\mathfrak{m} = \overset{m}{z_{s,r}}$$

annähernd berechnen. (Siehe § 18. III).

Die hierbei in Anwendung kommenden Formeln sind:

$$M(x) = x^{r-2} N(x) - e$$

$$N(x) = (r-1)s \cdot x^2 - (r+s-2)r \cdot x + r(r-1)$$

$$z_0 = \frac{r+s-2}{2(r-1)} \cdot \frac{r}{s}$$

$$z_1 = z_0 + \sqrt{z_0^2 - \frac{r}{s}}$$

$$N(z_0) = (r-1)s \cdot \left(\frac{r}{s} - z_0^2\right); \quad N\left(\frac{r-2}{s}\right) = r - \frac{(r-2)^2}{s};$$

$$N\left(\frac{r-1}{s}\right) = \frac{r-1}{s}; \quad N\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{r(r-s)}{s}$$

Ferner

1) § 19 (1) giebt die Anfangsziffer von m. (Siehe die Tabelle z. Anfang des § 19).

2) § 19 (2) bezügl. (3) liefert ein Intervall, welches m einschliesst.

3) a) Ist $z_0^2 - \frac{r}{s} \geqq 0$ so „ § 19 (5)

b) „ „ $<$ „ „ (6)

durch wiederholte Anwendung genauere Werte.

Der Fall a) liegt jedenfalls vor, wenn $s < \frac{(r-2)^2}{r}$, um so mehr wenn $s < \frac{r-2}{2}$.

Beispiel I.

$r = 15$, $e = 5$ (also $s = 10$)

1) die Anfangsziffer von m ist $= 1$; 2) m liegt zwischen 1,3 u. 1,4

3) $z_0 = \frac{15+10-2}{2.14} . 1{,}5 = \frac{345}{280} = 1{,}232143$; $z_0^2 = 1{,}518176$; $\frac{r}{s} = 1{,}5$

$z_0^2 - \frac{r}{s} = 0{,}018176 > 0$ (Fall 3)a); $z_1 = 1{,}366$; $x = 1{,}366 < \mathfrak{m} < \frac{+}{\infty}$

$x = 1{,}37$; $F(x) = 1{,}3357$ (Fall § 19 (5) β) also $1{,}335 < \mathfrak{m} < 1{,}37 = x$

$x = 1{,}369$; $F(x) = 1{,}3778$ („ § 19 (5) α) „ $x = 1{,}369 < \mathfrak{m} < 1{,}38$

$\mathfrak{m} = 1{,}369$.

Beispiel II.

$r = 15$, $e = 3$ (also $s = 12$)

1) die Anfangsziffer $= 1$; 2) m liegt im Intervall (1,0833; 1,125)

3) $z_0 = \frac{125}{112} = 1{,}116071$; $z_0^2 - \frac{r}{s} < 0$ (Fall 3 b))

$F(x) = \sqrt[13]{\frac{3}{N(x)}} = \sqrt[12]{\frac{1}{N_1(x)}}$, wo $N_1(x) = 56x^2 - 125x + 70$,

$N_1(z_0) = \frac{55}{224}$

$x = z_0 = 1{,}116$, $F(x) = 1{,}11407 < z_0$ (§ 19 Fall (6) 1) also $\mathfrak{m} < 1{,}11407$

$x =$ 1,1140. $F(x) = 1{,}11399$ ... („ (6) 1,α) „ $\mathfrak{m} < 1{,}11399$

$x =$ 1,11399, $F(x) = 1{,}1139899$ („ „;

Digitized by Google

also annähernd

$$m = 1{,}11399.$$

B.

Berechnung von z.

§ 21.

Eine zweite Hülfsoperation bei der Trennung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen ist, wie wir gesehen, die Bestimmung eines $z > 1$ so, dass

$$\varphi_r(z) = (r-1)z^r - r\,.\,z^{r-1} + 1 \overline{\leqq} p,$$

oder, da $\log p$ gegeben — es ist $p > 0$ — (siehe Fig. IV):

(1) $$\log \varphi_r(z) \overline{\leqq} \log p.$$

Je näher z der Wurzel dieser Gleichung genommen wird, desto zweckmässiger.

Wir haben in § 12. im Allgemeinen angedeutet, wie z bestimmt werden kann, und beschäftigen uns im Folgenden eingehender damit.

Es sei nur von solchen Werten von z, z_1 ... z'... die Rede, welche > 1 sind.

Zunächst leiten wir einige Kriterien ab.

(2) Ist

$$\log \varphi_r(z_1) < \log p < \log \varphi_r(z_2),$$

so

$$z_1 < z < z_2,$$

mit z die Wurzel der Gleichung (1) bezeichnet, also ein brauchbarer Wert

$$z = z_1$$

Ist $\log p$ sehr klein, so dass $\Delta = z - 1$ ein sehr kleiner Bruch, so fliessen aus der Recursionsformel

$$\varphi_r(z) = (z-1)^2\{1 + 2z + 3z^2 + \ldots (r-1)z^{r-2}\}$$

die Näherungsformeln

(3)

$$\Delta^2 . \frac{r(r-1)}{2} = p$$

genauer

$$\Delta^2\left\{\frac{r(r-1)}{2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{3}\Delta\right\} = p$$

$$z = 1 + \Delta$$

Ferner ist nach der Regula falsi, unter den Voraussetzungen in (2) und wenn

$$(4)\quad \begin{cases} z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)\dfrac{\log p - \log \varphi_r(z_1)}{\log \varphi_r(z_2) - \log \varphi_r(z_1)} \\ z_1 < z < z_3 < z_2. \end{cases}$$

Schliesslich:

(5) Die Wurzel z der Gleichung (1) liegt zwischen einem beliebigen $z' > 1$ und $z'' = 1 + (z' - 1)Z'$, wo

$$Z' = \sqrt{\frac{p}{\varphi_r(z')}}$$

denn fassen wir z'' als Function von z' auf, und ist ein bestimmtes $z' \lessgtr z''$, so nimmt, wenn bezügl. $z' \gtrless$ wird, gleichzeitig

$$z'' = 1 + \sqrt{\frac{p}{1 + 2z' + 3z'^2 + \ldots}} \begin{Bmatrix} \text{ab} \\ \text{zu} \end{Bmatrix}.$$

zwischen z' und z'' muss also $z' = z''$ werden und dann ist $z = z'$.

Auf diese Sätze werden wir uns später beziehen (§ 23).

§ 22.

I. In der Formel

$$\varphi_r(z) = (r-1)z^r - rz^{r-1} + 1 = p\,(>0)$$

sei

a) $p < 1$

dann ist

$$\{r - (r-1)z\}z^{r-1} = 1 - p > 0.$$

Die Wurzel z liegt zwischen 1 und $\frac{r}{r-1}$, mithin

$(r-1)z$ „ „ $r-1$ „ r

Wir können daher setzen

$$(r-1)z = r\,.\cos^2\theta,$$

wo

$$0 < \theta < \theta_1, \quad \cos\theta_1 = \sqrt{\frac{r-1}{r}}.$$

Hierdurch geht obige Formel über in

$$r\sin^2\theta\,.\left(\frac{r}{r-1}\right)^{r-1}.\cos^{2(r-1)}\theta = 1 - p$$

$$\sin^2\theta . \cos^{2(r-1)}\theta = \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r}(1-p).$$

Sei

$$(1)^a \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r}(1-p) \\ \gamma = \tfrac{1}{2}\log(\varrho^{2r}P) \\ \varrho \text{ beliebig} > 0 \\ x = \log\varrho\cos\theta \\ t = \log\varrho\sin\theta \\ y = (r-1)x+t \end{array} \right.$$

so

$$(2)^a \quad \left\{ \begin{array}{lll} & \log z = \log\frac{r}{r-1} + 2(x-\log\varrho) & \\ \text{wenn} & y = \gamma & \text{erfüllt ist.} \end{array} \right.$$

b) $p > 1$.

Wir schreiben: $\{(r-1)z-r\}z^{r-1} = p-1$.

Da z zwischen $\frac{r}{r-1}$ und $\overset{+}{\infty}$, also

$(r-1)z$ „ r „ $\overset{+}{\infty}$ liegt, so können wir setzen

$$(r-1)z = r.\frac{1}{\cos^2\theta},$$

wo
$$0 < \theta < 90^0.$$

Substituirt giebt

$$r.\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}.\left(\frac{r}{r-1}\right)^{r-1}.\frac{1}{\cos^{2(r-1)}\theta} = p-1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^{2r}\theta} = \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r}(p-1)$$

Sei

$$(1)^b \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r}(p-1) \\ \gamma = \tfrac{1}{2}\log\frac{\varrho^{2(r-1)}}{P} \\ r,\ x,\ t \text{ wie oben} \\ y = r.x-t \end{array} \right.$$

$$(2)^b \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{so ist} & \\ & \log z = \log\frac{r}{r-1} - 2(x-\log\varrho) \\ \text{wenn} & y = \gamma \end{array} \right.$$

Wir bemerken: ad a) ist $\theta < 45^0$

b) ist $\theta \gtreqless 45^0$ wenn $\gamma \lesseqgtr r\log\frac{\varrho}{\sqrt{2}}$

In beiden Fällen a) und b) ist einer Gleichung von der Form

$$y = \alpha x + \beta t = \gamma^{*})$$

zu genügen, wo x und t in gewissem Zusammenhang stehen. (Es ist $t = \frac{1}{2}\log(\varrho^2 - 10^{2x})$).

Zusammengehörige x und t liefern die log. trigon. Tabellen.

Wir kommen auf obige Formeln in Nr. 24. zurück.

II. Untersuchen wir die Gestalt der Curve

$$y = F(x) = \alpha x + \beta t$$

Es ist

$$F'(x) = \alpha + \beta\frac{dt}{dx} = \alpha + \beta\frac{dt}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{d\log\sin\theta}{d\theta} = \frac{1}{\ln 10}\cdot\operatorname{cotg}\theta;\quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{d\log\cos\theta}{d\theta} = -\frac{1}{\ln 10}\cdot\operatorname{tg}\theta.$$

Substituirt giebt:

$$(1)\quad \begin{cases} F'(x) = \alpha - \beta\,.\operatorname{cotg}^2\theta = \alpha - \beta\, 10^{2(x-t)} \\ \qquad = \alpha - \beta\,.\dfrac{10^{2x}}{\varrho^2 - 10^{2x}} = \dfrac{\alpha\varrho^2 - (\alpha+\beta)10^{2x}}{\varrho^2 - 10^{2x}} \end{cases}$$

Setzen wir für einen Moment $\operatorname{cotg}\theta = u$, so ist die 2. Derivirte

$$F''(x) = -\beta\,.\,2u\,.\frac{du}{dx} = -\beta\,.\,2u\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

$$= -2\beta\operatorname{cotg}\theta\,.\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\ln 10}{\operatorname{tg}\theta} = -2\beta\ln 10\;\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta}$$

(2) $F''(x)$ hat also das Zeichen von $-\beta$.

Im Fall I[a]), wo $\alpha = r-1$, $\beta = +1$ ist:

$$(1)^a\qquad F'(x) = \frac{(r-1)\varrho^2 - r\,.10^{2x}}{\varrho^2 - 10^{2x}} = r - \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 10^{2x}}$$

Im Fall I[b]), wo $\alpha = r$, $\beta = -1$:

---

*) Hierauf lässt sich die Berechnung der reellen Wurzeln einer beliebigen dreigliedrigen Gleichung zurückführen. (Gauss, Beiträge z. Th. d alg. Gl. II. Abth., Göttingen, 1849.)

Digitized by Google

(1)[b] $$F'(x)=\frac{r\varrho^2-(r-1)10^{2x}}{\varrho^2-10^{2x}}=r+\frac{10^{2x}}{\varrho^2-10^{2x}}$$

Die Fälle a) und b) sind in den Figuren III[a] und III[b] dargestellt; dabei ist $\varrho=10$ genommen.

ad a) Für die Grenzwerte von x (siehe die mittl. d. Fig. III[a]).

1) $x=\log\varrho\sqrt{\frac{r-1}{r}}$ (entspr. $\cos\theta=\sqrt{\frac{r-1}{r}}$) d. h. $10^x=\varrho\sqrt{\frac{r-1}{r}}$, folgt aus (1)[a]:

$$F'(x)=0.$$

2) $x=\log\varrho$ (entspr. $\theta=0$) d. h. $10^x=\varrho$:

$$F'(x)=-\infty.$$

Zwischen beiden Werten von x ist nach (2) $F''(x)<0$, also die Curve concav. — Die entsprechenden Ordinaten sind

$$r\log\varrho+\tfrac{1}{2}\log\frac{(r-1)^{r-1}}{r^r}\quad\text{und}\quad-\infty$$

Die 3te der Figuren III[a] bringt für $r=7$ und die Längen-Einheit von 1 Meter einen verhältnissmässig kleinen Teil der Curve zur Anschauung, in der Nähe von C.

ad b) Für die Grenzen von x (Fig. III[b]).

1) $x=-\infty$ (entspr. $\theta=90^0$) giebt (3)[b]:

$$F'(x)=r.$$

2) $x=\log\varrho$ (entspr. $\theta=0$), also $10^{2x}=\varrho^2$:

$$F'(x)=+\infty.$$

Die zugehörigen Ordinaten sind $-\infty$ und $+\infty$. Die Curve ist convex.

In Fig. III[b] ist $r=3$.

Anmerkung. Die Wahl von ϱ hat auf die Gestalt der Curve keinen Einfluss. Es tritt nur eine Parallel-Verschiebung ein, wobei der Anfangspunkt O_1 des Achsensystems $X_1O_1Y_1$ sich auf einer durch O gehenden Geraden ($y=r.x$ ad a); $y=(r-1)x$ ad b) bewegt. Die Bedeutung von $X_1O_1Y_1$ ist aus den Figuren ersichtlich.

§ 23.

Zur raschen Ermittlung von z für die Gleichungen bis einschliesslich vom 6ten Grade ist die Tabelle I. berechnet worden. (Siehe die Anmerk. zu ders.).

Einrichtung der Tabelle I.

Dieselbe enthält für die Werte von z zwischen 1,00001 — zur Raumersparniss mit 1,(4)1 bezeichnet, analog die folgenden Zahlen — und 100, welche sich in der 1sten Verticalspalte befinden, die zugehörigen Werte von $\log\varphi_3(z) \ldots \log\varphi_6(z)$ in der 2ten ... Spalte, auf 4 Decimalen berechnet.

Ferner wurde in bekannter Weise z. B. 8,4771 statt $-10+$ 8,4771 gesetzt.

Die Intervalle von z konnten bei den weit auseinander liegenden Grenzen nicht einander gleich angenommen werden. Das Intervall (1,00001; 100) wurde durch $z = 1{,}0001$; 1,01; 1,1; 2; 11; 50 in 7 Partical-Intervalle zerlegt und jedes in gleiche Teile geteilt von im Verhältniss 10:1 wachsender Grösse: 0,00001; 0,00001 ... 10.

Berechnung von z wenn $r = 2,3 \ldots 6$.

Ist

1) $r = 2$, so $\varphi_r(z) = (z-1)^2 = p$,

$$z = 1 + \sqrt{p}.$$

2) $r = 3 \ldots 6$,

so berechne z mit Hülfe der Tabelle I:

a) nach § 21., (2).

b) wenn $\log p$ sehr klein, so dass die Tabelle nicht ausreicht, nach § 21, (3).

c) Um genauere Werte zu ermitteln, kann man sich der Sätze § 21. (4) und (5) bedienen.

Beispiel.

$$r = 4;\ \log p = 2{,}5508.$$

Nach a) $1{,}10 \leqq z < 1{,}11$

c) $z_3 = 1{,}10 + 0{,}01 . \frac{8{,}5508 - 8{,}5051}{8{,}5906 - 8{,}5051} = 1{,}10 + \frac{0{,}01 . 457}{855} = 1{,}1053 > z$

$z' = 1{,}11$; $\log \varphi_4(z')$ nach der Tabelle $= 2{,}5906$; $\log z' = -\frac{1}{4} . 0{,}0398 =$

$$\log z' = -0{,}0199 = 9{,}9801;\ z' = 0{,}95521;\ z'' = 1{,}10507 < z$$

$$z = 1{,}105 \ldots$$

In manchen Fällen wird man sich mit dem direct abgelesenen Werte begnügen.

§ 24.

Bei der Berechnung von z für grössere r legen wir die Formeln in § 22 zu Grunde. Um das Probiren enger zu begrenzen, sind die Tabellen II^a und II^b berechnet. Sie leisten insofern nicht unwesentliche Dienste als die Aufsuchung eines ersten Näherungswertes ohne einen solchen Anhalt zeitraubender sein kann, als die weitere Annäherung.

Einrichtung der Tabellen II^a und II^b.

Die Tabelle II^a enthält die Werte $(r-1)x + t$

" " II^b " " " $r . x - t$

(siehe § 22 I) für $r = 7 \ldots 15$, $\varrho = 10$ und eine Reihe von $x = \log 10 . \cos\theta$ aus der 7stelligen Tafel von Schrön) auf 4 Decimalen. Die Erhöhung der 4ten Stelle ist wie in Tabelle I. durch einen Strich markirt.

Hülfstabelle. (Siehe § 22, I)

r	$\log \frac{r}{r-1}$	$\log \frac{(r-1)^{r-1}}{r^r}$	$x_{\min}$ für den Fall $p < 0$.
7	0, 066 947	8, 753 221	0, 966 527
8	057 992	690 966	971 004
9	051 153	636 537	974 424
10	045 757	588 183	977 121
11	041 393	544 680	979 304
12	037 789	505 145	981 106
13	034 762	468 911	982 619
14	032 185	435 471	983 908
15	029 963	404 424	985 018

Berechnung von z wenn $v = 7 \dots 15$.

a) $\log p < 0$.

Es ist (siehe § 22. I a))

$$y = (r-1)x + t = \gamma$$

zu lösen. — Bestimme nach den dortigen Formeln (1)^a und mittelst der vorstehenden Tabelle: $\log P$ und γ für $\varrho = 10$ und nehme aus der Tabelle II^a die Werte x_1 und x_2 zwischen welchen x liegt. Ermittle sodann durch Interpolation (Regula falsi) einen genaueren Wert x_3 und durch wiederholte Anwendung der Regula falsi, wobei die log. trigon. Tafeln (zunächst 5stellige und wenn eine grössere Genauigkeit erzielt werden soll 7stellige) zur Hand zu nehmen sind, genaue Werte für x.

Besagte Regel liefert stets einen Wert auf der negativen Seite von x, wie aus der Gestalt der Curve in Fig. III^a hervorgeht.

z ergiebt sich schliesslich aus § 22, (2)^a.

b) $\log p > 0$.

Das Verfahren ist ganz analog wie ad a). Es kommt die Tabelle II^b zur Anwendung.

Man kann sich auch mit Vorteil der „Differenzen" in den log.-trig. Tafeln bedienen. (Siehe folg. Bspl.).

Beispiel.

$$\varphi_{14}(z) = 13z^{14} - 14z^{13} + 1 = \sqrt[6]{91^7}$$

Es ist $p = 91\frac{7}{6} > 1$, also liegt Fall b) vor; $\log p = 2{,}2855483$

$\log(p-1^*) = 2{,}283292$ $\qquad\qquad \frac{1}{2}\log P = 0{,}359382$

$$\frac{\log\frac{13^{13}}{14^{14}}}{\log P} = \frac{8{,}435471}{0{,}718763} \qquad\qquad \gamma = \frac{12{,}640618}{(13{,}000000)}$$

Zu lösen ist:

$$y = 14x - t = \gamma = 12{,}640618.$$

In Tabelle II^b entspricht

---

*) Zur Best. von $\log(a \pm b)$ aus $\log a$ und $\log b$ sind die Taf. d. Add. u. Subtr. Log. für 7 Stellen v. J. Zech (Berlin Weidm. B.) zu empfehlen.

$$\left.\begin{array}{lllll} & y_1 = 12{,}6435: & & x_1 = 0{,}9500095 & \\ & y_2 = 12{,}5551: & & x_2 = 0{,}9450012 & \\ & \vdots & & \vdots & \\ \text{Diffz. } y_1 - y_2 & 885 & \text{Diffz. } x_1 - x_2 & 5 & \\ & \vdots & & \vdots & \\ \text{„ } y_1 - y & 30 & \text{„ } x_1 - x = & 017 & \end{array}\right\} x > 0{,}94984$$

In der 7 stelligen Tafel (von Schrön) gehört zu

$$x = 0{,}9498487 : t = 0{,}6571707$$

Man findet

$$y = 12{,}6407111 > \gamma,$$

um 931 Einh. d. 7. Stelle zu gross. Letzteres x liefert also schon ein brauchbares z. Wir wollen z genauer ermitteln.

Bezeichnen wir die „Differenzen" von x, t, y in Einheiten der 7ten Decimalstelle mit

$$\Delta x,\ \Delta t,\ \Delta y,$$

so entspricht

$$\Delta x = -107 : \Delta t = +413, \text{ also } \Delta y = 14\Delta x - \Delta t = -1911$$

$$\Delta y = -931 : \Delta x = -\frac{107}{1911} \cdot 931 = -52;$$

also annähernd

$$x = 0{,}9498435$$

$$\log z = 0{,}03218\underline{5} - 2(0{,}9498435 - 1) = 0{,}13249\underline{8}$$

$$z = 1{,}35674$$

(Der Fehler von x verhält sich zu dem von y wie $1 : 14 + \frac{413}{107}$, d. i. ca. $1:18$).

Modificirtes Verfahren.

Die Gleichung

$$y = \alpha x + \beta t = \gamma$$

(siehe § 22. I, zu Ende) nimmt, wenn man setzt:

$$u = \sin^2\theta,$$
$$F(u) = \alpha \log(1-u) + \beta \log u,$$
$$\delta = 2(\gamma - (\alpha + \beta)\log \varrho),$$

die Gestalt

$$F(u) = \delta$$

an und es kann diese Gleichung an die Stelle jener treten.

Die 1ste und 2te Derivirte von $F(u)$ sind

Digitized by Google

$$F'(u) = \frac{1}{\ln 10}\left(-\alpha\cdot\frac{1}{1-u}+\beta\cdot\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{\beta-(\alpha+\beta)u}{u(1-u)}$$

$$F''(u) = \frac{1}{\ln 10}\left(-\frac{\alpha}{(1-u)^2}-\frac{\beta}{u^2}\right) = -\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{\alpha u^2+\beta(1-u)^2}{u^2(1-u)^2}.$$

In obigem Falle

a) $p < 1$ ist $\alpha = r-1,\ \ \beta = +1,$

$$F(u) = (r-1)\log(1-u)+\log u = \delta - 2(\gamma - r\log\varrho),$$

$$z = \frac{r}{r-1}\cdot(1-u).$$

b) $p > 1$ ist $\alpha = r,\ \beta = -1,$

$$F(u) = r\log(1-u)-\log u = \delta = 2(\gamma-(r-1)\log\varrho),$$

$$z = \frac{r}{r-1}\cdot\frac{1}{1-u}.$$

ad a) sind die Grenzen von u: 0 und $\frac{1}{r}$;

$$F(0) = -8,\quad F\left(\frac{1}{r}\right) = \log\frac{(r-1)^{r-1}}{r^r}(<0);$$

die Curye $y - F(x)$ ist in diesem Intervall concav, die Ordinaten wachsen mit x.

$$F'(x = 0 \text{ für } x = \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{1}{r}$$

ad b) sind die Grenzen von u: 0 nnd 1; $F(0) = \infty$, $F(1) = -\infty$

Die Curve $x = F(x)$ ist convex zwischen 0 und $\frac{1}{\sqrt{r}+1}\left(=\frac{\sqrt{r}-1}{r-1}\right)$. concav von diesem Werte an bis $u = 1$. Der Wendepunkt liegt nnterhalb der Abscissenachse, denn

$$F\frac{1}{\sqrt{r}+1} = \log\frac{(\sqrt{r})^r}{(\sqrt{r}+1)^{r-1}};$$

$$\sqrt{r^r} < (\sqrt{r}+1)^{r-1} \text{ da } \sqrt{r} < \left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{r-1} = \sqrt{r}+\frac{r-\sqrt{r}}{r}+\left(\frac{r-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^2+\ldots \text{ also } F\frac{1}{\sqrt{r}+1} < 0.$$

Die Ordinaten nehmen zw. 0 und 1 beständig ab wenn x wächst.

Die Gleichung

$$f(u) = F(u) - \delta = 0$$

lässt sich auch wie folgt lösen.

Ist u_0 vorläufig beliebig,

$$u = (1+\varepsilon)u_0,$$

so

$$f(u) = \alpha \log\left(1 - \frac{u_0}{1-u_0} \cdot \varepsilon\right) + \beta \log(1+\varepsilon) + f(u_0)$$

und wenn

> u_0 ein Näherungswert der Wurzel von $f(u) = 0$, so dass
> ε sehr klein,

so ist annähernd

$$\varepsilon = \frac{\ln 10 . f(u_0)}{\alpha \dfrac{u_0}{1-u_0} - \beta}$$

und ein genauerer Näherungswert

$$u_1 = (1+\varepsilon)u_0$$

u. s. w.

Ist u_0 sehr klein, so gestaltet sich die Lösung noch einfacher, wie folgendes

Beispiel

zeigt. Zur Abkürzung bedeute: $\sim$ „annähernd gleich"

Es sei ad a)

$$\text{wo } p < 1, \quad \alpha = r-1, \quad \beta = +1, \quad \varrho = 10:$$

$\gamma = 0$, mithin $\delta = -2r$, so ist $u_0 = \frac{1}{10^{2r}}$ ein erster Näherungswert und sehr klein wenn r gross, z. B. $= 7$,

$$f(u_0) = (r-1)\log\left(1 - \frac{1}{10^{2r}}\right) \sim -\frac{(r-1)}{\ln 10 . 10^{2r}}$$

$$\varepsilon = -\frac{(r-1)}{10^{2r}\left[\dfrac{(r-1)}{10^{2r}-1} - 1\right]} \sim \frac{r-1}{10^{2r} - (r-1)};$$

$$u_1 = \frac{1}{10^{2r} - (r-1)} \sim \frac{1}{10^{2r}} + \frac{r-1}{10^{4r}}$$

Probe:

$$f(u_1) = (r-1)\log\left(1-\frac{1}{10^{2r}-(r-1)}\right)+\log\frac{1}{10^{2r}-(r-1)}+2r =$$
$$= (r-1)\log(10^{2r}-r)-r\log(10^{2r}-(r-1))+2r =$$
$$= (r-1)\log\left(1-\frac{r}{10^{2r}}\right)-r\log\left(1-\frac{r-1}{10^{2r}}\right)+(r-1)2r-r.2r+2r$$
$$\sim\left[-(r-1)\frac{r}{10^{2r}}+r.\frac{(r-1)}{10^{2r}}\right]\frac{1}{\ln 10}=0.$$

Ob und in wie weit sich in ähnlicher Weise wie das Trennungs-Problem (Art. IV. und Art. V.): das Problem der Annäherung an die reellen Wurzeln der algebraischen Gleichungen behandeln lässt, wollen wir im nächsten Artikel untersuchen.

XVI.

Ueber das Rollen der Flächen auf einander.

Von

R. Hoppe.

Das Rollen ebener Curven, Walzen oder beliebiger abwickelbarer Flächen, die sich längs der Erzeugenden berühren, auf einander ist eine Bewegung nnter Berührnng ohne Gleiten. Beim Rollen beliebiger Flächen, die sich nur in einem Punkte berühren, kommt noch eine Bedingung hinzu: es ist eine Bewegung unter Berührung ohne Gleiten nnd ohne Rotation um die Normale. Um die 2 letzten Bedingnngen zu definiren, so besteht das Nichtgleiten darin, dass der Berührnngspnnkt auf beiden Flächen gleich lange Curven beschreibt, das Nichtrotiren darin, dass der Punkt der einen Fläche, welcher die andre soeben berührt hat, sich in normaler Richtung von ihr entfernt. Dies normale Aufsteigen lässt sich durch Grössen feststellen. Der vormalige Berührungspunkt P', welcher vom nachfolgenden Berührungspunkt P um das beschriebene Linienelement ∂s absteht, hat eine unendlich kleine Entfernung 2. Ordnung von der Berührnngsebene, desgleichen der entsprechende Punkt P'' auf der andern Fläche. Im Fall des normalen Aufsteigens ist der Winkel zwischen $P'P''$ und der Normale in P nnendlich klein, folglich die Projection von $P'P''$ auf die Berührungsebene unendlich klein höherer als 2. Ordnnng. Folglich stimmen die Projectionen der Curvenelemente $PP' = \partial s$ und $PP'' = \partial s$ bis anf 2. Ordnung überein. Folglich haben sie eine gleiche Krümmung in P. Die Krümmung der auf die Berührungsebene projicirten Curve heisst bekanntlich die geodätische Krümmung der auf der Fläche befindlichen Curve. Demnach können wir die Bedingungen des Rollens zweier Flächen anf einander folgendermassen aufstellen:

Digitized by Google

1) Die Flächen berühren einander beständig.

2) Die Curven, welche der Berührungspunkt auf beiden gleichzeitig beschreibt, berühren sich beständig.

3) Diese Curven sind gleich lang.

4) Sie haben gleiche geodätische Krümmung.

Da nun eine Curve auf einer gegebenen Fläche durch Anfangspunkt, Anfangsrichtung und durch eine Gleichung zwischen dem Bogen und der geodätischen Krümmung bestimmt ist, so folgt, dass die 2 genannten Curven sich gegenseitig vollständig bestimmen, wenn die Flächen und ihre Lage bei anfänglicher Berührung gegeben sind.

Man kann das Rollen zweier, bloss in einem Punkte sich berührender Flächen auf einander auffassen als ein Rollen beider auf ihrer gemeinsamen Berührungsebene längs derselben ebenen Curve. Wir wollen daher im folgenden die Betrachtung dadurch vereinfachen, dass wir eine feste Ebene annehmen, auf der eine beliebige, aber keine Geraden enthaltende Fläche rollt. Von den Resultaten lässt sich offenbar Anwendung auf den Fall einer beliebig bewegten Berührungsebene machen.

Zu untersuchen ist zuerst die Bewegung ohne Rücksicht auf die Zeit, dann als Wirkung von Kräften, welche einen Körper, begrenzt durch die rollende Fläche, angreifen, also eine geometrische und eine dynamische Frage.

Geometrische Frage.

Seien x, y, z die Coordinaten des Berührungspunkts in Bezug auf ein, mit der rollenden Fläche fest verbundenes Axensystem, x_1, y_1, $z_1 = 0$ die Coordinaten desselben in der Ebene, auf der die Fläche rollt, und die Relationen zwischen ihnen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + ax + by + cz \\ y_1 &= y_0 + a_1x + b_1y + c_1z \\ 0 &= z_0 + px + qy + rz \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

dann ist die erste Bedingung erfüllt, wenn p, q, r die Richtungscosinus der Normale der Fläche sind. Die positive Richtung der Normale sei bestimmt durch

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & p \\ b & b_1 & q \\ c & c_1 & r \end{vmatrix} = 1 \tag{2}$$

Der dritten Bedingung gemäss muss $s = s_1$ sein, wo s die auf der krummen Fläche, s_1 die auf der Ebene beschriebene Curve bezeichnet. Man hat also:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \partial x_1^2 + \partial y_1^2 \tag{3}$$

Die zweite Bedingung verlangt, dass

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial s} &= \cos\tau_1 = a\frac{\partial x}{\partial s} + b\frac{\partial y}{\partial s} + c\frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial y_1}{\partial s} &= \sin\tau_1 = a_1\frac{\partial x}{\partial s} + b_1\frac{\partial y}{\partial s} + c_1\frac{\partial z}{\partial s} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

sei. Hierzu kommt noch vermöge der ersten Bedingung:

$$0 = p\frac{\partial x}{\partial s} + q\frac{\partial y}{\partial s} + r\frac{\partial z}{\partial s} \tag{5}$$

woraus:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = a\cos\tau_1 + a_1\sin\tau_1; \quad \frac{\partial y}{\partial s} = b\cos\tau_1 + b_1\sin\tau_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = c\cos\tau_1 + c_1\sin\tau_1$$

Differentiirt man die Gl. (1) vollständig, so ergiebt sich vermöge (4) und (5):

$$\left.\begin{aligned} \partial x_0 + x\partial a + y\partial b + z\partial c &= 0 \\ \partial y_0 + x\partial a_1 + y\partial b_1 + z\partial c_1 &= 0 \\ \partial z_0 + x\partial p + y\partial q + z\partial r &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

gültig für Variation längs s.

Zum analytischen Ausdruck der vierten Bedingung gelangen wir auf folgendem Wege. Zunächst hat man:

$$\begin{vmatrix} \partial a & a_1 & p \\ \partial b & b_1 & q \\ \partial c & c_1 & r \end{vmatrix} = a\partial a + b\partial b + c\partial c = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & \partial a_1 & p \\ b & \partial b_1 & q \\ c & \partial c_1 & r \end{vmatrix} = a_1\partial a_1 + b_1\partial b_1 + c_1\partial c_1 = 0$$

was sich auch schreiben lässt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial s} &= K'a_1 + Mp & \frac{\partial a_1}{\partial s} &= K + Np \\ \frac{\partial b}{\partial s} &= K'b_1 + Mq & \frac{\partial b_1}{\partial s} &= K + Nq \\ \frac{\partial c}{\partial s} &= K'c_1 + Mr & \frac{\partial c_1}{\partial s} &= K + Nr \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die Gleicnuugen links mit a_1, b_1, c_1, die rechts mit a, b, c multiplicirt geben die Summe

$$K + K' = 0 \tag{8}$$

Ferner ergeben die Gleichuugen liuks vermöge (4) uud (8):

$$\frac{\partial a}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial b}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial c}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s} = -K\frac{\partial y_1}{\partial s} \tag{9}$$

und die Gleichuugeu rechts vermöge (4):

$$\frac{\partial a_1}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial b_1}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial c_1}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s} = K\frac{\partial x_1}{\partial s} \tag{9}$$

Differentiirt man die Gl. (4) mit Anwendung der 2 letzten Formeln, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial s^2} &= a\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + b\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + c\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - K\frac{\partial y_1}{\partial s} \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial s^2} &= a_1\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + b_1\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + c_1\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + K\frac{\partial x_1}{\partial s^2} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

woraus mit Anwendung der Gl. (4):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial s^2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial s} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial s^2} \end{vmatrix} = K + \begin{vmatrix} p & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \\ q & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \\ r & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \end{vmatrix} \tag{11}$$

Bezeichuet τ den Krümmungswinkel der Curve s, und l, m, n die Richtungscosiuus ihrer Schmiegungsebene, so ist die Determinante zur Rechten

$$= \frac{\partial \tau}{\partial s}(pl + qm + rn)$$

stellt also die Projection der Krümmung $\frac{\partial \tau}{\partial s}$ von der Schmiegungs-

ebene auf die Berührungsebene, d. i. die geodätische Krümmung der Curve s dar. Ebenso drückt die Determinante zur Linken die Krümmung der Curve s_1, die Grösse $\frac{\partial \tau_1}{\partial s}$, aus. Beide müssen der vierten Bedingung gemäss einander gleich sein. Dass auch ihre Vorzeichen übereinstimmen, ersieht man, wenn man die Fläche durch Rollen in eine Lage bringt, wo die x, y, z Axen gleiche Richtung mit den x_1, y_1 Axen und (wie es nach (2) sein muss) der positiven Normale haben, wo daher $p = q = 0$; $r = 1$ wird, und beide Determinanten identisch werden. Folglich heben sich diese, und es bleibt:

$$K = 0 \tag{12}$$

Nach (7) ist jetzt:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{\partial a}{\partial s} = Mp; & \frac{\partial a_1}{\partial s} = Np; & \frac{\partial p}{\partial s} = -Ma - Na_1 \\ \frac{\partial b}{\partial s} = Mq; & \frac{\partial b_1}{\partial s} = Nq; & \frac{\partial q}{\partial s} = -Mb - Nb_1 \\ \frac{\partial c}{\partial s} = Mr; & \frac{\partial c_1}{\partial s} = Nr; & \frac{\partial r}{\partial s} = -Mc - Nc_1 \end{array}\right\} \tag{13}$$

Auch folgt umgekehrt aus (12) gemäss der allgemeingültigen Gl. (11) die ursprüngliche Bedingung

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial s} = \begin{vmatrix} p & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \\ q & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \\ r & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \end{vmatrix} \tag{14}$$

daher kann man die Gl. (12), d. i.

$$a\,\partial a_1 + b\,\partial b_1 + c\,\partial c_1 = 0 \tag{15}$$

identisch mit dem System (13) und mit der Gl. (14), als Ausdruck der vierten Bedingung aufstellen.

Die Gl. (13) stellen, wie beiläufig bemerkt sein mag, die Richtungen der x_1, y_1 Axen und der Normale gegen die x, y, z Aöeu in eine solche Beziehung, dass, wenn man die Fläche als fest, die Ebene als rollend denkt, erstere 3 Axen der Reihe nach die Richtungen der Binormale, Tangente und Hauptnormale einer Curve haben, deren Bogen $= s$, deren Krümmung $= N$, und deren Torsion $= -M$ ist.

Digitized by Google

Setzt man

$$\left.\begin{aligned}
a &= \cos\pi\sin\varkappa\sin\lambda + \cos\varkappa\cos\lambda \\
b &= \cos\pi\cos\varkappa\sin\lambda - \sin\varkappa\cos\lambda \\
c &= -\sin\pi\sin\lambda \\
a_1 &= \cos\pi\sin\varkappa\cos\lambda - \cos\varkappa\sin\lambda \\
b_1 &= \cos\pi\cos\varkappa\cos\lambda + \sin\varkappa\sin\lambda \\
c_1 &= -\sin\pi\cos\lambda \\
p &= \sin\pi\sin\varkappa \\
q &= \sin\pi\cos\varkappa \\
r &= \cos\pi
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

so geht Gl. (15) über in

$$\partial\lambda = \partial\varkappa\cos\pi \tag{17}$$

und nach Einführung in (13) erhält man die Werte:

$$\left.\begin{aligned}
M &= -\frac{\partial u}{\partial s}\sin\pi\cos\lambda - \frac{\partial\pi}{\partial s}\sin\lambda \\
N &= \frac{\partial\varkappa}{\partial s}\sin\pi\sin\lambda - \frac{\partial\pi}{\partial s}\cos\lambda
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Ist nun die Fläche gegeben, so sind x, y, z, p, q, r, π, $\varkappa$ bekannt in 2 Parametern u, v. Ist ferner die Curve s gegeben, so sind u, v bekannte Functionen von einander, also auch von s, und ebenso die genannten Grössen. Nach (17) ist dann auch λ bekannt, woraus die Werte von a, b, c, a_1, b_1, c_1 hervorgehen. Gl. (14) giebt τ_1, und man hat

$$x_1 = \int\cos\tau_1\,\partial s; \quad y_1 = \int\sin\tau_1\,\partial s$$

Endlich sind auch x_0, y_0, z_0 bekannt durch (6). Hiermit ist Curve s und die Bewegung bestimmt bis auf die Integrationsconstanten, die durch die Anfangslage der Fläche bestimmt werden. Es bedarf in diesem Falle nicht der Auflösung einer Gleichung.

Ist hingegen ausser der Fläche die Curve s_1, d. i. τ_1 in s gegeben, und man führt orthogonal geodätische Parameter u, v ein und setzt

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \cos\mu; \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\sin\mu}{t} \tag{19}$$

wodurch die Gleichung

$$\partial s^2 = \partial u^2 + t^2\partial v^2 \tag{20}$$

erfüllt wird, so geht die Gl. (14) über in

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial s} = \frac{\partial \mu}{\partial s} + \frac{\sin \mu}{t} \frac{\partial t}{\partial u} \tag{21}$$

woraus durch zweimalige Differentiation:

$$\frac{\partial^2 \tau_1}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial s^2} + \frac{\partial \mu}{\partial s} \frac{\partial \log t}{\partial u} \cos \mu + \frac{\partial^2 \log t}{\partial u^2} \sin \mu \cos \mu + \frac{\partial^2 \log t}{\partial u \partial v} \frac{\sin^2 \mu}{t}$$

$$\frac{\partial^3 \tau_1}{\partial s^3} = \frac{\partial^3 \mu}{\partial s^3} + \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial s^2} \cos \mu - \frac{\partial \mu^2}{\partial s^2} \sin \mu \right) \frac{\partial \log t}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial s} \frac{\partial^2 \log t}{\partial u^2} (3 \cos^2 \mu - 1)$$
$$+ 3 \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^2 \log t}{\partial u \partial v} \frac{\sin \mu \cos \mu}{t} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \log t}{t \partial u \partial v} \right) \sin^2 \mu \cos \mu + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 \log t}{t \partial u \partial v} \right) \frac{\sin^3 \mu}{t}$$

Eliminirt man u, v zwischen diesen 3 Gleichungen, so bleibt eine Gleichung 3. Ordnung zwischen μ und s übrig, von deren Integration die Lösung abhängt. Ist μ in s gefunden, so ist das Resultat der Elimination von μ und s zwischen Gl. (21), ihrer Derivation und dem Integral die Gleichung der Curve s. Auch kennt man schon vor dieser Elimination u in s aus (19)

Dynamische Frage.

Die auf der Ebene $x_1 y_1$ rollende Fläche sei Oberfläche eines Körpers von der Masse m. Die Coordinaten des Elements ∂m seien x', y', z' in Bezug auf die am Körper festen Axen und x_1', y_1', z_1' in Bezug auf die an der Ebene festen Axen. Dann ist

$$x_1' = x_0 + a x' + b y' + c z'$$
$$y_1' = y_0 + a_1 x' + b_1 y' + c_1 z'$$
$$z_1' = z_0 + p x' + q y' + r z'$$

und bei Variation längs s, vermöge (6)

$$\partial x_1' = (x' - x) \partial a + (y' - y) \partial b + (z' - z) \partial c$$
$$\partial y_1' = (x' - x) \partial a_1 + (y' - y) \partial b_1 + (z' - z) \partial c_1$$
$$\partial z_1' = (x' - x) \partial p + (y' - y) \partial q + (z' - z \partial r$$

das ist nach Einsetzung der Werte (13):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1'}{\partial s} = M z_1'; \quad \frac{\partial y_1'}{\partial s} = N z_1' \\ \frac{\partial z_1'}{\partial s} = M(x_1 - x_1') + N(y_1 - y_1') \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Daher ist die lebendige Kraft des rollenden Körpers

$$Vm = \frac{m}{2}\,U\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 \quad \text{wo}$$

$$U = \frac{1}{m}\int\{(M^2+N^2)z_1'^2+[M(x_1-x_1')+N(y_1-y_1')]^2\}\partial m$$

Setzt man

$$V = UW$$

so wird

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = 2W; \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial W}{\partial s}$$

folglich, wenn S eine beliebige Function von s ist,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial W}{\partial s}S + 2W\frac{\partial S}{\partial s}$$

Auf den Körper m wirke nun ein System von Kräften. Ein solches lässt sich stets auf 2 Kräfte reduciren. Von den 2 Angriffspunkten kann der eine ganz frei gewählt werden. Ist dies aber geschehen, so ist durch ihn und das Kräftesystem bereits eine Ebene bestimmt, längs welcher die zweite Kraft wirken muss. Man kann daher über die Lage des zweiten Angriffspunkts nicht frei verfügen, also auch nicht für jedes gegebene Kräftesystem festsetzen, dass beide Kräfte während der Bewegung immer auf dieselben 2 Körperelemente wirken sollen. Vielmehr würde eine solche Annahme eine Specialität des gegebenen Kräftesystems bedeuten. Vor der Hand haben wir keinen Anlass die Natur der Angriffspunkte näher zu bestimmen, indem wir die Kräfte in folgender Form annehmen.

Bezüglich auf die Axen der $x_1\, y_1\, z_1$ mag auf den Punkt $(x_4\, y_4\, z_4)$ eine Kraft mit den Componenten Xm, Ym, Zm, auf den Punkt $(x_5\, y_5\, z_5)$ eine Kraft mit den Componenten Xm', Ym', Zm' wirken. Ausserdem wirken auf den Berührungspunkt die Reaction des Druckes, den der Körper auf die Ebene ausübt, das ist die Kraft Pm in der Richtung der z_1, und der Gleitungswiderstand, das ist die Kraft Qm in der negativen Richtung von ∂s_1. Die Coordinaten des Schwerpunkts seien x_3, y_3, z_3. Dann sind die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\int\frac{\partial^2 x_1'}{\partial t^2}\partial m = X + X' - Q\cos\tau_1$$

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\int\frac{\partial^2 y_1'}{\partial t^2}\partial m = Y + Y' - Q\sin\tau_1$$

$$\frac{\partial^2 z_3}{\partial t^2} = \frac{1}{m}\int\frac{\partial^2 z_1'}{\partial t^2}\partial m = Z + Z' + P$$

$$\frac{1}{m}\int\frac{y_1'\partial^2 z_1'-z_1'\partial^2 y_1'}{\partial t^2}\partial m = y_4 Z - z_4 Y + y_5 Z' - z_5 Y' + y_1 I$$

$$\frac{1}{m}\int\frac{z_1'\partial^2 x_1'-x_1'\partial^2 z_1'}{\partial t^2}\partial m = z_4 X - x_4 Y + z_5 X' - x_5 Z' - x_1 P$$

$$\frac{1}{m}\int\frac{x_1'\partial^2 y_1'-y_1'\partial^2 x_1'}{\partial t^2}\partial m = x_4 Y - y_4 X$$
$$+ x_5 Y' - y_5 X' - Q(x_1 \sin\tau_1 - y_1\cos\tau_1)$$

Eliminirt man P und Q, so bleiben die 4 Gleichungen:

(23)

$$\frac{1}{m}\int\frac{(y_1'-y_1)\partial^2 z_1'-z_1'\partial^2 y_1'}{\partial t^2}\partial m = (y_4-y_1)Z - z_4 Y + (y_5-y_1)Z' - z_5 Y'$$

$$\frac{1}{m}\int\frac{z_1'\partial^2 x_1'-(x_1'-x_1)\partial^2 z_1'}{\partial t^2}\partial m = z_4 X - (x_4-x_1)Z + z_5 X' - (x_5-x_1)z'$$

$$\frac{1}{m}\int\frac{(x_1'-x_1)\partial^2 y_1'-(y_1'-y_1)\partial^2 x_1'}{\partial t^2}\partial m = (x_4-x_1)Y - (y_4-y_1)X$$
$$+ (x_5-x_1)Y' - (y_5-y_1)X'$$

$$\left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} - X - X'\right)\sin\tau_1 = \left(\frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} - Y - Y'\right)\cos\tau_1$$

Die 3 ersten mit $x_4 - x_5$, $y_4 - y_5$, $z_4 - z_5$ multiplicirt geben die Summe:

$$\frac{1}{m}\int\begin{vmatrix} x_4-x_5 & x_1'-x_1 & \frac{\partial^2 x_1'}{\partial t^2} \\ y_4-y_5 & y_1'-y_1 & \frac{\partial^2 y_1'}{\delta t^2} \\ z_4-z_5 & z_1' & \frac{\partial^2 y_1'}{\partial t_2}\end{vmatrix}\partial m = \begin{vmatrix} x_4-x_5 & x_4-x_1 & X+X' \\ y_4-y_5 & y_4-y_1 & Y+Y' \\ z_4-z_5 & z_4 & Z+Z'\end{vmatrix}$$

Demnach existiren zwischen den 3 Grössen $X+X'$, $Y+Y'$, $Z+Z'$ zwei Relationen. Betrachtet man daher die Bewegung als gegeben, so ist eine der genannten 3 Grössen und nur eine willkürlich, folglich, wenn durch sie und durch X, Y, Z das Kräftesystem bestimmt wird, auch immer eine der letztern willkürlich. Daraus folgt, dass entweder

$$Q = \left(X + X' - \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2}\right)\cos\tau_1 + \left(Y + Y' - \frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2}\right)\sin\tau_1$$

oder (24)

$$P = \frac{\partial^2 z_3}{\partial t^2} - Z - Z'$$

Digitized by Google

nie aber beide durch die Kräfte vertreten werden können. Die Angriffspunkte bleiben willkürlich; man kann sie daher ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit als fest am Körper annehmen.

Führt man die Differentiationen nach den Formeln (22) aus und setzt zur Abkürzung

$$Mx_1 + Ny_1 = L; \quad My_1 - Nx_1 = L'$$

$$\frac{1}{m}\int (y_1'^2 + z_1'^2)\partial m = A; \quad \frac{1}{m}\int (z_1'^2 + x_1'^2)\partial m = B$$

$$\frac{1}{m}\int y_1' z_1' \partial m = -D; \quad \frac{1}{m}\int z_1' x_1' \partial m = -E;$$

$$\frac{1}{m}\int x_1' y_1' \partial m = -F$$

so lauten die Gl. (22):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial s}\{-Ly_1 + My_1 x_3 + (L + Ny_1)y_3 - NA + MF\} \\
&+ 2W\Big\{-\frac{\partial L}{\partial s}y_1 + \frac{\partial M}{\partial s}y_1 x_3 + \frac{\partial L + y_1 \partial N}{\partial s}y_3 + ML'z_3 \\
&\quad - \frac{\partial N}{\partial s}A + M^2 D - MNE + \frac{\partial M}{\partial s}F\Big\} = \\
&\quad (y_4 - y_1)Z - z_4 Y + (y_5 - y_1)Z' - z_5 Y'
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial s}\{Lx_1 - (L + Mx_1)x_3 - Nx_1 y_3 + MB - NF\} \\
&+ 2W\Big\{\frac{\partial L}{\partial s}x_1 - \frac{\partial L + x_1 \partial M}{\partial s}x_3 - \frac{\partial N}{\partial s}x_1 y_3 + NL'z_3 \\
&\quad + \frac{\partial M}{\partial s}B + MND - N^2 E - \frac{\partial N}{\partial s}F\Big\} = \\
&\quad z_4 X - (x_4 - x_1)Z + z_5 X' - (x_5 - x_1)Z'
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial s}\{L'z_3 + MD - NE\} \\
&+ 2W\Big\{LL' + (LN - L'M)x_3 + (LN - LM)y_3 + \frac{y_1 \partial M - x_1 \partial N}{\partial s}z_3 \\
&\quad + MN(A - B) + \frac{\partial M}{\partial s}D - \frac{\partial N}{\partial s}E + (N^2 - M^2)F\Big\} = \\
&\quad (x_4 - x_1)Y - (y_4 - y_1)X + (x_5 - x_1)Y' - (y_5 - y_1)X'
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\frac{\partial W}{\partial s}(M\sin\tau_1 - N\cos\tau_1)z_3$$
$$+2W\left\{(M\sin\tau_1 - N\cos\tau_1)(L - Mx_3 - Ny_3) + \frac{\sin\tau_1\partial M - \cos\tau_1\partial N}{\partial s}z_3\right\}$$
$$= (X+X')\sin\tau_1 - (Y+Y')\cos\tau_1 \tag{28}$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft ist

$$\partial V = X\partial x_4 + Y\partial y_4 + Z\partial z_4 + X'\partial x_5 + Y'\partial y_5 + Z'\partial z_5$$

während P und Q, weil sie auf momentan ruhende Punkte wirken, keine Vermehrung des Potentials hervorbringen. Auf die 2 Angriffspunkte, sofern sie am Körper fest sind, kann man die für jeden Punkt des Körpers gelteuden Differentialformeln (22) anwenden; dann erhält man:

$$\frac{\partial(UW)}{\partial s} = (MX+NY)z_4 - \{M(x_4-x_1)+N(y_4-y_1)\}Z$$
$$+(MX'+NY')z_5 - \{M(x_5-x_1)+N(y_5-y_1)\}Z'$$

das ist die Summe der mit M und N multiplicirten Gl. (25) (26).

Das Vorstehende löst die 2 Aufgaben, erstens, wenn die Bewegung gegeben ist, die Kräfte zu finden, zweitens, wenn die Bewegung nur geometrisch gegeben ist, und zwischen den Componenten der Kräfte 3 lineare Relationen bestehen, die 6 Componenten und die Geschwindigkeit zu finden. Bei der ersten sind unmittelbar 4 lineare Gleichungen zwischen den 6 Componenten bekannt. Nachdem man über 2 derselben willkürlich, mit der oben angegebenen Auswahl, verfügt hat, ergeben sich die übrigen. Bei der zweiten Aufgabe werden gemäss den 3 gegebenen Relationen die 6 Componenten, also auch die rechten Seiten der Gl. (25) (26) (27) (28), linear in 3 Grössen dargestellt. Daher bleibt nach Elimination derselben eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung zur Bestimmung von W, die dann zu integriren ist.

B e i s p i e l.

Der rollende Körper sei eine Kugel vom Radius 1. Zur Bestimmung der Oberfläche nehmen wir das orthogonal geodätische System:

$$x = \sin u \sin v; \quad y = \sin u \cos v; \quad z = \cos u$$

dann wird in Gl. (20)

$$t = \sin u$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \cos\mu\,; \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\sin\mu}{\sin u}$$

Ferner hat man hier:

$$p = -\sin u \sin v\,; \quad q = -\sin u \cos v\,; \quad r = -\cos u$$

daher nach Vergleichung mit (16):

$$\pi = u + 2\mathrm{R}\,; \quad \varkappa = v$$

(R bezeichnet den rechten Winkel), und die Gl. (17) (18) (21) gehen über in

$$\partial\lambda = -\partial v \cos u \tag{29}$$

$$M = \sin(\mu - \lambda)\,; \quad N = -\cos(\mu - \lambda)$$

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial s} = \frac{\partial \mu}{\partial s} + \cot u \sin\mu = \frac{\partial u}{\partial s} + \cos u \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial \mu}{\partial s} - \frac{\partial \lambda}{\partial s}$$

woraus:

$$\tau_1 = \mu - \lambda + \mathrm{const.}$$

Die Einführung in die Gl. (4) ergiebt, dass die Constante $= -\mathrm{R}$ ist, also

$$\tau_1 = \mu - \lambda - \mathrm{R} \tag{30}$$

$$M = \cos\tau_1\,; \quad N = \sin\tau_1 \tag{31}$$

Da der Mittelpunkt der Kugel Anfang der $x\ y\ z$ ist, so hat man:

$$x_0 = x_1\,; \quad y_0 = y_1\,; \quad z_0 = 1$$

Ist nun die Curve s_1 gegeben, also τ_1 gegebene Function von s, so hängt die Lösung der geometrischen Aufgabe von der Integration der Gleichungen:

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial s} = \frac{\partial \mu}{\partial s} + \cot u \sin\mu\,; \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \cos\mu \tag{32}$$

ab. Eliminirt man u und setzt die Krümmung

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial s} = k$$

so erhält man:

$$\frac{\partial^2 \cot\mu}{\partial {\tau_1}^2} + 3\cot\mu \frac{\partial \cot\mu}{\partial \tau_1} + \frac{\partial k}{\partial \tau_1}(2 + \cot^2\mu) + \cot\mu\left(1 + \cot^2\mu + \frac{1}{k^2}\right) = 0$$

Von dieser Gleichung braucht man nur eine specielle Lösung zu kennen; denn durch Veränderung des Axensystems der xyz werden 2 willkürliche Constanten eingeführt; das allgemeine Integral entspricht dann nur einer beliebigen Lage der Curve s. Sei z. B. s_1 ein Kreis, also k constant; dann genügt der Gleichung der Wert

$\cot\mu = 0$. Hier wird nach (32) $\partial u = 0$, also s gleichfalls ein Kreis, ferner

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{k}$$

daher ist der Radius des Kreises s

$$\sin u = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

und der Bogen

$$s = \frac{v}{\sqrt{1+k^2}}$$

Die allgemeine Lösung muss dann einen Kugelkreis vom selben Radius in beliebiger Lage ergeben. Für ein constantes k bedarf es jedoch nicht der Gleichung 2. Ordnung; denn aus (32) folgt nach Elimination von ∂s unmittelbar eine Gleichung, deren Integral ist

$$\sin u \sin \varkappa + k \cos u = \text{const.}$$

woraus nach Elimination von μ der Wert von

$$v = \int \frac{\operatorname{tg}\mu\, \partial u}{\sin u}$$

gefunden wird.

Die erste Gl. (32) lässt sich schreiben:

$$\partial \tau_1 = \operatorname{tg}\mu\, \partial \log(\sin u \sin\mu) \tag{34}$$

und giebt so die Specialbetrachtung des Falles

$$\sin u = k \sin^n \mu$$

an die Hand, welcher

$$\tau_1 = (n+1)\mu$$

ergiebt. Hier wird

$$x_1 = nk \int \frac{\sin^{n-1}\mu \cos(n+1)\mu\, \partial\mu}{\sqrt{1 - k^2 \sin^{2n}\mu}}$$

$$y_1 = nk \int \frac{\sin^{n-1}\mu \sin(n+1)\mu\, \partial\mu}{\sqrt{1 - k^2 \sin^{2n}\mu}}$$

Für rationale n stellen sich demnach die Coordinaten als Integrale algebraischer Functionen eines Parameters dar, welcher Kreisfunction eines Vielfachen des Krümmungswinkels τ_1 ist. Sei z. B. $k = 1$; $n = 1$; dann wird

$$u = \mu; \quad \tau_1 = 2u$$

Die Gleichungen der Curven s und s_1 lauten:

Digitized by Google

$$v = \log \operatorname{tg} \frac{u+R}{2}; \quad s_1 = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\tau_1}{4} + \frac{R}{2}\right)$$

letztere in Coordinaten:

$$x_1 = 2\sin\frac{\tau_1}{2} - s_1; \quad y_1 = -2\cos\frac{\tau_1}{2}$$

und zur Bestimmung der Bewegung hat man nach (30):

$$\lambda = -u - R$$

woraus:

$$\begin{aligned}
a &= \cos^2 u \sin v - \sin u \cos v \\
b &= \cos^2 u \cos v + \sin u \sin v \\
c &= -\sin u \cos u \\
a_1 &= \cos u (\sin u \sin v + \cos v) \\
b_1 &= \cos u (\sin u \cos v - \sin v) \\
c_1 &= -\sin^2 u
\end{aligned}$$

leicht zu verallgemeinern, wenn man $\tau_1 = 2u + h$ setzt, wo $\lambda = -u - h - R$ wird.

Die 4 dynamischen Gleichungen erfahren einige Reductionen vermöge (31). Wir wollen jedoch damit noch weitere Vereinfachungen verbinden, indem wir die z Axe durch den Schwerpunkt gehen lassen, und den Mittelpunkt und Schwerpunkt als Angriffspunkte der 2 Kräfte wählen, so dass

$$\begin{aligned}
x_3 = x_5 &= x_1 + ec; & y_3 \mp y_5 &= y_1 + ec_1; & z_3 = z_5 &= 1 + er \\
x_4 &= x_1 & ; \quad y_4 &= y_1 & ; \quad z_4 &= 1
\end{aligned}$$

wird. Gl. (28) reducirt sich auf

$$2W(1+er)\frac{\partial \tau_1}{\partial s} = (Y + Y')\cos\tau_1 - (X + X')\sin\tau_1 \tag{35}$$

Speciell sei jetzt J das Trägheitsmoment der Kugel für alle Axen, die durch den Mittelpunkt gehen. Dann gehen die Gl. (25) (26) (27) über in

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial W}{\partial s} H + 2WH'\right)\sin\tau_1 + 2WH\frac{\partial \tau_1}{\partial s}\cos\tau_1 = Y + Y'(1+er) - Z'ec_1 \\
&\left(\frac{\partial W}{\partial s} H + 2WH'\right)\cos\tau_1 - 2WH\frac{\partial \tau_1}{\partial s}\sin\tau_1 = X + X'(1+er) - Z'ec \\
&\frac{\partial W}{\partial s}\sin\mu + 2W\frac{\partial \tau_1}{\partial s}\cos\mu = X'\cos\lambda - Y'\sin\lambda
\end{aligned} \tag{36}$$

wo

$$H = 1 + J - 2e\cos u;\quad H' = e\sin u\cos\mu$$

gesetzt ist. Die beiden ersten lassen sich, wenn man

$$X + X' = S\cos\tau_1 - T\sin\tau_1;\quad X' = S'\cos\tau_1 - T'\sin\tau_1$$
$$Y + Y' = S\sin\tau_1 + T\cos\tau_1;\quad Y' = S'\sin\tau_1 + T'\cos\tau_1$$

setzt, verbinden zu

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial s}H + 2WH' &= S - S'e\cos u + Z'e\sin u\cos\mu\\ 2WH\frac{\partial\tau_1}{\partial s} &= T - T'e\cos u - Z'e\sin u\sin\mu\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

und Gl. (36) und (35) geben einzeln:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial s}\sin\mu + 2W\frac{\partial\tau_1}{\partial s}\cos\mu &= S'\sin\mu + T'\cos\mu\\ 2W(1 - e\cos u)\frac{\partial\tau_1}{\partial s} &= T\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

Sei

$$S' = S'' + Z'\operatorname{tg}u\cos\mu;\quad T' = T'' - Z'\operatorname{tg}u\sin\mu$$

dann erhält man durch Elimination:

$$\left.\begin{aligned}S &= \frac{\partial W}{\partial s}(1 + J - e\cos u) + 2W\left(J\frac{\partial\tau_1}{\partial s} + e\sin u\sin\mu\right)\cot\mu\\ T &= 2W(1 - e\cos u)\frac{\partial\tau_1}{\partial s}\\ S'' &= \frac{\partial W}{\partial s} + 2W\frac{J\cot u}{e\cos u}\frac{\partial\tau_1}{\partial s}\\ T'' &= 2W\left(1 - \frac{J}{e\cos u}\right)\frac{\partial\tau_1}{\partial s}\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

ist also die Bewegung gegeben, so liefern diese 4 Gleichungen nach beliebiger Bestimmung von Z' die Werte der Componenten der Kräfte. Ist hingegen die Bewegung nur geometrisch gegeben, und überdies eine Relation von der Form

$$AS + BT + CS'' + DT'' = E$$

wo A, B, C, D, E beliebig von u abhangen können, so hat man obige Werte einzusetzen, und erhält eine lineare Differentialgleichung I. Ordnung, aus der dann W gefunden wird. Die Widerstände werden

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{\partial W}{\partial s} e \sin u \cos\mu + 2 We (\cos u - \frac{\partial \tau_1}{\partial s} \sin u \sin\mu) - Z - Z' \\ Q &= \frac{\partial W}{\partial s} J + 2 WJ \frac{\partial \tau_1}{\partial s} \cot\mu \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Ist $T = 0$, so würde bei beliebig gegebener Abhängigkeit zwischen s und τ_1 die Geschwindigkeit null sein; nur für $\frac{\partial \tau_1}{\partial s} = 0$, das ist, wenn sich die Kugel auf gerader Linie wälzt, ist eine rollende Bewegung möglich, und zwar bei beliebiger Geschwindigkeit. Zugleich ist dann $T'' = 0$, d. h. die transversale und verticale Componente der auf den Schwerpunkt wirkenden Kraft stehen im Gleichgewicht. Die Geschwindigkeit hängt dann von den tangentialen Kräften S und S' ab. Da im gegenwärtigen Falle das Integral der Gl. (32)

$$\begin{aligned} \sin u \sin\mu &= \sin\alpha \text{ (constant)} \\ \sin u \cos\mu &= \cos\alpha \sin s \\ \cos u &= \cos\alpha \cos s \end{aligned}$$

ist, so werden dieselben:

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{\partial W}{\partial s}(1 + J - e\cos\alpha\cos s) + 2 We \cos\alpha \sin s \\ S'' &= \frac{\partial W}{\partial s} \text{ (oder } \sin\mu = 0) \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Wir wollen zunächst einen singulären Fall betrachten. Es wirke allein die Schwerkraft $g = -Z'$ normal zur Ebene, sei also $S = T = S' = T' = 0$. Dann muss wegen $T'' = 0$ auch

$$g \operatorname{tg} u \sin\mu = \frac{g \operatorname{tg}\alpha}{\cos s} = 0$$

also $\alpha = 0$ (oder 2R) sein. Für diesen Fall wird

$$u = s; \quad \mu = 0$$

d. h. die Kugel wälzt sich längs eines Meridians, so dass der Schwerpunkt in derselben Verticalebene bleibt. Wäre also der erste Anstoss in anderer Richtung, so würde ein Rollen nicht möglich, die Rotation um die Normale vielmehr unausbleiblich sein. Die Bewegungsgleichungen (39) werden für $\mu = 0$ ungültig. Die ursprünglichen (37) (38), die alle ausser der ersten von selbst erfüllt sind, reduciren sich auf

$$\frac{\partial W}{\partial s}(1 + J - 2e\cos s) + 2 We \sin s = -ge \sin s$$

das ist die Derivation der lebendigen Kraft-Gleichung:

$$W(1+J-2e\cos s) = ge(\cos s + \text{const.}) \tag{42}$$

Auch zur Bestimmung der Widerstände muss man auf die allgemeinen Gl. (24) zurückgehen, welche ergeben:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{\partial W}{\partial s} e \sin s + 2We\cos s + g \\ Q &= -\frac{\partial W}{\partial s}(1-e\cos s) - 2We\sin s \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Hieraus kann man noch W eliminiren, doch ist das Resultat nicht einfach.

Wirke wie vorher auf den Schwerpunkt nur die normal gerichtete Schwerkraft, während Kräfte auf den Mittelpunkt wirkend zur Verfügung bleiben, sei also $S'' = g\,\mathrm{tg}\,u\cos\mu$; $T'' = -g\,\mathrm{tg}\,u\sin\mu$; dann werden die 2 letzten Gl. (39):

$$\left.\begin{aligned} g\sin u\sin\mu &= \frac{\partial W}{\partial s}\cos u\sin\mu + 2W\frac{J}{e}\frac{\partial\tau_1}{\partial s} \\ g\sin u\sin\mu &= 2W\left(\frac{J}{e} - \cos u\right)\frac{\partial\tau_1}{\partial s} \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

woraus nach Subtraction:

$$\frac{\partial W}{\partial u}\sin\mu = -2W\frac{\partial\tau_1}{\partial s} \tag{45}$$

oder nach Gl. (34):

$$\frac{\partial W}{W} = -2\frac{\partial(\sin u\sin\mu)}{\sin u\sin\mu}$$

und andrerseits nach Elimination von $\frac{\partial\tau_1}{\partial s}$ zwischen (44):

$$\partial W = -\frac{ge\sin u\,\partial u}{J-e\cos u} \tag{46}$$

Beides integrirt giebt:

$$W = \frac{h^2}{2\sin^2 u\sin^2\mu} = -g\log\frac{J-e\cos u}{f} \tag{47}$$

Hiernach ist einerseits die Geschwindigkeit durch

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{h}{\sin u\sin\mu}$$

andrerseits die Curve s durch

$$\sin\mu = \frac{h}{\sin u\sqrt{2g\log\frac{f}{J-e\cos u}}} \tag{48}$$

bestimmt; denn aus letzterer Gleichung geht hervor:

$$v = \int\frac{h\,\partial u}{\sin u\sqrt{2g\sin^2 u\log\frac{f}{J-e\cos u}-h^2}} \tag{49}$$

Die Gleichung der Curve s_1 ist das Resultat der Elimination von u zwischen den 2 Gleichungen:

$$\tau_1 = -\frac{he}{2}\int\frac{\sin u\,\partial u}{(J-e\cos u)\log\frac{f}{J-e\cos u}\sqrt{2g\sin^2 u\log\frac{f}{J-e\cos^2 u}-h^2}}$$

$$s = \int\frac{\partial u}{\sqrt{1-\frac{h^2}{2g\sin^2 u\log\frac{f}{J-e\cos u}}}}$$

welche sich aus (34) (47) ergeben. Zur Bestimmung der Bewegung ist der Wert von λ erforderlich, der nach Gl. (29) und (49) lautet:

$$\lambda = -\int\frac{h\cot u\,\partial u}{\sqrt{2g\sin^2 u\log\frac{f}{J-e\cos u}-h^2}}$$

Um die Bedeutung der Constanten zu erkennen ist zu beachten, dass μ den Winkel zwischen der positiven Tangentialrichtung von s und dem Meridian nach der Seite der wachsenden u hin bezeichnet, selbst positiv für wachsendes v. Beginnt also die Bewegung des Punktes (uv) auf der Kugel zur Zeit $t=0$, wo auch v, s, τ_1 null gesetzt werden können, im Punkte $u=u_0$ in der Richtung $\mu=\mu_0$ mit der Geschwindigkeit n, so ist nach Gl. (47)

$$h = n\sin u_0\sin\mu_0;\quad f = (J-e\cos u_0)e^{\frac{n^2}{2g}}$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Die untere Integralgrenze für v, τ_1, s wird u_0, während λ durch die Gl. (30) bestimmt wird. Für $\sin u_0=0$ ist $h=0$, also, da W nicht constant null sein darf, $\sin\mu=0$, d. h. die Kugel wälzt sich längs des Meridians, ein Fall den wir vorher betrachtet haben, und für den die gegenwärtigen Formeln nicht passen

Es bleibt noch übrig die Kräfte, welche auf den Mittelpunkt wirken müssen, und die Widerstände zu bestimmen. Vermöge Gl. (45) reduciren sich deren Ausdrücke auf

$$S = \left\{ \frac{\partial W}{\partial u}(1 - e\cos u) + 2 We \sin u \right\} \cos\mu$$

$$T = -\frac{\partial W}{\partial u}(1 - e\cos u)\sin\mu$$

$$P = \frac{\partial W}{\partial u} e \sin u + 2 We \cos u - Z + g$$

$$Q = 0$$

das ist nach (46) (47) (48):

$$S = ge\left(-\frac{1 - e\cos u}{J - e\cos u} + 2\log\frac{f}{J - e\cos u}\right)\sqrt{1 - \frac{h^2}{2g\sin^2 u \log\frac{f}{J - e\cos u}}}$$

$$T = \frac{1 - e\cos u}{J - e\cos u}\,\frac{eh\sqrt{g}}{\sqrt{2\log\frac{f}{J - e\cos u}}}$$

$$P = g\left(1 - \frac{e^2\sin^2 u}{J - e\cos u} + 2e\cos u \log\frac{f}{J - e\cos u}\right) - Z$$

$$Q = 0$$

Das vorstehende ist eins von den wenigen Beispielen, bei welchen sich die Bewegung vollständig aus den Kräften berechnen lässt, wenn nämlich die Bestimmungen von S und T als Bedingungen des Rollens auffasst, die wegfallen würden, wenn man die Kugel anders zum Rollen zwingen könnte.

XVII.

Ueber das Kreisviereck.

Von

Max Greiner.

Sind P_1, P_2, P_3, P_4 die Ecken eines Kreisviereckes, und fällt man vom Punkte P_1 auf die Seiten des Dreieckes $P_2P_3P_4$ Perpendikel, so liegen die Fusspunkte derselben bekanntlich auf einer und derselben Geraden φ_1. Verfährt man ebenso mit den übrigen Ecken des Kreisviereckes, so erhält man im Ganzen die vier Fusspunktsgeraden φ_1, φ_2, φ_3, φ_4.

Fig. 1.) Die Fusspunkte P_1' und P_1'' der Lote des Eckpunktes P_1 auf die Seiten P_2P_3 und P_2P_4, und die Fusspunkte P_2' und P_2'' der Lote des Punktes P_2 auf die Seiten P_1P_4 und P_1P_3 liegen auf einem Kreise, der die Seite $P_1P_2 = a$ zum Durchmesser hat. Die Sehnen $P_1'P_1''$ und $P_2'P_2''$ sind von gleicher Länge, da ihnen derselbe Umfangswinkel γ zugehört.

Ebenso liegen die Fusspunkte P_3' und P_3'' der Lote des Punktes P_3 auf P_1P_4 und P_2P_4 und die Fusspunkte P_4' und P_4'' der Lote des Punktes P_4 auf P_3P_2 und P_3P_1 auf einem über der Seite $P_3P_4 = c$ als Durchmesser beschriebenen Kreise.

Die Sehnen $P_3'P_3''$ und $P_4'P_4''$ sind ebenfalls gleich lang, weil ihnen in dem zuletzt erwähnten Kreise gleiche Umfangswinkel α zugehören.

Da nun $P_1'P_1'' = P_2'P_2''$, so ist: $P_1'P_2' \parallel P_1''P_2''$

Viereck $P_1P_1'P_2P_3'$ ist ein Kreisviereck, da die Winkel bei P_1' und P_3' Rechte sind; folglich ist Wkl. $P_3P_1'P_3' = \gamma$ und somit:

Digitized by Google

$$P_1'P_3' \parallel P_1''P_3''$$

Viereck $P_2P_3P_2''P_3''$ ist ebenfalls ein Kreisviereck und deshalb

$$\text{Wkl. } P_2''P_3''P_4 = \alpha \quad \text{und folglich:}$$
$$P_2''P_3'' \parallel P_2'P_3'.$$

Es sind also die Seiten der Dreiecke $P_1'P_2'P_3'$ und $P_1''P_2''P_3''$ paarweise parallel und es schneiden sich somit die Verbindungslinien φ_1, φ_2, φ_3 der entsprechenden Eckpunkte in einem und demselben Punkte N_0. Ebenso liesse sich der Parallelismus der Seiten der Dreiecke $P_1'P_2'P_4'$ und $P_1''P_2''P_4''$ beweisen, woraus hervorginge, dass auch die Fusspunktslinien φ_1, φ_2, φ_4 sich in einem und demselben Punkte treffen.

d. h. Zeichnet man für je einen Eckpunkt des Kreisviereckes bezüglich des aus den drei übrigen Eckpunkten desselben bestehenden Dreieckes die Fusspunktslinie, so schneiden sich die dadurch erhaltenen vier Fusspunktsgeraden in einem und demselben Punkte N_0. (1)

Da P_2P_1'' senkrecht auf P_1P_1'' und P_1P_2'' senkrecht auf P_2P_2'' so ist der Winkel x, der von P_1P_1'' und P_2P_2'' eingeschlossen wird, gleich dem Winkel der Geraden P_1P_2'' und P_2P_1'' und dieser ist als Aussenwinkel des Dreieckes P_1P_2p gleich $\beta+\delta$

$$x = \beta + \delta.$$

Betrachtet man die Dreiecke $P_1P_1'P_1''$ und $P_1P_3P_4$, so findet man, da Wkl. $P_1''P_1P_1' = P_4P_1P_3 = \gamma$ und $P_1P_1'P_1'' = P_1P_3P_4 = \delta$, dass beide Dreiecke ähnlich sind und somit:

$$\text{Wkl. } P_1P_1''P_1' = P_1P_4P_3 = \alpha + \beta \text{ ist.}$$

Ebenso ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken $P_2P_2'P_2''$ und $P_2P_4P_3$, dass:

$$\text{Wkl. } P_2P_2''P_2' = P_2P_3P_4 = \alpha + \delta$$

Nun hat man für den stumpfen Winkel $(\varphi_1\varphi_2)$ der Geraden φ_1 und φ_2 die Relation:

$$(\varphi_1\varphi_2) + x + 180 - P_1P_1''P_1' + 180 - P_2P_2''P_2' = 360 \quad \text{folglich}$$
$$(\varphi_1\varphi_2) = P_1P_1''P_1' + P_2P_2''P_2' - x$$
$$(\varphi_1\varphi_2) = \alpha + \beta + \alpha + \delta - (\beta + \delta)$$
$$(\varphi_1\varphi_2) = 2\alpha$$

Verbindet man die Mitte m_a der Seite $P_1P_2 = a$ des Viereckes mit dem Punkte N_0 und fällt von m_a auf die durch N_0 gehenden Geraden φ_1 und φ_2 die Perpendikel $m_a n_1$ und $m_a n_2$ so ist:

$$\triangle m_a N_0 n_1 \cong m_a N_0 n_2$$

weil die Sehnen $P_1'P_1''$ und $P_2'P_2''$ gleich lang sind. Folglich

$$\text{Wkl. } m_a N_0 n_1 = m_a N_0 n_2 = \alpha$$

Bezeichnet man die Länge $N_0 m_a$ mit ϱ_a, so ist

$$m_a n_1 = \varrho_a \sin\alpha$$

und da zur Sehne $P_1'P_1''$ der Umfangswinkel γ gehört, so ist

$$m_a n_1 = \frac{a}{2}\cos\gamma$$

Ist r der Radius des dem Vierecke umschriebenen Kreises, so hat man

$$a = 2r\sin\alpha$$
$$\varrho_a \sin\alpha = r\sin\alpha\cos\gamma$$
$$\varrho_a = r\cos\gamma.$$

Es stellen sich also die Entfernungen ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, ϱ_d des Punktes N_0 von den Mitten der Seiten a, b, c, d des Kreisviereckes dar, als

$$\varrho_a = r\cos\gamma$$
$$\varrho_b = r\cos\delta$$
$$\varrho_c = r\cos\alpha$$
$$\varrho_d = r\cos\beta$$

Ist P_0 der Mittelpunkt des dem Vierecke umschriebenen Kreises, so ist:

$$P_0 m_a = r\cos\alpha = \varrho_c$$
$$P_0 m_b = r\cos\beta = \varrho_d$$
$$P_0 m_c = r\cos\gamma = \varrho_a$$
$$P_0 m_d = r\cos\delta = \varrho_b$$

Da nun $P_0 m_a = N_0 m_c = \varrho_c$ und $P_0 m_c = N_0 m_a = \varrho_a$, so ist $P_0 m_a N_0 m_c$ ein Parallelogramm, also $N_0 m_c \parallel P_0 m_a$ und folglich $N_0 m_c$ senkrecht auf $P_1 P_2$ ebenso $N_0 m_a$ senkrecht auf $P_3 P_4$ u. s. f.

Demnach ergibt sich der Satz:

Zieht man durch die Mitten der Seiten eines Kreisviereckes Senkrechte auf die Gegenseiten, so schneiden sich die vier so erhaltenen Senkrechten in einem und demselben Punkte N_0 . . . . (2)

Bekanntlich schneiden sich die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten und Diagonalen eines Viereckes in einem und demselben Punkte M_0, welcher der Schnittpunkt der Diagonalen $m_a m_c$ und $m_b m_d$ des Parallelogrammes $m_a m_b m_c m_d$ ist.

Es liegt also Punkt M_0 in der Mitte der Diagonale $m_a m_c$ und fällt demnach zusammen mit dem Diagonalenschnittpunkte im Parallelogramm $P_0 m_a N_0 m_c$.

d. h. Es liegen die drei Punkte P_0, M_0, N_0 auf einer und derselben Geraden und zwar so, dass M_0 in die Mitte zwischen N_0 und P_0 zu liegen kömmt . . . . (3)

Da die Punkte P_0 und N_0 mit den Mitten zweier Gegenseiten ein Parallelogramm bilden, so müssen sie auch mit den Mitten der beiden Diagonalen ein Parallelogramm ausmachen, weil M_0 sowohl von den Mitten der Diagonalen als auch von den Punkten P_0 und N_0 gleichweit absteht; weshalb sich Satz (2) in folgender Weise erweitern lässt:

Zieht man durch die Mitten der Seiten eines Kreisviereckes Senkrechte auf die Gegenseiten und durch die Mitte einer jeden Diagonale eine Senkrechte auf die andere Diagonale, so schneiden sich die sechs so erhaltenen Senkrechten in einem und demselben Punkte N_0 . . . . (4)

Fig. 2). Verbindet man im Dreiecke $P_1P_2P_3$ die Mitten seiner Seiten, so ist Wkl. $m_a m_c m_b = \gamma + \delta$. Die Geraden $N_0 m_a$, $N_0 m_b$, welche senkrecht auf den Seiten P_3P_4 und P_1P_4 des Kreisviereckes stehen, schliessen unabhängig von der Lage des vierten Eckpunktes P_4 ebenfalls den Winkel $\gamma + \delta$ ein; woraus sich ergibt:

Hält man drei Ecken des Kreisviereckes fest, während die vierte Ecke die Peripherie des Kreises durchläuft, so liegen die jeweiligen Punkte N_0, der hiedurch entstehenden Kreisvierecke, auf dem Neunpunktkreise des aus den drei festen Eckpunkten bestehenden Dreieckes . . . . (5)

Zugleich folgt der Satz:

Die Neunpunktkreise der vier, aus je zwei anstossenden Seiten und einer Diagonale des Kreisviereckes bestehenden, Dreiecke schneiden sich in einem und demselben Punkte N_0 . . . . (6)

Bezeichnet man der Kürze halber die eben erwähnten vier Dreiecke $P_2P_3P_4$, $P_1P_3P_4$, $P_1P_2P_4$ und $P_1P_2P_3$ bezüglich mit $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ und $\triangle_4$ und berücksichtigt ferner, dass jedes dem Kreise P_0 eingeschriebene Dreieck zum Neunpunktkreisradius den halben Radius des Kreises P_0 hat, so folgt in Hinblick auf Satz (6):

Die Centra der Neunpunktkreise der Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ liegen auf einem Kreise, der N_0 zum Mittelpunkte und den halben Radius des Kreises P_0 zum Radius hat . . . . (7)

Seien N_3 und N_4 die Neunpunktkreiscentra der Dreiecke $\triangle_3$ und $\triangle_4$ so sind, da

$$m_d m_f = m_e m_b = \frac{a}{2}$$

und

$$m_d N_3 = m_f N_3 = m_e N_4 = m_b N_4 = \frac{r}{2}$$

die Dreiecke $m_d m_f N_3$ und $m_e m_b N_4$ congruent und überdiess noch ähnlich liegend, weil $m_d m_f \parallel m_e m_b$ ist.

Da nun die Verbindungslinien $m_d m_e$ und $m_f m_b$ von zwei Paaren entsprechender Ecken dieser congruenten und ähnlich liegenden Dreiecke parallel der Vierecksseite P_3P_4 sind, so ist auch die Verbindungslinie N_3N_4 des dritten Paares entsprechender Ecken parallel zu P_3P_4.

d. h. Die Verbindungslinie der Neunpunktkreismittelpunkte irgend zweier Dreiecke, welche zwei Ecken des Kreisviereckes gemeinschaftlich haben, ist parallel zur Verbindungslinie der dritten Eckpunkte der Dreiecke . . . . (8)

Daraus und aus (7) folgt:

Die Neunpunktkreiscentra der vier Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ bilden ein dem gegebenen Kreisvierecke ähnliches Viereck, welches mit ihm ähnlich liegt und zu Seiten die Hälften der Seiten des Gegebenen hat . . . . (9)

Da aber die Verbindungslinien homologer Punkte von ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren sich im Aehnlichkeitspunkte treffen, so ergibt sich der Satz:

Verbindet man je eine Ecke des Kreisviereckes mit dem Neunpunktkreiscentrum des Dreieckes der drei übrigen Eckpunkte, so gehen die vier Verbindungslinien durch einen und denselben Punkt S_0 . . . . (10)

In den ähnlichen und ähnlich liegenden Vierecken $P_1P_2P_3P_4 = (P)$ und $N_1N_2N_3N_4 = (N)$ sind P_0 und N_0 homologe Punkte, deren Verbindungslinie durch ihren Aehnlichkeitspunkt S_0 geht, welcher zufolge des Satzes (9) vom Punkte P_0 doppelt so weit als vom Punkte N_0 entfernt liegt.

Setzt man die Entfernung $N_0P_0 = l$, so ist $M_0P_0 = \frac{l}{2}$, $N_0S_0 = \frac{l}{3}$ und $S_0M_0 = \frac{l}{6}$ und somit ist das Doppelverhältniss der Punkte N_0, S_0, M_0, P_0:

$$(N_0 M_0 S_0 P_0) = \frac{N_0 S_0}{M_0 S_0} : \frac{N_0 P_0}{M_0 P_0} = \frac{\frac{1}{3}l}{-\frac{1}{6}l} : \frac{l}{\frac{1}{2}l} = -1.$$

d. h. Die vier Punkte N_0, S_0, M_0, P_0 liegen auf einer und derselben Geraden und sind harmonisch . . . . (11)

Fig. 3.) Verbindet man die Ecken P_1 und P_2 des Kreisvierecks mit der Mitte m der Seite P_3P_4; so liegen auf diesen Verbindungslinien bezüglich die Schwerpunkte S_2 und S_1 der Dreiecke $\triangle_2$ und $\triangle_1$ und zwar so, dass $m_c S_2 = \frac{1}{3} m_c P_1$ und $m_c S_1 = \frac{1}{3} m_c P_2$ ist, woraus folgt, dass $S_2 S_1 \parallel P_1 P_2$ und $S_2 S_1 = \frac{1}{3} P_1 P_2$ ist.

Verschafft man sich ebenso die Schwerpunkte der beiden andern Dreiecke $\triangle_3$ und $\triangle_4$, so ergibt sich:

Die Schwerpunkte der vier Dreiecke $\triangle_1$. $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ eines Kreisviereckes bilden ein diesem ähnliches und ähnlich liegendes Viereck (S), welches zu Seiten die dritten Teile der Seiten des Gegebenen hat . . . . (12)

Die Geraden P_1S_1 und P_2S_2 treffen sich im Aehnlichkeitspunkte der ähnlichen und ähnlich liegenden Vierecke (P) und (S); die Verdungslinie des Schnittpunktes von P_1S_1 und P_2S_2 mit m_c muss aber die Seite P_1P_2 in m_a treffen, weil $S_2S_1 \parallel P_1P_2$ ist, und somit liegt der der Aehnlichkeitspunkt der Vierecke (P) und (S) auf $m_a m_c$ und aus ganz ähnlichen Gründen auch auf $m_b m_c$ und fällt demnach mit dem Punkte M_0 zusammen.

d. h. Verbindet man je einen Eckpunkt des Kreisviereckes mit dem Schwerpunkte des aus den drei übrigen Eckpunkten bestehenden Dreieckes, so gehen die vier Verbindungslinien durch einen und denselben Punkt und zwar durch M_0 . . . . (13)

Der Mittelpunkt X des dem Vierecke (S) umschriebenen Kreises ist homolog mit Punkt P_0, weshalb Gerade XP_0 durch den Aehnlichkeitspunkt M_0 der Vierecke (S) und (P) gehen muss.

Zufolge des Satzes (12) ist aber $M_0X = \frac{1}{3} M_0 P_0 = \frac{1}{6} l$ und da Punkt M_0 innerhalb der Strecke P_0X zu liegen kömmt und $M_0P_0 = \frac{1}{2} l$ ist: so muss der Punkt X zusammen fallen mit dem Punkte S_0.

Es liegen also die Schwerpunkte der Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ auf einem Kreise, welcher den Punkt S_0 zum Mittelpunkte und den dritten Teil vom Radius des Kreises P_0 zum Radius hat . . . (14)

Weil nun die Vierecke (S) und (P) und ferner die Vierecke (N) und (P) ähnlich sind, so sind auch die Vierecke (S) und $)N)$ ähn-

lich und haben den Punkt P_0 zum Aehnlichkeitspunkte, da in jedem der Dreiecke $\triangle$ der Schwerpunkt, Neunpunktkreismittelpunkt und Umkreismittelpunkt auf einer und derselben Geraden liegen. Dieser Geraden gehört aber bekanntlich auch noch der Höhenschnittspunkt des Dreieckes an, der vom Neunpunktkreiscentrum eben so weit entfernt ist, als dieser vom Umkreiscentrum.

Es liegen also auf den Aehnlichkeitsstrahlen P_0N_1, P_0N_2, P_0N_3, P_0N_4, ausser den Punkten S_1, S_2, S_3, S_4 noch die Höhenschnittspunkte H_1, H_2, H_3, H_4 der Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ und zwar doppelt so weit vom Punkte P_0 entfernt, als die zugehörigen Punkte N von P_0 entfernt sind.

Daraus geht hervor, dass das Viereck (H) ähnlich ist den Vierecken (N) und (S) und mit ihnen denselben Aehnlichkeitspunkt P_0 hat; und dass ferner seine Seiten doppelt so gross, als diejenigen des Viereckes (N) und somit gleich gross mit denjenigen des Viereckes (P) sind.

Da die Mittelpunkte N_0 und S_0 der den Vierecken (N) und (S) umschriebenen Kreise auf der Geraden M_0P_0 liegen, so muss auch der Mittelpunkt H_0 des dem Vierecke (H) umschriebenen Kreises der Geraden M_0P_0 angehören, und doppelt so weit vom Punkte P_0 entfernt sein, als davon N_0 entfernt ist.

Die congruenten und ähnlich liegenden Vierecke (H) und (P) haben aber ihren Aehnlichkeitspunkt in der Mitte der Strecke H_0P_0 und somit fällt dieser mit dem Punkte N_0 zusammen.

Die Höhenschnittspunkte H_1, H_2, H_3, H_4 der Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ bilden also ein dem gegebenen Kreisvierecke congruentes Viereck, das sich mit jenem in ähnlicher Lage so befindet, dass der Punkt N_0 Aehnlichkeitspunkt beider Vierecke wird . . . . . . (15)

Setzt man wieder $N_0P_0 = l$ so ist $H_0N_0 = l$, $N_0S_0 = \frac{1}{3}l$, $H_0P_0 = 2l$, $S_0P_0 = \frac{2}{3}l$ und somit ist das Doppelverhältniss:

$$(H_0S_0N_0P_0) = \frac{H_0N_0}{S_0N_0} : \frac{H_0P_0}{S_0P_0} = \frac{l}{-\frac{1}{3}l} : \frac{2l}{\frac{2}{3}l} = -1$$

d. h. Die Mittelpunkte der drei Kreise, welche die Höhenschnittspunkte, Schwerpunkte und Neunpunktkreismittelpunkte der Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ enthalten, liegen harmonisch mit dem Mittelpunkte des dem Kreisvierecke umschriebenen Kreises . (16)

XVIII.

Ueber das Pfaff'sche Problem.

Von

Herrn Dr. **Hamburger.**

In der Abhandlung „Ueber totale und partielle Differentialgleichungen" (Borch. J. Bd. 58) hat Herr Natani zuerst gezeigt, wie die Kenntniss eines zu einem Pfaff'schen Problem gehörigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Integration der Pfaff'schen totalen Differentialgleichung Vereinfachungen gewährt, ähnlich denjenigen, welche Jacobi in seiner Abhandlung „Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen" (Borch. J. Bd. 17) für die partiellen Differentialgleichungen aus der Kenntniss eines Integrals des entsprechenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen angedeutet hatte, ohne den Beweis und die Art seines Verfahrens mitzuteilen.

Die Lösung des Pfaff'schen Problems wird so auf die successive Integration unvollständiger aber integrabler Systeme totaler Differentialgleichungen zurückgeführt, derart dass von jedem Systeme nur je eine Lösung erforderlich ist. Gleichzeitig fand sich, dass ein dem sogen. Poisson'schen Satz analoges Theorem betreffs zweier bekannter Integrale des erwähnten Pfaff'schen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen existirt, welcher für das in Rede stehende Problem dieselbe Verwendung findet, wie sie Jacobi für die Integration der partiellen Differentialgleichungen angezeigt hatte.

Inzwischen wurde die „Nova Methodus" aus dem Nachlasse des berühmten Mathematikers in Borch. J. Bd. 60 durch Clebsch publicirt, welcher darauf im Auschluss an diese Methode in 2 im 60. und

61. Bande des Borch. J. erschienenen Abhandlungen die Lösung des Pfaff'schen Problems auf die successive Auffindung je eines Integrals simultaner partieller Differentialgleichungen zurückführte.

Unter den von den beiden Autoren hierzu eingeschlagenen Wegen ist der von Herrn Natani augenscheinlich der einfachere und kürzere, die Resultate beider sind bisher noch nicht in Zusammenhang gebracht worden. (Vergl. die Bemerkung in der Schrift: Rudolph Friedrich Alfred Clebsch „Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen von einigen seiner Freunde" Math. Ann. Bd. VII p. 9. Anm.).

Die Darstellung des Herrn Natani hat mit Schwierigkeiten des Verständnisses zu kämpfen gehabt, wie schon daraus hervorgeht, dass Clebsch in seiner ersten Abhandlung irrtümliche Angaben über die Resultate Natani's gemacht hat, die er dann in der zweiten berichtigt. Indem er jedoch bei dieser Gelegenheit anerkennt, dass die Zahl der erforderlichen Integrationen bei Herrn Natani dieselbe wie bei ihm sei, scheint er nicht bemerkt zu haben, dass es auch genau dieselben Integrationen sind, auf welche nach beiden Methoden die Lösung des Pfaff'schen Problem's zurückgeführt wird.

Im Folgenden wird beabsichtigt, die fragliche Lösung in einer Darstellung zu geben, welche auf directem Wege zu den Natani'schen Resultaten führt, aus denen mit Leichtigkeit die Lösung des Problem's in der Clebsch'schen Fassung abgeleitet wird. Wir werden die Natani'sche Abhandlung kurz mit N., und die beiden Clebsch'schen Abhandlungen mit C. I und C. II citiren.

§. 1.

Das Pfaff'sche Problem besteht in der Transformation des Differentialausdrucks

$$X_1\,\partial x_1 + \ldots + X_n\,\partial x_n$$

wo $X_1 \ldots X_n$ irgend welche Functionen von $x_1 \ldots x_n$ und $\partial x_1 \ldots \partial x_n$ von einander unabhängige Differentiale bedeuten, in einen Differentialausdruck mit der geringst möglichen Zahl von Gliedern von der Form

$$U_1\,\partial u_1 + \ldots + U_s\,\partial u_s$$

wo die U und u wiederum Functionen von x sind.

Ist ein solcher Ausdruck gefunden, so kann man ihn leicht in einen ähnlichen s gliedrigen Ausdruck

$$V_1 \partial v_1 + \ldots + V_s \partial v_s$$

umformen, wo eine der Grössen v eine beliebige Function der Grössen

$$u_1 \ldots u_s \; \frac{U_1}{U_s} \ldots \frac{U_{s-1}}{U_s}$$

ist *).

Denn setzen wir

(1) $$\Pi(u_1 \ldots u_s \, v_1 \ldots v_s) = 0$$

wo Π eine willkürliche Fnnction bedeutet und bestimmen aus dieser Gleichung im Verein mit den folgenden $(s-1)$ Gleichungen

(2) $$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} : \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} : \ldots : \frac{\partial \Pi}{\partial u_s} = U_1 : U_2 : \ldots : U_s$$

die Grössen $v_1 \ldots v_s$ als Functionen von $u_1 \ldots u_s \frac{U_1}{U_s} \quad \frac{U_{s-1}}{U_s}$, so erhält man, wenn

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} : U_1 = \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial u_s} : U_s = \lambda$$

gesetzt wird, ans (1) nnd (2)

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} \partial u_1 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial u_s} \partial u_s + \frac{\partial \Pi}{\partial v_1} \partial v_1 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial v_s} \partial v_s$$
$$= \lambda (U_1 \partial u_1 + \ldots + U_s \partial u_s) + \frac{\partial \Pi}{\partial v_1} \partial v_1 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial v_s} \partial v_s$$

also

$$U_1 \partial u_1 + + \ldots + U_s \partial u_s = -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial v_1} \partial v_1 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial v_s} \partial v_s \right)$$

welches die gesuchte Umformung ist. Wegen der Willkürlichkeit von Π ist eine der Fnnctionen v eine ganz beliebige Function der Grössen

$$u_1 \ldots u_s \; \frac{U_1}{U_s} \;\; . \;\; \frac{U_{s-1}}{U_s}$$

die Grössen V sind bis auf den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{\lambda}$ ebenfalls Functionen dieser Grössen.

Die Gleichung

---

*) Vgl. C. I p. 196 - 198 wo zugleich bewiesen wird, dass die oben angegebene Umformung die allgemeinste ist, worauf es aber für das Folgende nicht ankommt.

(3) $$X_1 \partial x_1 + \ldots + X_n \partial x_n = U_1 \partial u_1 + \ldots + U_s \partial u_s$$

zerfällt offenbar in die n Gleichungen

(3_a) $$X_i = U_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \ldots + U_s \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots n)$$

Bildet man nun die Grössen

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = (ik)$$

wo $$(ik) = -(ki), \quad (ii) = 0$$

so erhält man

(3_b) $$(ik) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left\{ \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_k} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_k} \right\}$$

Die Gleichungen (3_a) und (3_b) können dazu dienen, den kleinsten Wert, den s annehmen kann, wenn über die X keine besonderen Voraussetzungen gelten sollen, zu ermitteln.

Es sei zunächst n gerade.

Aus (3_b) findet man die Determinante D der Grössen (ik) durch zeilenweise Zusammensetzung der beiden folgenden Systeme mit je $2s$ Colonnen und n Zeilen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial U_s}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_s}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial U_s}{\partial x_n} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial u_s}{\partial x_n} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial u_s}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \cdots - \frac{\partial U_s}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial u_s}{\partial x_n} - \frac{\partial U_1}{\partial x_n} \cdots - \frac{\partial U_s}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Nach einem bekannten Satze verschwindet aber eine aus solchen Systemen zusammengesetzte Determinante stets, wenn $2s < n$ ist *). Da aber D bei geradem n im Allgemeinen von Null verschieden ist, so darf, falls nicht zwischen den X die Bedingungsgleichung $D = 0$ stattfindet, s nicht kleiner als $\frac{n}{2}$ sein. Ist n ungerade, so betrachten wir die Determinante mit $(n+1)^2$ Elementen:

$$D' = \begin{vmatrix} 0 & (12) & \ldots & (1n) & X_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n1) & (n2) & \ldots & 0 & X_n \\ -X_1 & -X_2 & \ldots & -X_n & 0 \end{vmatrix}$$

*) Baltzer, Theorie der Determinanten, 2te Auflage S. 37

Digitized by Google

welche für ein ungerades n im Allgemeinen von Null verschieden ist. Vermöge der Gleichungen (3_a) und (3_b) setzt sich D' zeilenweise zusammen aus den Systemen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \ldots, \frac{\partial U_s}{\partial x_1} & \frac{\partial u_s}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_s}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_n} \ldots \frac{\partial U_s}{\partial x_n} & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \ldots \frac{\partial u_s}{\partial x_n} \\ U_1 \ldots U_s & 0 \ldots 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_s}{\partial x_1} & -\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \ldots -\frac{\partial U_s}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \ldots \frac{\partial u_s}{\partial x_n} & -\frac{\partial U_1}{\partial x_n} \ldots -\frac{\partial U_s}{\partial x_n} \\ 0 \ldots 0 & -U_1 \ldots -U_s \end{vmatrix}$$

deren jede aus $2s$ Colonnen und $n+1$ Zeilen besteht. Soll also zwischen den X nicht die Bedingungsgleichung $D'=0$ stattfinden, so darf für ein ungerades n s nicht kleiner als $\frac{n+1}{2}$ sein. Nehmen wir nun in diesem Falle für s die kleinste Zahl $\frac{n+1}{2}$ so ist die Anzahl der Functionen U und u um 1 grösser als die der Variablen x, folglich muss zwischen den U und u eine von den x freie Relation bestehen, diese muss jedoch eine der Grössen U enthalten, weil sonst der Ausdruck $\Sigma U \partial u$ sich auf einen ähnlichen Ausdruck mit weniger als $\frac{n+1}{2}$ Gliedern würde überführen lassen *).

Es sei

$$U_{\frac{n+1}{2}} = \psi\left(u_1 \ldots u_{\frac{n+1}{2}}, \quad U_1 \ldots U_{\frac{n-1}{2}}\right)$$

Nach dem oben bewiesenen Satze lässt sich $\Sigma U \partial u$ in einen ähnlichen Ausdruck $\Sigma V \partial v$ mit einer gleichen Gliederzahl transformiren, worin eine der Grössen v eine beliebige Function der Grössen

$$u_1 \ldots u_{\frac{n+1}{2}} \; \frac{U_1}{U_{\frac{n+1}{2}}} \ldots \frac{U_{n-1}}{U_{\frac{n+1}{2}}}$$

also, wenn wir für $U_{\frac{n+1}{2}}$ obigen Wert einsetzen, eine beliebige Function der n Grössen

$$u_1 \ldots u_{\frac{n+1}{2}} \; U_1 \ldots U_{\frac{n-1}{2}}$$

ist. Dies sind aber n von einander unabhängige Functionen von x. Es kann demnach für eine der Grössen v eine willkürliche Function der x genommen werden.

*) C. I p. 218

Digitized by Google

Die eben angestellten Betrachtungen haben zu folgendem Resultat geführt. Wenn die X allgemein gelassen werden, so kann man identisch setzen:

$$X_1 \partial x_1 + \dots + X_{2n} \partial x_{2n} = U_1 \partial u_1 + \dots + U_n \partial u_n$$
$$X_1 \partial x_1 + \dots + X_{2n+1} \partial x_{2n+1} = U_1 \partial u_1 + \dots + U_{n+1} \partial u_{n+1}$$

wo von den in der 2ten Gleichung vorkommenden u eine willkürlich gewählt werden kann.

Wir kehren nunmehr zu den für jedes beliebige n und s gültigen Relationen (3_a) und (3_b) zurück, um aus ihnen weitere Folgungen zu ziehen, die unabhängig davon sindn, ob zwischen den X Bedingungsgleichungen stattfinden oder nicht.

Man multiplicire die beiden Seiten der Gleichung (3_b) mit δx_k und addire die $2n$ hieraus für $k = 1, 2 \dots n$ hervorgehenden Gleichungen; alsdann erhält man

$$(3_c) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} (i\,k)\,\delta x_k = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left\{ \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} \delta U_\lambda - \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_i} \delta u_\lambda \right\}$$

Verbindet man hiermit die Gleichung

$$(3_a) \qquad X_i = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} U_\lambda \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i}$$

so ergiebt sich durch Elimination von $\frac{\partial u_s}{\partial x_i}$

$$U_s \sum_{k=1}^{k=n} (i\,k)\,\delta x_k - X_i \delta U_s =$$
$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=s-1} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} (U_s \delta U_\lambda - U_\lambda \delta U_s) - U_s \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_i} \delta u_\lambda$$

und durch Division mit U_s schliesslich:

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} (i\,k)\,\delta x_k = X_i \frac{\delta U_s}{U_s} + U_s \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s-1} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} \delta \left(\frac{U_\lambda}{U_s} \right) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_s} \delta u_\lambda$$

$$i = 1, \quad 2 \dots n$$

Diese n identischen Gleichnngen, welche wir als analytische Folgen aus der vorausgesetzten Identität (1) erhalten haben, sind die Fundamentalrelationen, aus denen im Folgenden die Lösung des Pfaff'schen Problems in der von Herrn Natani angegebenen Form hervorgehen wird.

Digitized by Google

§. 2.

Wir beginnen mit dem Falle einer geraden Anzahl der Variablen x, gehen also nach dem Vorhergehenden von der identischen Gleichung

$$(5)\qquad X_1\delta x_1 + \ldots + X_{2n}\delta x_{2n} = U_1\delta u_1 + \ldots + U_n\delta u_n$$

aus, indem wir die Determinante D der Grössen (ik) als von Null verschieden voraussetzen. Nach (4) folgen aus (5) die $2n$ Identitaten:

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{k=2n}(ik)\,\delta x_k = X_i\frac{\delta U_n}{U_n} + U_n\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i}\,\delta\left(\frac{U_\lambda}{U_n}\right) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i}\,\delta u_\lambda$$

$$(i = 1,\ 2\ \ldots 2n)$$

Aus diesen folgt zunächst, dass das System (das erste Pfaff'sche)

$$(7)\qquad \begin{array}{l} \Sigma(1\,k)\,dx_k = X_1\dfrac{dU_n}{U_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma(2n,k)\,dx_k = X_{2n}\dfrac{dU_n}{U_n} \end{array}$$

welches durch Elimination von U_n in ein System von $2n-1$ Differentialgleichungen zwischen den x allein übergeht, die $2n-1$ Grössen

$$\frac{U_1}{U_n}\cdots\frac{U_{n-1}}{U_n}\qquad u_1 u_2 \ldots u_n$$

gleich Constanten gesetzt, zu Integralen hat. Ist ein Integral $\alpha =$ const. bekannt, so muss α eine Function der vorstehenden Grössen sein; da aber nach dem in §. 1. bewiesenen Satze der Ausdruck

$$U_1\delta u_1 + \ldots + U_n\delta u_n$$

stets in einen ähnlichen Ausdruck

$$V_1\delta v_1 + \ldots + V_n\delta v_n$$

übergeführt werden kann, worin $v_1 = \alpha$ ist, so ersieht man, dass unbeschadet der Allgemeinheit, die in der Ausgangsgleichung (5) vorkommende Grösse u_1 gleich const. gesetzt, als das bekannte Integral angesehen werden darf.

Aus (6) folgt ferner, dass das System

$$(8)\qquad \begin{array}{l} \Sigma(1k)\,dx_k = X_1\dfrac{dU_n}{U_n} + U_n\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\,d\left(\dfrac{U_1}{U_n}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma(2n,k)\,dx_k = X_{2n}\dfrac{dU_n}{U_n} + U_n\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n}}\,d\left(\dfrac{U_1}{U_n}\right) \end{array}$$

worin u_1 jetzt eine bekannte Function der x ist, und welch
Elimination der nur linear vorkommenden Grössen $\frac{dU_n}{U_n}$ un
in ein System von $2n-2$ totalen Differentialgleichu
den x allein übergeht, integrabel ist und zwar die 2

$$\frac{U_2}{U_n}\ \frac{U_3}{U_n} \cdots \frac{U_{n-1}}{U_n},\ u_1,\ u_2 \ldots$$

gleich Constanten gesetzt, zu Integralen hat.
const. verschiedenes Integral des Systems (8
dass β eine Function der Grössen $\frac{U_2}{U_n}$.
wiederum nach dem bereits angeführten Satze u.

$$U_2 \delta u_2 + \ldots + U_n \delta u_n$$

in den ähnlichen

$$V_2 \delta v_2 + \ldots + V_n \delta v_n$$

übergeführt werden, so dass $v_2 = \beta$ wird. Man kann daher unbeschadet der Allgemeinheit die in der Gleichung (1) vorkommende Grösse u_2 gleich const. gesetzt, als das bekannte Integral des Systems (8) annehmen.

Aus (6) folgt dann, dass das System

$$(9)\quad \begin{aligned} \Sigma(1k)\,dx &= X_1 \frac{dU_n}{U_n} + U_n \frac{\partial u_1}{\partial x_1} d\left(\frac{U_1}{U_n}\right) + U_n \frac{\partial u_2}{\partial x_1} d\left(\frac{U_2}{U_n}\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma(2n,k)\,dx_k &= X_{2n} \frac{dU_n}{U_n} + U_n \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n}} d\left(\frac{U_1}{U_n}\right) + U_n \frac{\partial u_2}{\partial x_{2n}} d\left(\frac{U_2}{U_n}\right) \end{aligned}$$

worin u_1 und u_2 bekannte Functienen der x sind, und welches durch Elimination der linear vorkommenden Grössen $\frac{dU_n}{U_n}$, $U_n d\left(\frac{U_1}{U_n}\right)$, $U_n d\left(\frac{U_2}{U_n}\right)$ in ein System von $2n-3$ totalen Differentialgleichungen zwischen den x allein übergeht, integrabel ist, und zwar die $2n-3$ Grössen

$$\frac{U_3}{U_n} \cdots \frac{U_{n-1}}{U_n}\quad u_1\ u_2 \ldots u_n$$

gleich Constanten gesetzt, zu Integralen hat.

Von dem System (9) ist nun ein von den Integralen $u_1 =$ const. $u_2 =$ const. verschiedenes Integral aufzusuchen, als welches nach dem wiederholt angeführten Satze $u_3 =$ const. angesehen werden kann, und mit Hülfe desselben das beschriebene Verfahren fortzusetzen.

Nachdem auf diese Weise die Functionen $u_1 \ldots u_{i-1}$ ermittelt sind, findet sich u_i durch Integration des Systems

$$\begin{array}{l} \Sigma(1\,k)dx_k = X_1\dfrac{dU_n}{U_n} + U_n\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}d\left(\dfrac{U_1}{U_n}\right) + \ldots + U_n\dfrac{\partial u_{i-1}}{\partial x_1}d\left(\dfrac{U_{i-1}}{U_n}\right) \\ (10)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma(2n,k)dx_k = X_{2n}\dfrac{dU_n}{U_n} + U_n\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n}}d\left(\dfrac{U_1}{U_n}\right) + \ldots + U_n\dfrac{\partial u_{i-1}}{\partial x_{2n}}d\left(\dfrac{U_{i-1}}{U_n}\right) \end{array}$$

welches nach (6) die Grössen

$$\frac{U_1}{U_n} \ldots \frac{U_{n-1}}{U_n} \quad u_1 \ldots u_n$$

gleich Constanten gesetzt, zu Integralen hat.

Die Systeme (7) (8) (9) (10) gehen in die Systeme (11) (24) (25) 27) der Natani'schen Abhandlung über, wenn $U_n = \frac{1}{A}\ \frac{U_r}{U_n} = \alpha_r$ gesetzt und beachtet wird, dass $(ik) = -(ki)$ ist.

Jede Function f der x, welche gleich einer Constanten gesetzt, ein Integral des Systems (10) ist, deren Differential df also vermöge der Gleichungen (10) identisch Null wird, genügt offenbar folgendem System von i linearen partiellen Differentialgleichungen

$$\left|\begin{array}{cccc} (11) & \ldots & (1,2n), & X_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (2n,1) & \ldots & (2n,2n), & X_{2n} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n}} & 0 \end{array}\right| = 0 \qquad \left|\begin{array}{cccc} (11) & \ldots & (1,2n), & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (2n,1) & \ldots & (2n,2n), & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n}} & 0 \end{array}\right| = 0$$

$$\left|\begin{array}{cccc} (11) & \ldots & (1,2n), & \dfrac{\partial u_{i-1}}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (2n,1) & \ldots & (2n,2n), & \dfrac{\partial u_{i-1}}{\partial x_{2n}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_{2n}} & 0 \end{array}\right| = 0$$

welche nur der Ausdruck dafür sind, dass $df = 0$ eine Folge der Gleichungen (10) ist. Wir bezeichnen diese Gleichungen, nachdem sie durch D dividirt sind, der Reihe nach mit

$$Af = 0 \quad B_1(f) = 0 \ldots B_{i-1}(f) = 0$$

Nach den partiellen Derivirten $\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f}{\partial x_{2n}}$ geordnet, wird, wenn D_{ik} die dem Elemente (ik) der Determinante D entsprechende Unterdeterminante bedeutet,

$$A(f) = \sum_{i=1}^{i=2n} \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{D_{ik}}{D} X_i \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad B_s(f) = \sum_{i=1}^{i=2n} \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{D_{ik}}{D} \frac{\partial u_s}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

Diese gehen aber in die von Clebsch *) aufgestellten Gleichungen über, wenn man beachtet, dass $D_{ik}:D = R_{ik}:R$, wo R die ganze rationale Function der Grössen (ik) bedeutet, deren Quadrat gleich D ist, und R_{ik} der Differentialquotient von R nach (ik) ist.

Man hat demnach zur Auffindung der Functionen $u_1 \ldots u_n$ zunächst ein Integral der linearen partiellen Differentialgleichung

$$A(f) = 0$$

aufzusuchen, und bezeichne es mit u_1, alsdann suche man eine von u_1 verschiedenes Integral des Systems simultaner Gleichungen

$$A(f) = 0 \quad B_1(f) = 0$$

und bezeichne es mit u_2, bilde dann das System simultaner Gleichungen

$$A(f) = 0 \quad B_1(f) = 0 \quad B_2(f) = 0$$

wovon ein von $u_1\, u_2$ verschiedenes gemeinsames Integral zu suchen ist, nenne dies u_3 und fahre in der nämlichen Weise fort; sind auf diesem Wege die Grössen $u_1 \ldots u_{n-1}$ gefunden, so ergiebt sich u_n als das von diesen Grössen verschiedene gemeinschaftliche Integral des simultanen Systems

$$A(f) = 0 \quad B_1(f) = 0 \ldots B_{n-1}(f) = 0$$

Aus diesen Bestimmungen erhellt, dass die Grössen $u_1 \ldots u_n$ den $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen

(11) $$A(u_s) = 0 \quad B_r(u_s) = 0$$

genügen, wo s alle Zahlen $1, 2 \ldots n$ und r die Zahlen $1, 2 \ldots s-1$ zu durchlaufen hat **).

*) C. II p. 149 ff.

**) C. II 150. Nach der daselbst gewählten Bezeichnung ist $A(\varphi)$ mit (φ) und $B_s(\varphi)$ mit $[u_s.\varphi]$ gleichbedeutend.

Man kann nun leicht auch direct nachweisen, dass, wenn die Bedingungsgleichungen (11) zwischen n Functionen $u_1 \dots u_n$ bestehen, der Ausdruck $\Sigma X \partial x$ stets auf die Form

$$U_1 \partial u_1 + \dots + U_n \partial u_n$$

gebracht werden kann.

Beachten wir nämlich, dass identisch $B_s(u_s) = 0$ und $B_s(u_r) = -B_r(u_s)$ ist, so folgt, aus (11), dass das System

$$A(f) = 0 \quad B_1(f) = 0 \dots B_{n-1}(f) = 0$$

durch jedes der Integrale $u_1 \dots u_n$ gleichzeitig befriedigt wird. Multipliciren wir nun diese Gleichungen mit n beliebigen Grössen $\lambda_1 \dots \lambda_n$ und addiren, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_1 A(f) + \lambda_2 B_1(f) + \dots + \lambda_n B_{n-1}(f) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\lambda_1 \Sigma D_{i1} X_i + \lambda_2 \Sigma D_{i1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_n \Sigma D_{i1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i}\right) + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\lambda_1 D_{i2} X_i + \lambda_2 \Sigma D_{i2} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_n \Sigma D_{i2} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i}\right) + \\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial x_{2n}}\left(\lambda_1 \Sigma D_{i,2n} X_i + \lambda_2 \Sigma D_{i,2n} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_n \Sigma D_{i,2n} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}$$

Die Functionen $u_1 \dots u_n$ sind offenbar auch Integrale dieser partiellen Differentialgleichung, folglich gleich Constanten gesetzt, auch Integrale des Systems der totalen Differentialgleichungen

$$(12)\quad \begin{aligned}
dx_1 &= \lambda_1 \varepsilon \Sigma D_{i1} X_i + \lambda_2 \varepsilon \Sigma D_{i1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_n \varepsilon \Sigma D_{i1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
dx_{2n} &= \lambda_1 \varepsilon \Sigma D_{i,2n} X_i + \lambda_2 \varepsilon \Sigma D_{i,2n} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_n \varepsilon \Sigma D_{i,2n} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

wo ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Die n unendlich kleinen Grössen $\lambda_1 \varepsilon \dots \lambda_n \varepsilon$, welche nicht selbst genaue Differentiale zu sein brauchen, können in der allgemeinsten Weise von der Form

$$\lambda_i \varepsilon = V_{i1} dv_1 + \dots + V_{in} dv_n$$

vorausgesetzt werden, wo die V Functionen der v bedeuten. Alsdann sind die x vermöge der totalen Differentialgleichungen (12) als Functionen der n unabhängigen Grössen $v_1 \dots v_n$ definirt. Da nun diese Gleichungen nach dem Obigen die n Functionen $u_1 \dots u_n$ gleich Con-

stanten gesetzt zu Integralen haben, so hat man, wenn man die x als Functionen der $2n$ Variablen r, u ausdrückt, identisch:

$$\delta x_1 = \Delta_1 \Sigma D_{i1} X_i + \Delta_2 \Sigma D_{i1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \Delta_n \Sigma D_{i1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i} + r_{11}\delta u_1 + \dots + r_{1n}\delta u_n$$

. . . .

. . . .

$$\delta x_{2n} = \Delta_1 \Sigma D_{i2n} X_i + \Delta_2 \Sigma D_{i,2n} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \Delta_n \Sigma D_{i,2n} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_i} + r_{n1}\delta u_1 + \dots + r_{nn}\delta u_n$$

wo

$$\Delta_i = V_{i1}\delta r_1 + \dots + V_{in}\delta r_n$$

und r_{ik} beliebige Functionen bezeichnen.

Multiplicirt man nun die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach mit $X_1 \dots X_{2n}$ und addirt, so verschwinden die mit $\Delta_1 \dots \Delta_r$ multiplicirten Glieder einzeln, da (wegen $D_{ii} = 0$ $D_{ik} = - D_{ki}$) $\Sigma\Sigma D_{ik} X_i X_k = 0$ und ferner nach (11) $\Sigma\Sigma D_{ik} X_k \frac{\partial u_r}{\partial x_i} = - D A(u_r) = 0$ ist, und man erhält folglich für $\Sigma X \delta x$ die Form $U_1\delta u_1 + \dots + U_n \delta u_n$ q. e. d.

Nachdem die u gefunden sind, ergeben sich die U durch Auflösung von irgend n der $2n$ linearen Gleichungen

$$X_i = U_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + U_n \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \quad (i = 1,\ 2 \dots 2n)$$

nach den U. Da nun $u_1 \dots u_n$ $\frac{U_1}{U_n} \dots \frac{U_{n-1}}{U_n}$ die $2n-1$ von einander unabhängigen Integrale der partiellen Differentialgleichung $A(f) = 0$ oder gleich Constanten gesetzt, die vollständigen Lösungen des ersten Pfaff'schen Systems (7) sind, so ist hiermit die vollständige Integration dieses Systems oder der entsprechenden partiellen Differentialgleichung auf die Ermittelung je eines Integrals von n successive aufzustellenden integrablen Systemen totaler Differentialgleichungen oder der entsprechenden simultanen partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt.

Zur Aufstellung der zwischen den Operationen $A(\varphi)$ und $B_r(\varphi)$ bestehenden Beziehungen, betrachten wir das System (10), welchem die simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$(10_a) \qquad A(f) = 0 \quad B_1(f) = 0 \dots B_{i-1}(f) = 0$$

zugehören. Setzen wir der Kürze wegen $\frac{U_r}{U_n} = \alpha_r$, so können wir die x vermöge der Gleichungen (10) als Functionen der i unabhängigen Variablen U_n, $\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_{i-1}$ definirt betrachten. Bedeutet nun φ eine beliebige Function der x, in der die genannten unabhängigen Variablen nicht vorkommen, so ist vermöge (10)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial U_n} = \frac{A(\varphi)}{U_n}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_s} = B_0(\varphi) \, . \, U_n$$

und hieraus

$$\frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial U_n}}{\partial\alpha_s} = B_s A(\varphi), \quad \frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_s}}{\partial U_n} = AB_s(\varphi) + B_s(\varphi)$$

folglich

(13) $$AB_s(\varphi) - B_s A(\varphi) = - B_s(\varphi) \, {}^{*})$$

ebenso folgt aus

$$\frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_r}}{\partial\alpha_s} = U_n{}^2 B_s B_r(\varphi), \quad \frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_s}}{\partial\alpha_r} = U_n{}^2 B_r B_s(\varphi)$$

(14) $$B_r B_s(\varphi) - B_s B_r(\varphi) = 0 \, {}^{*})$$

Die Gleichungen (13) und (14) liefern die Integrabilitätsbedingungen für das System (10) oder die simultanen Gleichungen (10_a), welche letzteren nach der Clebsch'schen Bezeichnung ein completes System bilden, aber kein Jacobi'sches, da nach den Gleichungen (13) $AB_s(f) - B_s A(f)$ wol in Folge der Gleichungen (10_a) jedoch nicht identisch verschwindet. Betrachten wir nun das aus 2 Gleichungen bestehende simultane System

$$A(f) = 0 \quad B_1(f) = 0$$

zu deren Aufstellung die Kenntniss eines Integrals u_1 von $A(f) = 0$ erforderlich ist. Ist noch ein 2tes Integral v von $A(f) = 0$ bekannt, welches nicht gleichzeitig die 2te Gleichung befriedigt, so folgt aus (13)

(15) $$AB_1(v) = - B_1(v) \, {}^{**})$$

oder da $\frac{\partial\varphi}{\partial U_n} = \frac{A(\varphi)}{U_n}$, indem $B_1(v)$ für φ gesetzt wird

$$U_n \frac{\partial B_1(v)}{\partial U_n} = - B_1(v)$$

und hieraus durch Integration

$$\frac{c}{U_n} = B_1(v)$$

---

*) C. II 160.

**) C. I p. 249 Gl. (53).

so dass durch Auffindung zweier Integrale von $A(f) = 0$ U_n unmittelbar angegeben werden kann. Dies Resultat ist zuerst von Clebsch abgeleitet worden *), hieraus folgt der weitere Satz, dass, wenn ein drittes Integral w von $A(f) = 0$ bekannt ist

$$\frac{B_1(v)}{B_1(w)} = \text{const.,} \quad \text{also} \quad A\left(\frac{B_1(v)}{B_1(w)}\right) = 0$$

demnach $\frac{B_1(v)}{B_1(w)}$ ein neues Integral von $A(f) = 0$ ist, also aus 3 Integralen des ersten Pfaff'schen Systems (7) die übrigen Integrale desselben durch blosse Differentiationen abgeleitet werden können **). Indess lassen sich bereits aus 2 Integralen die übrigen in dieser Weise ableiten, denn aus (13) folgt, wenn man $B_1(v)$ für φ setzt

$$AB_1B_1(v) - B_1AB_1(v) = -B_1B_1(v)$$

und da nach (15)

$$AB_1(v) = -B_1(v)$$

(16) $$AB_1B_1(v) + 2B_1B_1(v) = 0$$

Multiplicirt man (15) mit $2B_1B_1(v)$, (16) mit $B_1(v)$ und subtrahirt, so erhält man nach Division durch $(B_1(v))^3$

$$0 = \frac{AB_1B_1(v)}{(B_1(v))^2} - \frac{2B_1B_1(v)AB_1(v)}{(B_1(v))^3} = A\left(\frac{B_1B_1(v)}{(B_1(v))^2}\right)$$

so dass $\frac{B_1B_1(v)}{B_1(v)^2}$ ein neues Integral von $A(f) = 0$ oder gleich const. gesetzt, des ersten Pfaff'schen Systems ist ***). Dies von Clebsch gefundene Resultat ist das Analogon des Poisson'schen Satzes. Man kann dem letzterhaltenen Ausdruck mit Herrn Natani auch die Form geben

$$\frac{\partial \log \frac{\partial v}{\partial \alpha_1}}{\partial \alpha_1} \;\dagger)$$

Was die Auffindung eines Integrals des Systems (10) oder einer gemeinschaftlichen Lösung der simultanen Gleichungen (10_a) betrifft, so bemerken wir, dass nach Elimination der Grössen $\frac{dU_n}{U_n}$, $U_n d\left(\frac{U_1}{U_n}\right)$

---

*) C. II p. 168, wobei zur Vergleichung zu bemerken ist, dass die Grösse t daselbst mit U_n in der Beziehung $\log U_n = t$ steht.

**) ib.

***) C. I p. 249

†) Natani, Höhere Analysis Berlin 1866 p. 325.

$U_n d\left(\frac{U_i}{U_n}\right)$ und Auflösung der Gleichungeu nach $2n-i$ der Grössen dx sich ein System von $2n-i$ totalen Differentialgleichungen zwischen den x alleiu ergiebt, deren zugehörige i simultane particlle Differentialgleichnugen aus denen in (10_a) erhalten werden, wenn man der Reihe nach i der Grössen $\frac{\partial f}{\partial x_1}\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{2n}}$ durch die übrigen ausdrückt. Die so umgeformten Gleichnugen bilden stets ein Jacobisches System *) und jede derselben enthält nur $2n-i+1$ Veränderliche, nach denen differentiirt wird, während die $i-1$ übrigen Veränderlichen als Integrale der betreffenden Gleichung angesehen werden können*). Das Verfahren nun, eine gemeinsame Lösung eines Jacobischen Systems zu ermitteln, dürfen wir nach den Arbeiten Jacobi's selbst und den Vervollkommnungen, welche hierin durch die Arbeiten der Herren Natani, Weiler, Du Bois Reymond, Mayer **) eingeführt sind, als genügend bekannt voraussetzen.

§. 3.

In gleicher Weise wie der im vorhergehenden Paragraphen untersuchte Fall lässt sich der Fall behandeln, wo zwischen den X solche Beziehungen obwalten, dass man

(1) $$X_1\,\delta x_1 + \ldots + X_n\,\delta x_n = U_1\,\delta u_1 + \ldots + U_s\,\delta u_s$$

wo n gerade oder ungerade $s < \frac{n}{2}$ ist, setzen kann, *ohne dass zwischen den U, u eine von den x freie Relation stattfindet.*

Bezeichnen $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_{2s}$ irgend $2s$ verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2 \ldots n$, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für das Nichtvorhandensein einer derartigen Relation, dass wenigstens eine der Determinanten

---

*) Clebsch (II p. 173) und Weiler (Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik Jahrg. VIII 1863 p. 264) haben eine allgemeine Methode angegeben, ein beliebiges completes System simultaner Gleichungen in ein Jacobi'sches umzuformen.

**) Wir verweisen zur Orientirung auf diesem Gebiete auf die ausführliche Abhandlung des Herrn Mayer „Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen". Math. Ann. V p. 448—470. Ein Auszug derselben findet sich in dem Werke des Herrn Mansion, Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris 1875 p. 206—220.

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial U_s}{\partial x_{\alpha_1}}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial u_s}{\partial x_{\alpha_1}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_{\alpha_{2s}}} \cdots \frac{\partial U_s}{\partial x_{\alpha_{2s}}}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_{\alpha_{2s}}} \cdots \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha_{2s}}} \end{matrix}\right|$$

von Null verschieden ist. Nun folgt aber aus der Relation

$$(ik) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_k}\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_k}$$

dass die Determinante

$$\left|\begin{matrix} (\alpha_1\,\alpha_1) & \ldots & (\alpha_1\,\alpha_{2s}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ (\alpha_{2s}\,\alpha_1) & \ldots & (\alpha_{2s}\,\alpha_{2s}) \end{matrix}\right|$$

das Quadrat der ersteren Determinante ist. Obige Voraussetzung ist daher darauf zurückgeführt, dass wenigstens für eine Combination von je $2s$ Zahlen aus der Reihe $1, 2 \ldots n$ die entsprechende aus der Determinante D der (ik) gebildete Hauptunterdeterminante $2s$ten Grades von Null verschieden ist.

Wir werden im Folgenden annehmen, dass die Determinante

$$D^s = \left|\begin{matrix} (11) & \ldots & (1, 2s) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ (2s, 1) & \ldots & (2s, 2s) \end{matrix}\right|$$

nicht verschwindet.

Aus den Relationen (4) in §. 1., die eine analytische Folge von (1) ist, erkennt man, dass das System von $2s$ Gleichungen *)

(2)
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} (1,k)\,dx_k &= X_1\,\frac{\partial U_s}{U_s} \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \sum_{k=1}^{k=n} (2s,k)\,dx_k &= X_{2s}\,\frac{dU_s}{U_s} \end{aligned}$$

welches nach Elimination von U_s in $2s-1$ totale Differentialgleichungen zwischen den x allein übergeht, die $2s-1$ von einander unabhängigen Grössen

*) N. Gl. (21).

$$\frac{U_1}{U_s} \cdots \frac{U_{s-1}}{U_s} \quad u_1 \ldots u_s$$

gleich Constanten gesetzt, zu Integralen hat. Da vermöge derselben Fundamentalrelationen auch die $n-2s$ übrigen Gleichungen

$$(2_a) \quad \sum_{k=1}^{k=n} (2s+\varrho, k) dx_k = X_{2s+\varrho} \frac{dU_s}{U_s} \quad (\varrho = 1, 2 \ldots n-2s)$$

durch dieselben Integrale befriedigt werden, so folgt, dass die letzteren eine Folge der Gleichungen (2) sein müssen. Dies führt auf eine Reihe von Bedingungsgleichungen für die X, welche Herr Natani *) angegeben hat. Sie bestehen darin, dass die Unterdeterminanten von D mit mehr als $2s$ Elementen sämmtlich verschwinden, was wegen der Natur der Determinante D die Zahl von $\frac{(n-2s)(n-2s-1)}{2}$ Bedingungsgleichungen ergiebt; und dass die $n-2s$ Determinanten

$$\begin{vmatrix} (11) & \ldots (1, 2s), & X_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ (2s, 1) & \ldots (2s, 2s), & X_{2s} \\ (2s+\varrho, 1) & \ldots (2s+\varrho, 2s), & X_{2s+\varrho} \end{vmatrix} \quad (\varrho = 1, 2 \ldots n-2s)$$

verschwinden. Es sind also im Ganzen $\frac{(n-2s)(n-2s+1)}{2}$ Bedingungsgleichungen von den X zu erfüllen.

Löst man die Gleichungen (2) nach den Differentialen $dx_1 \ldots dx_{2s}$ auf, was gemäss der Voraussetzung, dass D^s von Null verschieden ist, ausführbar ist, so erhält man, wenn $D^s_{i,k}$ die dem Elemente (ik) entsprechende Unterdeterminante von D^s bedeutet

$$(2_b) \quad dx_k = \sum_{i=1}^{i=2s} \left\{ X_i \frac{dU_s}{U_s} - (i, 2s+1) dx_{2s+1} - \ldots - (i, n) dx_n \right\} \cdot \frac{D^s_{i,k}}{D^s}$$

$$(k = 1, 2 \ldots 2s)$$

Ist $f = \text{const.}$, wo f eine Function der x allein bedeutet, ein Integral der Gleichungen (2), so erhellt aus (2_b) unmittelbar, dass f eine gemeinsame Lösung der $n-2s+1$ simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen **)

---

*) l. c. Gl. (23), (23ª).

**) C. I p. 208 Gl. (25.)

$$A(f) = \sum_{i=1}^{i=2s} \sum_{k=1}^{k=2s} \frac{D^s_{i,k}}{D^s} X_i \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

$$(3) \qquad A_\varrho(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{2s+\varrho}} - \sum_{i=1}^{i=2s} \sum_{k=1}^{k=2s} \frac{D^s_{i,k}}{D^s} (i, 2s+\varrho) \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

$$\varrho = 1,\ 2 \ldots n-2s$$

ist.

Was die Beziehungen zwischen den Operationszeichen $A(\varphi)$, $A_\varrho(\varphi)$ betrifft, so folgt aus (2_b), wenn φ eine beliebige Function der Grössen x, die U_s explicirte nicht enthält, bedeutet,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \log U_s} = A(\varphi), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2s+\varrho}} = A_\varrho(\varphi)$$

und daraus

$$\frac{\partial A(\varphi)}{\partial x_{2s+\varrho}} = \frac{\partial A_\varrho(\varphi)}{\partial \log U_s}$$

was die Relation giebt

$$(3_a) \qquad AA_\varrho(\varphi) - A_\varrho A(\varphi) = 0$$

Ebenso findet man aus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{2s+\varrho}} = A_\varrho(\varphi), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2s+\sigma}} = A_\sigma(\varphi)$$

die Relationen

$$(3_b) \qquad A_\varrho A_\sigma(\varphi) - A_\sigma A_\varrho(\varphi) = 0\,^*)$$

Die Gleichungen (3_a), (3_b) zeigen, dass die simultanen Gleichungen (4) ein Jacobi'sches System bilden.

Die in (3_a) und (3_b) enthaltenen Integrabilitätsbedingungen müssen übrigens für die X auf die oben angeführten Bedingungsgleichungen führen, welche aussagen, dass die $n-2s$ Gleichungen (2_a) Folgen der Gleichungen (2) sind. Das weitere Verfahren, wenn ein Integral des Systems (2) oder eine gemeinsame Lösung der simultanen Gleichungen (3) bekannt ist, wofür wir u_s annehmen, besteht, wie in §. 2., in der Bildung eines neuen Systems von $2s$ totalen Differentialgleichungen, welches aus (2) hervorgeht, wenn in der $i$ten Gleichung auf der rechten Seite der Term $U_s \frac{\partial u_1}{\partial x_i} d\left(\frac{U_1}{U_s}\right)$ hinzutritt. Vermöge der Fundamentalrelationen (4) in §. 1. hat dasselbe, wenn wieder $\omega_k = \frac{U_k}{U_s}$ gesetzt wird. Die Grössen:

*) C. 1 Gl. (26), (28).

$$\alpha_2\,\alpha_3 \ldots \alpha_{s-1}, \quad u_1 \ldots u_s$$

gleich Constanten gesetzt, zu Integralen. Führt man ein

$$B_1(\varphi) = \sum_{i=1}^{i=2s} \sum_{k=1}^{k=2s} \frac{D^s_{ik}}{D_s} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

so ergiebt sich, dass die simultanen Gleichungen

$$A(f) = 0, \quad A_1(f) = 0 \ldots A_{n-2s} = 0, \quad B_1(f) = 0$$

die obigen Grössen zu gemeinsamen Lösungen haben. Ferner finden sich wegen der Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \log U_s} = A(\varphi), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_{2s+\varrho}} = A_\varrho(\varphi), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1} = U_s B_1(\varphi).$$

ausser den Relationen (3_a) (3^b) noch die folgenden

$$AB f(\varphi) - B_1 A(\varphi) = - B_1(\varphi)$$
$$A_\varrho B_1(\varphi) - B_1 A_\varrho(\varphi) = 0$$

Im Ganzen erhält man s Systeme totaler Differentialgleichungen oder der entsprechenden simultanen partiellen Differentialgleichungen. Das $s$te System der letzteren lautet, wenn

$$B_r(\varphi) = \sum_{i=1}^{i=2s} \sum_{k=1}^{k=2s} \frac{D^s_{ik}}{D^s} \frac{\partial u_r}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

gesetzt wird

$$A(f) = 0, \quad A_\varrho(f) = 0\{\varrho = 1, 2 \ldots n - 2s\}, \quad B_r(\varphi) = 0\{r = 1, 2 \ldots s - 1\}$$

mit den Beziehungen

$$AA_\varrho(\varphi) - A_\varrho A(\varphi) = 0, \qquad A_\varrho A_\sigma(\varphi) - A_\sigma A_\varrho(\varphi) = 0$$
$$A_\varrho B_r(\varphi) - B_r A_\varrho(\varphi) = 0, \qquad B_r B_r'(\varphi) - B_r' B_r(\varphi) = 0$$
$$AB_r(\varphi) - B_r A(\varphi) = - B_r(\varphi)$$

§. 4.

Wir gehen nunmehr über zum allgemeinen Falle einer ungeraden Anzahl von Variablen.

Nach §. 1. setzen wir

$$(1) \qquad X_1 \delta x_1 + \ldots + X_{2n+1} \delta x_{2n+1} = U_1 \delta u_1 + \ldots + U_{n+1} \delta u_{n+1}$$

wo eine der Grössen u ganz willkürlich ist. Vorausgesetzt ist hier, dass die Determinante mit $(2n+2)^2$ Elementen

$$\begin{vmatrix} (11) & \ldots & (1,2n+1), & X_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (2n+1,1) & \ldots & (2n+1,\,2n+1), & -X_{2n+1} \\ X_1 & \ldots & X_{2n+1} & 0 \end{vmatrix} = D' \text{ *)}$$

von Null verschieden ist.

Nach dem Vorgange Cayley's werden wir im Folgenden überall, wo die X in der vorstehenden Determinante vorkommen, der Symmetrie wegen

$$-X_i = (i, 2n+2), \qquad +X_i = (2n+2, i)$$

setzen, so dass die dem Element $-X_i$ entsprechende Unterdeterminante mit $D'_{i,2n+2}$ und die X_i entsprechende mit $D'_{2n+2,i}$ wird bezeichnet werden können.

Die Relationen (4) in §. 1. werden hier, wenn wir der Kürze wegen wieder

$$\alpha_i = \frac{U_i}{U_{n+1}}$$

einführen

$$(2) \quad . \sum_{k=1}^{k=2n+1} (ik)\delta x_k = X_i \frac{\delta U_{n+1}}{U_{n+1}} + U_{n+1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i}\delta\alpha_\lambda - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n+1} \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_i}\partial u_\lambda$$

Wir nehmen nun u_1 als gegeben an und bilden das System von $2n+2$ vollständigen totalen Differentialgleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{k=2n+1} (1,k)dx_k - X_1 \frac{dU_{n+1}}{U_{n+1}} = U_{n+1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} d\alpha_1 \text{ **)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \sum_{k=1}^{k=2n+1} (2n+1,k)dx_k - X_{2n+1} \frac{dU_{n+1}}{U_{n+1}} = U_{n+1} \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n+1}} d\alpha_1 \\ \sum_{k=1}^{k=2n+1} X_k dx_k = 0 \end{cases}$$

---

*) Nach der Jacobi'schen Bezeichnung ist D' das Quadrat des Ausdrucks:

$$X_1(2,3 \ldots 2n+1) + X_2(3,4 \ldots 2n+1,1) + \ldots + X_{2n+1}(1,2 \ldots 2n)$$

**) Die $2n+1$ ersten Gleichungen sind von Herrn Natani zuerst l. c. §. 7. Gl. (20) aufgestellt worden. Betreffs der dort angewandten Zeichen ist zu bemerken, dass

$$U_{n+1} = \frac{1}{A}, \quad u_1 = \varphi, \quad \alpha_1 = \mu \quad \text{ist.}$$

in welchen α_1 allein als unabhängige Variable zu betrachten ist, während

$$x_1 \dots x_{2n+1}, \quad U_{n+1}$$

die $2n+2$ abhängigen Variablen sind. Lösen wir die Gleichungen (3) nach den Differentialen

$$dx_1 \dots dx_{2n+1}, \quad d\log U_{n+1}$$

auf, was, da D' von Null verschieden, ausführbar ist, so erhalten wir

$$(4) \quad \begin{cases} dx_k = \sum\limits_{i=1}^{i=2n+1} \dfrac{D'_{i,k}}{D'} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i} U_{n+1} \quad k = 1, 2 \dots 2n+1 \\[2ex] d\log U_{n+1} = U_{n+1} \sum\limits_{i=1}^{i=2n+1} \dfrac{D'_{i,2n+2}}{D'} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i} d\alpha_1 \end{cases}$$

Die $2n+1$ ersten Gleichungen (4) führen zu den $2n$ gewöhnlichen nur die x enthaltenden Differentialgleichungen

$$(5) \quad dx_1 : \dots : dx_{2n+1} = \sum_{i=1}^{i=2n+1} \frac{D'_{i,1}}{D'} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} : \dots : \sum_{i=1}^{i=2n+1} \frac{D'_{i,2n+1}}{D'} \frac{\partial u_1}{\partial x_i}$$

Wie aus den Identitäten (1) und (2) hervorgeht, sind die von U_{n+1} und α_1 freien Integrale von (3) oder (4), welche eben die Integrale von (5) sind, die $2n$ Grössen

$$\alpha_2\, \alpha_3 \dots \alpha_n, \quad u_1\, u_2 \dots u_{n+1}$$

gleich Constanten gesetzt.

Dieselben Grössen sind, wie aus (5) unmittelbar hervorgeht, die $2n$ Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$A_1(f) = \sum_{i=1}^{i=2n+1} \sum_{k=1}^{k=2n+1} \frac{D'_{i,k}}{D'} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

Dass die gegebene Funktion u_1 selbst ein Integral von $A_1(f) = 0$ ist, erkennt man unmittelbar aus vorstehender Form, wenn man beachtet, dass $D_{ik} = -D_{ki}$ ist.

Ist ein Integral des Systems (5) gefunden, so können wir dafür nach den früheren Auseinandersetzungen u_2 nehmen, und bilden nun das System, welches aus (3) hervorgeht, indem auf der rechten Seite der $2n+1$ ersten Gleichungen die Grössen resp.

$$U_{n+1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} d\alpha_2, \quad \dots \quad U_{n+1} \frac{\partial u_2}{\partial x_{2n+1}} d\alpha_2$$

hinzu addirt werden.

Dieses System enthält die beiden unabhängigen Variablen $\alpha_1\,\alpha_2$ und besteht nach Elimination der Grössen $U_{n+1}\,c_1\,c_2$ aus $2n-1$ totalen Differentialgleichungen zwischen den $2n+1$ Grössen x, deren Integrale vermöge der Identitäten (1) und (2) die $2n-1$ Grössen

$$\alpha_3\,\alpha_4 \dots \alpha_n, \quad u_1\,u_2 \dots u_{n+1}$$

gleich Constanten gesetzt, zu Integralen haben.

Seien auf diese Weise ausser der gegebenen Function u_1 successive die Functionen $u_2 \dots u_r$ gefunden, so erhält man als das $r$te zu integrirende System

$$(6)$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+1} (1,k)dx_k - X_1 \frac{dU_{n+1}}{U_{n+1}} = U_{n+1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}d\alpha_1 + U_{n+1}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}d\alpha_2 + \dots + U_{n+1}\frac{\partial u_r}{\partial x_1}d\alpha_r$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+1} (2n+1,k)dx_k - X_{2n+1}\frac{dU_{n+1}}{U_{n+1}} = U_{n+1}\frac{\partial u_1}{\partial x_{2n+1}}d\alpha_1 + U_{n+1}\frac{\partial u_2}{\partial x_{2n+1}}d\alpha_r + \dots + U_{n+1}\frac{\partial u_r}{\partial x_{2n+1}}d\alpha_r$$

$$\sum_{k=1}^{k=2n+1} X_k dx_k = 0$$

welches nach

$$dx_1 \dots dx_{2n+1}, d\log U_{n+1}$$

aufgelöst, giebt

$$(7)$$

$$dx_k = \sum_{i=1}^{i=2n+1} \frac{D'_{i,k}}{D'}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}U_{n+1}d\alpha_1 + \dots + \sum_{i=1}^{i=2n+1}\frac{D'_{i,k}}{D'}\frac{\partial u_r}{\partial x_i}U_{n+1}d\alpha_r$$

$$(k = 1, 2 \dots 2n+1)$$

$$d\log U_{n+1} = U_{n+1}\sum_{i=1}^{i=2n+1}\frac{D'_{i,2n+2}}{D'}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}d\alpha_1 + \dots + U_{n+1}\sum_{i=1}^{i=2n+1}\frac{D'_{i,2n+2}}{D'}\frac{\partial u_r}{\partial x_i}d\alpha_r$$

Gemäss den Identitäten (1) und (2) sind die von U_{n+1} und den α freien Integrale von (6) oder (7) die $2n-r+1$ Grössen

$$\alpha_{r+1} \dots \alpha_n \quad u_1 \dots u_{n+1}$$

gleich Constanten gesetzt. Dieselben Functionen sind, wie aus den $2n+1$ ersten Gleichungen (7) hervorgeht, die gemeinsamen Lösungen der r simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen

[illegible]

Digitized by Google

$2n+1$ Variablen $v_1 \dots v_n\ u_1 \dots u_{n+1}$ ausdrücken, vermöge (9) identisch stattfinden

$$\delta x_k = \Delta_1 \sum_{i=1}^{i=2n+1} \frac{D'_{ik}}{D'} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \Delta_n \sum_{i=1}^{i=2n+1} \frac{D'_{i,k}}{D'} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}$$

(10) $$+ r_{1,k} \partial u_1 + \dots r_{n+1,k} \delta u_{n+1}$$

$$(k = 1, 2 \dots 2n+1)$$

wo

$$\Delta_a = V_{a1} \delta v_1 + \dots + V_{an} \delta v_n$$

und $r_{i,k}$ beliebige Functionen bezeichnen. Multiplicirt man nun die Gleichungen (10) der Reihe nach mit $X_1 X_2 \dots X_{2n+1}$ und addirt, so erhält man, mit Rücksicht darauf, dass

$$\sum_{k=1}^{k=2n+1} X_k D'_{i,k} = \sum_{k=1}^{k=2n+1} (2n+2, k) D'_{i,k} = \sum_{k=1}^{k=2n+2} (2n+2, k) D'_{i,k} = 0$$

für jedes i, das von $2n+2$ verschieden ist,

$$X_1 \delta x_1 + \dots + X_{2n+1} \delta x_{2n+1} = U_1 \delta u_1 + \dots + U_{n+1} \delta u_{n+1} \quad \text{q. e. d.}$$

Die Beziehungen zwischen den Operationen $A_\varrho(\varphi)$, $A_\sigma(\varphi)$ erhält man aus den Gleichungen (7) in folgender Weise: Es ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_\varrho} = U_{n+1} A_\varrho(\varphi) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_\sigma} = U_{n+1} A_\sigma(\varphi)$$

für eine beliebige Function φ der Variablen x. Hieraus

$$\frac{\partial \{U_{n+1} A_\varrho(\varphi)\}}{\partial \alpha_\sigma} = \frac{\partial \{U_{n+1} A_\sigma(\varphi)\}}{\partial \alpha_\varrho}$$

also

$$U_{n+1}^2 A_\sigma A_\varrho(\varphi) + A_\varrho(\varphi) \frac{\partial U_{n+1}}{\partial \alpha_\sigma} = U_{n+1}^2 A_\varrho A_\sigma(\varphi) + A_\sigma(\varphi) \frac{\partial U_{n+1}}{\partial \alpha_\varrho}$$

oder

$$U_{n+1} \{A_\varrho A_\sigma(\varphi) - A_\sigma A_\varrho(\varphi)\} = \frac{\partial \log U_{n+1}}{\partial \alpha_\sigma} A_\varrho(\varphi) - \frac{\partial \log U_{n+1}}{\partial \alpha_r} A_\sigma(\varphi)$$

Aber nach der letzten der Gleichungen (7) ist

$$\frac{\partial \log U_{n+1}}{\partial \alpha_\sigma} = U_{n+1} \sum_{s=1}^{i=2n+1} \frac{D'_{s,2n+2}}{D'} = U_{n+1} M_\sigma$$

Man hat demnach die Beziehungen

(11) $$A_\varrho A_\sigma(\varphi) - A_\sigma A_\varrho(\varphi) = M_\sigma A_\varrho(\varphi) - M_\varrho A_\sigma(\varphi)$$

wo M_σ durch den Quotienten zweier Determinanten definirt ist

$$M_s = \begin{vmatrix} (1,1) & \dots & (1,2n+1), & \dfrac{\partial u_s}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (2n+1,1) & \dots & (2n+1,2n+1), & \dfrac{\partial u_s}{\partial x_{2n-1}} \\ X_1 & \dots & X_{2n+1} & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (1,1) & \dots & (1,2n+1), & -X_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (2n+1,1) & \dots & (2n+1,2n+1), & -X_{2n+1} \\ X_1 & \dots & X_{2n+1} & 0 \end{vmatrix}$$

Ist v eine Lösung von $A_1(f) = 0$ oder, gleich einer Constanten gesetzt, ein Integral des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (5), welches nicht zugleich die Gleichung $A_2(f) = 0$ befriedigt, so erhält man aus (11) für $\varrho = 1$, $\sigma = 2$

$$A_1 A_2(v) = -M_1 A_2(v)$$

Sei ferner w eine 2te Lösung von $A_1(f) = 0$, die nicht zugleich $A_2(f) = 0$ befriedigt, dann wird ebenso

$$A_1 A_2(w) = -M_1 A_2(w)$$

sein. Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich

$$A_2(w) . A_1 A_2(v) - A_2(v) A_1 A_2(w) = 0$$

oder

$$A_1 \left(\frac{A_2(v)}{A_2(w)} \right) = 0$$

Demnach ist $\dfrac{A_2(v)}{A_2(w)}$ ein neues Integral von $A_1(f) = 0$, oder $\dfrac{A_2(v)}{A_2(w)} =$ const. ein neues Integral des Systems (5). Bedenkt man, dass zur Aufstellung des Ausdrucks $A_2(f)$ die Kenntniss des Integrals u_2 notwendig ist, so zeigt der eben erwiesene Satz die Möglichkeit, aus 3 bekannten Integralen des Systems (5) alle übrigen Integrale durch blosse Differentiation abzuleiten.

Ist insbesondere die Function u_1 so beschaffen, dass $M_1 = 0$ ist, dann wird

$$A_1 A_2(v) = 0$$

also ist bereits $A_2(v) =$ const. ein neues Integral des Systems (5), welches sich demnach schon aus der Kenntniss zweier Integrale ergiebt. Man kann also sagen, dass für das System (5), falls u_1 der Bedingung

$$\begin{vmatrix} (1,1) & \dots & (1,2n+1), & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (2n+1,1) & \dots & (2n+1,2n+1), & \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n+1}} \\ X_1 & \dots & X_{2n+1} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

genügt, genau der Poisson-Jacobi'sche Satz Geltung habe.

In diesem Falle zeigt die letzte der Gleichungen (4), dass $U_{n+1} = \text{const.}$ zu setzen, und aus der letzten der Gleichungen (7) folgt dann, dass auch die u_σ, welche bei den aufeinander folgenden Integrationen auftreten, der Gleichung $M_\sigma = 0$ genügen müssen; die simultanen Gleichungen $A_\sigma(f) = 0$ bilden daher in diesem Falle ein Jacobi'sches System. Aber noch eine weitere Vereinfachung in den Integrationen findet hier Statt, ähnlich derjenigen, welche in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, in denen die abhängige Variable nicht vorkommt, sich darbietet.

Die Gleichungen (2) nämlich, welche für $U_{n+1} = c$ in

$$(12) \qquad \sum_{k=1}^{k=2n+1} (ik)\delta x_k = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i}\,\delta U_2 - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_i}\,\delta u_2$$

woraus u_{n+1} verschwunden ist, übergehen, liefern als $r$tes System, nachdem $u_2 \dots u_r$ gefunden sind, die Gleichungen

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{k=2n+1} (ik)dx_k = \frac{\partial u_1}{\partial x_i}dU_1 + \dots + \frac{\partial u_r}{\partial x_i}dU_r$$

$$(i = 1, 2 \dots 2n+1)$$

welche hier ausreichen, da die im allgemeinen Falle noch hinzukommende Gleichung

$$X_1\,dx_1 + \dots + X_{2n+1}\,dx_{2n+1} = 0$$

vermöge der Gleichungen $M_\sigma = 0$ eine Folge von den obigen ist.

Nehmen wir $r = 1$, so folgt aus (12), dass das erste System die $2n-1$ von U_1 freien Integrale $U_2 \dots U_{n-1}\; u_1 \dots u_n$ hat, da aber das-

selbe nach Elimination von dU_1 aus $2n$ Gleichungen besteht, so muss eine Gleichung eine Folge der übrigen sein. Nun verschwindet bereits die Determinante D der (ik), es muss also, wenn wir annehmen, dass die Unterdeterminante $D_{2n+1,2n+1}$ nicht verschwindet, als Folge von $M_1 = 0$

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} (1,1) & \dots & (1,2n) & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (2n,1) & \dots & (2n,2n) & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n}} \\ (2n+1,1) & \dots & (2n+1,2n+1) & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n+1}} \end{vmatrix} = 0$$

sein, und ebenso alsdann in Folge von $M_\sigma = 0$ die Gleichung stattfinden, die aus (14) durch die Substitution von u_σ für u_1 hervorgeht. Es reducirt sich sonach schon das erste System auf $2n$ Gleichungen, oder nach Elimination von dU_1 auf $2n-1$ Gleichungen. Ferner hat man nur $n-1$ statt n Systeme zu integriren; denn nachdem $u_2 \dots u_n$ gefunden sind, ergiebt sich u_{n+1} durch blosse Quadratur

$$u_{n+1} = \frac{1}{c}\int X_1\,dx_1 + \dots + X_{2n+1}\,dx_{2n+1}$$

in der Voraussetzung, dass unter dem Integralzeichen, vermöge der Gleichungen

$$u_1 = c_1 \dots u_n = c_n$$

n der x durch die übrigen ausgedrückt, und nach erfolgter Integration, für $c_1 \dots c_n$ die bezüglichen Functionen u restituirt werden.

Zum Schluss lassen wir noch eine Anwendung des Vorhergehenden auf die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\varphi(z, x_1 \dots x_n\, p_1 \dots p_n) = a$$

folgen, wo $p_k = \dfrac{\partial z}{\partial x_k}$

Die Aufgabe ist identisch mit der Transformation

$$(15)\qquad \delta z - p_1\,\delta x_1 - p_2\,\delta x_2 - \dots - p_n\,\delta x_n = U_1\,\delta u_1 + \dots + U_n\,\delta u_n$$

unter der Voraussetzung, dass u_1 die gegebene Function φ sei. Die Gleichung (15) stimmt mit der Gleichung (1) überein, wenn man statt $x_1 \dots x_{2n+1}$ der Reihe nach $x_1 \dots x_n\, p_1 \dots p_n$, z und ferner

$$X_1 = -p_1 \dots X_n = -p_n \quad X_{n+1} = 0 \dots X_{2n} = 0 \quad X_{2n+1} = 1$$

setzt. Die Identitäten (2) werden $\left(\frac{U_r}{U_{n+1}} = \alpha_r\right)$

$$-\delta p_i = -p_i \frac{\delta U_{n+1}}{U_{n+1}} + U_{n+1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} \delta \alpha_\lambda - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n+1} \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_i} \delta u_\lambda$$

$$(i = 1 \ 2 \dots n)$$

(16) $$\delta x_i = \qquad U_{n+1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial u_\lambda}{\partial p_i} \delta \alpha_\lambda - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n+1} \frac{\partial U_\lambda}{\partial p_i} \delta u_\lambda$$

$$(i = 1, 2 \dots n)$$

$$0 = \frac{\delta U_{n+1}}{U_{n+1}} + U_{n+1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial u_\lambda}{\partial z} \delta \alpha_\lambda - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n+1} \frac{\partial U_\lambda}{\partial z} \delta u_\lambda$$

Hiernach lautet das erste System

$$dp_i = p_i \frac{dU_{n+1}}{U_{n+1}} - U_{n+1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} d\alpha_1, \quad dx_i = U_{n+1} \frac{\partial u_1}{\partial p_i} d\alpha_1,$$

$$0 = \frac{dU_{n+1}}{U_{n+1}} + U_{n+1} \frac{\partial u_1}{\partial z} d\alpha_1, \quad dz - p_1 dx_1 - \dots - p_n dx_n = 0 \, {}^{*})$$

welches aufgelöst giebt

$$dp_i = -U_{n+1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) d\alpha_1, \quad dx_i = U_{n+1} \frac{\partial u_1}{\partial p_i} d\alpha_1,$$

$$dz = U_{n+1} \left(p_1 \frac{\partial u_1}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial u_1}{\partial p_n}\right) dx_1$$

$$d \log U_{n+1} = -U_{n+1} \frac{\partial u_1}{\partial z} d\alpha_1$$

Die $2n+1$ ersten Gleichungen führen auf das bekannte System

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial u_1}{\partial p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial u_1}{\partial p_n}} = \frac{dz}{p_1 \frac{\partial u_1}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial u_1}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}}$$

$$= \dots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_1}{\partial z}}$$

dessen Lösungen nach (16) die Grössen

$$\alpha_2 \dots \alpha_n \quad u_1 \dots u_{n+1}$$

---

*) Vgl. N. §. 13. Gl. (28).

gleich Constanten gesetzt sind. Dieselben Functionen sind die Integrale der linearen partiellen Differentialgleichung

$$A_1(f) = \frac{\partial u_1}{\partial p_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}\right) + \dots + \frac{\partial u_1}{\partial p_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$- \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_1} - \dots - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p_n} = 0$$

Das $r$te System, nachdem $u_2 \dots u_r$ gefunden sind, lautet:

$$\left.\begin{aligned} dp_i &= - U_{n+1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u_\lambda}{\partial z}\right) d\alpha_\lambda \\ dx_i &= \quad U_{n+1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \frac{\partial u_\lambda}{\partial p_i} d\alpha_\lambda \end{aligned}\right\} \quad i = 1, 2 \dots n$$

(17)
$$dz = p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$$
$$d \log U_{n+1} = - U_{n+1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \frac{\partial u_\lambda}{\partial z} \partial \alpha_\lambda$$

und die entsprechenden simultanen Gleichungen

(18) $$A_1(f) = 0 \quad A_2(f) = 0 \dots A_r(f) = 0$$

wo

$$A_\varrho(f) = \frac{\partial u_\varrho}{\partial p_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \dots + \frac{\partial u_\varrho}{\partial p_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$- \frac{\partial f}{\partial p_1}\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_\varrho}{\partial z}\right) - \dots - \frac{\partial f}{\partial p_n}\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_\varrho}{\partial z}\right)$$

Ihre gemeinsamen Lösungen sind

$$\alpha_{r+1} \dots \alpha_n, \quad u_1 \dots u_{n+1}$$

Für die Beziehungen der $A(\varphi)$ hat man aus (17)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_\varrho} = U_{n+1} A(_\varrho(\varphi) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_\sigma} = U_{n+1} A_\sigma(\varphi)$$

und hieraus wie oben

$$U_{n+1}\{A_\varrho A_\sigma(\varphi) - A_\sigma A_\varrho(\varphi)\} = \frac{\partial \log U_{n+1}}{\partial \alpha_\sigma} A_\varrho(\varphi) - \frac{\partial \log U_{n+1}}{\partial \alpha_\varrho} A_\sigma(\varphi)$$

Nach der letzten der Gleichungen (17) ist aber

$$\frac{\partial \log U_{n+1}}{\partial \alpha_\lambda} = - U_{n+1} \frac{\partial u_\lambda}{\partial z}.$$

Wir haben demnach

$$A_\varrho A_\sigma(\varphi) - A_\sigma A_\varrho(\varphi) = \frac{\partial u_\varrho}{\partial z} A_\sigma(\varphi) - \frac{\partial u_\sigma}{\partial z} A_\varrho(\varphi)$$

Die Systeme (18) bilden also nur dann ein Jacobi'sches System, wenn die u von z frei sind, was bekanntlich stets stattfindet, wenn die gegebene Function der partiellen Differentialgleichung u_1 von z unabhängig ist*).

Wie der allgemeine Fall einer ungeraden Anzahl der x lässt sich jeder „indeterminirte Fall des Pfaff'schen Problems" nach Clebsch's Bezeichnung behandeln. Er ist dadurch charakterisirt, dass das erste Pfaff'sche System nicht auflösbar ist. Indem wir hierauf nicht näher eingehen, bemerken wir nur noch, dass die erste Methode**), welche Clebsch für diesen Fall gegeben hat, genau betrachtet, nicht die Lösung, sondern die Zurückführung des vorliegenden Problems auf das Problem der Integration einer beliebigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung angiebt.

Berlin, December 1876.

*) Vgl. Mayer, Ueber die Weiler'sche Integrationsmethode etc. Math. Ann. Bd. IX p. 370 und N. §. 13.

**) C. I p. 222 ff.

XIX.

Miscellen.

1.

Analoge Eigenschaften der ebenen und sphärischen Parabel.

Durch die Betrachtung der Projectionen der regelmässigen Körper wurde ich zufällig auf folgenden mir bis dahin unbekannten Satz geführt:

„In einem beliebigen Punkt P einer Parabel ist die Tangente p und eine Parallele PO zur Axe gezogen. Zieht man durch einen veränderlichen Punkt A der Parabel den Durchmesser AB, welcher p in B schneidet, ferner mit p eine Parallele AC, welche PO in C schneidet, und wird die Parabel durch die Verbindungslinie von B und C in D und E geschnitten, so wird die Strecke BC durch D und E innerlich und äusserlich im Verhältniss des sog. goldenen Schnittes geteilt."

Obgleich ich kaum glauben kann, dass dieser äusserst interessante Satz neu sei, so habe ich ihn dennoch in keiner der mir bekannten Sammlungen von Lehrsätzen über die Kegelschnitte gefunden und ich glaube deshalb annehmen zu dürfen, dass der genannte Satz wenigstens nicht sehr bekannt ist.

Schliesslich bemerke ich noch, dass merkwürdiger Weise auch für die sphärische Parabel ein ähnlicher Satz stattfindet.

Es seien nämlich S und S_1 die Scheitel der grossen Axe einer sphärischen Parabel, so dass also

$$SS_1 = \frac{\pi}{2},$$

der in einem beliebigen Punkt P berührende Grosskreis p schneide den in S_1 berührenden Grosskreis in Q. Durch den veränderlichen Punkt A seien gezogen die Grosskreise S_1AB und QAC. Der Grosskreis BC schneide die Parabel in D und E. Dann ist

$$\frac{\sin BD}{\cos BS}:\frac{\sin DC}{\cos CS}=-\frac{\sin CE}{\cos CS}:\frac{\sin EB}{\cos BS}=\text{const.}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Ich füge noch hinzu, dass beide Sätze sich auch auf die allgemeinen ebenen und sphärischen Kegelschnitte ausdehnen lassen.

Stuttgart, den 30. November 1876.

R. Mehmke, Polytechniker.

2.

Ueber rationale Wurzeln kubischer Gleichungen in rationaler Gestalt.

Nachstehende Notiz verfolgt nur den pädagogischen Zweck der Aufstellung kubischer Gleichungen, deren rationale Wurzeln mittels der cardanischen Formel auch in rationaler Gestalt erscheinen.

Hat nämlich eine kubische Gleichung nur eine reelle Wurzel, so wird dieselbe, wenn sie auch rational ist, durch die cardanische Formel gewöhnlich doch in irrationaler Gestalt geliefert. Daher geben die gebräuchlichsten algebraischen Aufgabensammlungen nur wenige solche Gleichungen, welche durch diese Formel ihre befriedigende Lösung finden. Der Grund obiger Erscheinung liegt in dem Umstande, dass es nicht gelingt, ähnlich wie $\sqrt{A\mp\sqrt{B}}$, so auch $\sqrt[3]{A\mp\sqrt{B}}$ in strenger Weise auf die Form $p\mp\sqrt{q}$ zu bringen. Ein Versuch dieses Ziel zu erreichen, würde immer nur wieder auf eine neue kubische Gleichung führen.

Beispiel $x^3+15x=72$, wo $x=3$; durch directe Auflösung

$$x=\sqrt[3]{36+\sqrt{1421}}+\sqrt[3]{36-\sqrt{1421}},$$

wobei man nur auf tatonnirendem Wege findet

$$x=\sqrt[3]{(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{29})^3}+\sqrt[3]{(\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{29})^3}=3.$$

In solchen Fällen bleibt dann nichts übrig als (incorrecte, weil doppelte) Wurzelausziehung, Reihenentwickelung oder Anwendung gonio-

metrischer Functionen. Dagegen lässt sich die Frage stellen und beantworten, ob und wie man kubische Gleichungen finden kann, deren rationale Wurzeln auch in rationaler Gestalt erscheinen.

Aus

$$x^3+3ax=2b$$

wo $b^2+a^3>0$ vorausgesetzt wird, ergiebt sich

$$x=\sqrt[3]{b+\sqrt{b^2+a^3}}+\text{ etc.}$$

Mit Rücksicht auf die bekannte Form der pythagoräischen Zahlen setzen wir zunächst

$$b=p^2-q^2,\quad a^3=4p^2q^2,$$

also

$$a=\sqrt[3]{4p^2q^2},$$

Damit nun a rational werde, machen wir ferner

$$p^2=\frac{m^3}{2},\quad q^2=\frac{n^3}{2}$$

und erhalten so:

$$b=\frac{m^3-n^3}{2},\quad a=mn$$

und

$$x=\sqrt[3]{\frac{m^3-n^3}{2}+\frac{m^3+n^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{m^3-n^3}{2}-\frac{m^3+n^3}{2}}=m-n.$$

In der Tat ist $m-n$ die reelle Wurzel der Gleichung

$$x^3+3mnx=m^3-n^3,$$

die anderen (imag.) Wurzeln sind $-\frac{m-n}{2}\pm\frac{m+n}{2}\sqrt{3}\,.\,i$.

Zu demselben Resultate gelangt man auch auf folgendem Wege: Es sei $m-n$ die reelle Wurzel der gegebenen Gleichung, so müssen die beiden anderen die Form haben $m\varepsilon-n\varepsilon^2$ und $m\varepsilon^2-n\varepsilon$, wo

$$\varepsilon \text{ und } \varepsilon^2=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,i.$$

Die Function $x^3+3ax-2b$ ist daher äquivalent mit

$$(x-m+n)(x^2+(m-n)x+m^2+mn+n^2),$$

woraus durch Vergleichung der Coefficienten von x und x^0 sofort resultirt $a=mn$, $b=\frac{m^3-n^3}{2}$

Eine kubische Gleichung mit einer reellen, rationalen

Wurzel und rationaler cardanischen Form muss also die Form haben

$$x^3+3mnx=m^3-n^3.$$

Berlin. Ed. Liebrecht.

3.

Variation der Hauptträgheitsaxen.

Der Schwerpunkt eines Körpers von der Masse m sei Anfangspunkt, seine Hauptträgheitsaxen Axen der $x_1\,y_1\,z_1$, seine Hauptträgheitsmomente

$$A=\int(y_1^2+z_1^2)\partial m;\quad B=\int(z_1^2+x_1^2)\partial m;\quad C=\int(x_1^2+y_1^2)\partial m$$

Zur Masse m komme nun eine unendlich kleine Masse ε hinzu, die beliebig in einem endlichen Raume oder auch in einem Punkte enthalten sei. Die Coordinaten des Schwerpunkts von ε seien ξ, η, ζ, die Trägheitsmomente von ε in Bezug auf die Axen der x_1, y_1, z_1, welche proportional ε verschwinden,

$$A'\varepsilon=\int(y_1^2+z_1^2)\partial\varepsilon;\quad B'\varepsilon=\int(z_1^2+x_1^2)\partial\varepsilon;\quad C'\varepsilon=\int(x_1^2+y_1^2)\partial\varepsilon$$

ferner sei

$$D'\varepsilon=-\int y_1z_1\partial\varepsilon;\quad E'\varepsilon=-\int z_1x_1\partial\varepsilon;\quad F'\varepsilon=-\int x_1y_1\partial\varepsilon$$

Die Coordinaten des Schwerpunkts der vereinigten Masse $m+\varepsilon$ sind dann, wenn wir alle mit höhern Potenzen von ε multiplicirten Terme jedesmal weglassen,

$$\frac{\xi\varepsilon}{m}\quad\frac{\eta\varepsilon}{m},\quad\frac{\zeta\varepsilon}{m} \tag{1}$$

Legt man nun durch diesen Schwerpunkt die Axen der $x_2y_2z_2$ in gleicher Richtung mit den vorigen, so sind die Trägheitsmomente von $m+\varepsilon$ in Bezug auf diese Axen

$$\int(y_2^2+z_2^2)\partial(m+\varepsilon)=\int\left\{\left(y_1-\frac{\eta\varepsilon}{m}\right)^2+\left(z_1-\frac{\zeta\varepsilon}{m}\right)^2\right\}\partial(m+\varepsilon)$$
$$=A+\left\{\left(\frac{\eta\varepsilon}{m}\right)^2+\left(\frac{\zeta\varepsilon}{m}\right)^2\right\}m+A'\varepsilon$$

oder, da die Terme 2. Ordnung wegfallen,

$$\int(y_2^2+z_2^2)\partial(m+\varepsilon) = A+A'\varepsilon$$
$$\int(z_2^2+x_2^2)\partial(m+\varepsilon) = B+B'\varepsilon$$
$$\int(x_2^2+y_2^2)\partial(m+\varepsilon) = C+C'\varepsilon$$

Ebenso erhält man auch die Integralwerte

$$-\int y_2 z_2\partial(m+\varepsilon) = D'\varepsilon; \quad -\int z_2 x_2\partial(m+\varepsilon) = E'\varepsilon;$$
$$-\int x_2 y_2\partial(m+\varepsilon) = F'\varepsilon$$

Vermittelst vorstehender Grössen werden bekanntermassen die Richtungscosinus a', b', c' einer Hauptträgheitsaxe in 3 Gleichungen bestimmt. Bezeichnet J das Trägheitsmoment für diese Axe, so lauten dieselben:

$$\left.\begin{aligned}(A+A'\varepsilon-J)a'+F'\varepsilon b'+E'\varepsilon c' = 0\\ (F'\varepsilon a'+(B+B'\varepsilon-J)b'+D'\varepsilon c' = 0\\ E'\varepsilon a'+D'\varepsilon b'+(C+C'\varepsilon-J)c' = 0\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

woraus nach Elimination von a', b', c':

$$\begin{vmatrix} A+A'\varepsilon-J & F'\varepsilon & E'\varepsilon \\ F'\varepsilon & B+B'\varepsilon-J & D'\varepsilon \\ E'\varepsilon & D'\varepsilon & C+C'\varepsilon-J \end{vmatrix} = 0$$

das ist mit Weglassnng der Terme 2. Ordnung:

$$(A+A'\varepsilon-J)(B+B'\varepsilon-J)(C+C'\varepsilon-J) = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung nach J aufgelöst sind die Hauptträgheitsmomente $A+\delta A$, $B+\delta B$, $C+\delta C$ von $m+\varepsilon$. Folglich siud die Variationen der Hauptträgheitsmomente entsprechend einer unendlichkleinen Massenzunahme:

$$\delta A = A'\varepsilon; \quad \delta B = B'\varepsilon; \quad \delta C = C'\varepsilon \qquad (3)$$

Sie bestehen mithin in den blossen Trägheitsmomenten des Massenzuwachses, und weder die Verrücknng des Schwerpunkts noch die Richtungsänderung der Axen hat darauf einen Einfluss in 1. Ordnung.

Setzt man in den Gl. (2) für J seinen ersten Wert $A+A'\varepsilon$, so werden sie:

$$F'\varepsilon b'+E'\varepsilon c' = 0$$
$$F'\varepsilon a'+\{B-A+(B'-A')\varepsilon\}b'+D'\varepsilon c' = 0$$
$$E'\varepsilon a'+D'\varepsilon b'+\{C-A+(C'-A')\varepsilon\}c' = 0$$

Sind, wie wir annehmen müssen, A, B, C ungleich, so variiren die Axenrichtungen stetig; daher sind b', c' unendlich klein nnd $a' = 1$. Hiermit fällt die erste Gleichnng weg, die andern geben:

$$F'\varepsilon + (B-A)b' = 0; \quad E'\varepsilon + (C-A)c' = 0$$

und nach Analogie lautet das System der Richtungscosinus der veränderten Hauptträgheitsaxen:

$$\begin{matrix} 1 & \dfrac{F'\varepsilon}{A-B} & -\dfrac{E'\varepsilon}{C-A} \\ -\dfrac{F'\varepsilon}{A-B} & 1 & \dfrac{D'\varepsilon}{B-C} \\ \dfrac{E'\varepsilon}{C-A} & -\dfrac{D'\varepsilon}{B-C} & 1 \end{matrix}$$

Nimmt man jetzt ein beliebiges festes Axensystem der xyz an, und ist die Lage des Systems der $x_1 y_1 z_1$ bestimmt durch die Relationen

$$x = x_0 + ax_1 + by_1 + cz_1$$
$$y = y_0 + a_1x_1 + b_1y^2 + c_1z_1$$
$$z = z_0 + a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1$$

so sind die Richtungscosinus der ursprünglichen x_1 Axe gegen die x, y, z $= a, a_1, a_2$, die der veränderten

$$= aa' + bb' + cc', \quad a_1a' + b_1b' + c_1c', \quad a_2a' + b_2b' + c_2c'$$

folglich, da $a' = 1$, die Variation der erstern

$$\delta a = bb' + oc'; \quad \delta a_1 = b_1b' + c_1c'; \quad \delta a_2 = b_2b' + c_2c'$$

woraus:

$$b\delta a + b_1\delta a_1 + b_2\delta a_2 = b'$$

Bezeichnen also die 3 Grössen

$$p = \frac{c\delta b + c_1\delta b_1 + c_2\delta b_2}{\varepsilon}$$

$$q = \frac{a\delta c + a_1\delta c_1 + a_2\delta c_2}{\varepsilon}$$

$$r = \frac{b\delta a + b_1\delta a_1 + b_2\delta a_2}{\varepsilon}$$

die Componenten der momentanen Rotationsgeschwindigkeit $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ um die momentane Rotationsaxe, deren Richtungscosinus dann

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r}}$$

sind, so findet man zunächst den Wert:

$$r = \frac{b'}{\varepsilon} = \frac{F'}{A-B}$$

Nach Analogie ist also

$$p = \frac{D'}{B-C}; \quad q = \frac{E'}{C-A}; \quad r = \frac{F'}{A-B} \tag{4}$$

und hieraus ergeben sich mittelst der bekannten Relationen

$$\frac{\delta a}{\varepsilon} = br - cq; \quad \frac{\delta b}{\varepsilon} = cp - ar; \quad \frac{\delta c}{\varepsilon} = aq - bp$$

$$\frac{\delta a_1}{\varepsilon} = b_1 r - c_1 q; \quad \frac{\delta b_1}{\varepsilon} = c_1 p - a_1 r; \quad \frac{\delta c_1}{\varepsilon} = a_1 q - b_1 p$$

$$\frac{\delta a_2}{\varepsilon} = b_2 r - c_2 q; \quad \frac{\delta b_2}{\varepsilon} = c_2 p - a_2 r; \quad \frac{\delta c_2}{\varepsilon} = a_2 q - b_2 p$$

die Variationen der Richtungscosinus der Hauptträgheitsaxen.

Aus den Gl. (4) folgt noch die von den ursprünglichen Hauptträgheitsmomenten ganz unabhängige Relation:

$$\frac{D'}{p} + \frac{E'}{q} + \frac{F'}{r} = 0$$

Die Variationen der Coordinaten des Schwerpunkt sind aus (1) bekannt und lauten nach Reduction auf das System der xyz:

$$\delta x_0 = (a\xi + b\eta + c\zeta)\frac{\varepsilon}{m}$$

$$\delta y_0 = (a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta)\frac{\varepsilon}{m}$$

$$\delta z_0 = (a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta)\frac{\varepsilon}{m}$$

die der Hauptträgheitsmomente bleiben

$$\delta A = A'\varepsilon; \quad \delta B = B'\varepsilon; \quad \delta C = C'\varepsilon \tag{3}$$

R. Hoppe.

4.

Axenconstruction der Ellipse, als Lissajous'scher Schwingungscurve.

Bekanntlich kann man die Positionen eines geradlinig schwingenden Punktes durch Projection der entsprechenden Stellungen eines Punktes, der in gleichförmiger Bewegung einen Kreis mit dem Halbmesser gleich der Amplitude beschreibt, finden.

Wirken auf einen materiellen Punkt unter irgend einem Winkel zwei Anregungen zu Schwingungen, so dass die zweite erst nach $\frac{1}{4}$ Schwingungsdauer der ersten erfolgt, so ist für gleiche Schwingungsdauer bei beiden Schwingungen die resultirende Bahn des Punktes eine Ellipse, deren conjugirte Durchmesser die beiden Amplituden der zwei einfachen Schwingungen sind.

Nach dieser Auffassung construirt man sich in angedeuteter Weise die Wege, welche der Punkt in Folge jeder der beiden Anregungen zurücklegen würde und setzt die gleichen Zeiten entsprechenden Wege nach den Gesetzen des Geschwindigkeitsparallelogrammes zusammen und findet die Ellipse: Fig. 1.

Wenn der Schwingung des Punktes von A nach p (Fig. 1.) ein Kreisbogen in gleichförmiger Bewegung AC, zu dem ein Winkel φ gehöre, entspricht, so ist für $OA = a$, $OB = B$

$$Op = x = a\cos\varphi$$

Zu der componentalen Bewegung von O nach q gehört der Bogen ED entsprechend dem Winkel (φ); daher entspricht dem Bogen BD der Winkel $(90^0 - \varphi)$ und es ist

$$Oq = y = b\sin\varphi.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt sofort

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichung der Ellipse bezogen auf die conjugirten Durchmesser AA' und BB'.

Gehen die beiden Durchmesser in die Axen über, so stehen sie senkrecht aufeinander, und die angeführte Ellipsenconstruction gestaltet sich zu der bekannten Construction mittels zweier Kreise über die grosse und kleine Axe.

Die Construction wird noch einfacher, wenn man bemerkt, dass die Geraden BA, pq, rs etc. parallel würden.

Daran schliesst sich nun die Auffindung der Axen eng an.

Man sucht einen Punkt der Ellipse, der vom Mittelpunkt am weitesten entfernt ist; dies ist der Endpunkt der grossen Axen. Ist zu dem Ende $OP = \varrho$ und Wkl. $AOB = w$, so wird:

$$\begin{aligned}\varrho^2 &= x^2 + y^2 + 2xy\cos w \\ &= a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + 2ab\sin\varphi\,.\cos\varphi\,.\cos w \\ &= a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + ab\sin 2\varphi\,.\cos w\end{aligned}$$

Aus der Bedingung für ein Maximum von ϱ, nämlich $\frac{d\varrho}{d\varphi} = 0$ folgt nun

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2ab\cos w}{a^2 - b^2}$$

Die Construction dieses Ausdruckes gibt nun die Tangente des doppelten Winkels φ, für welchen ϱ ein Maximum, d. h. die grosse Axe wird.

Nun ist Fig. 2.

$$OJ = b\cos w$$

$$a^2 = ADKO \text{ und } b^2 = AFLG$$

$$a^2 - b^2 = OGLEDKO$$

Wird nun EH parallel GD gezogen, so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AHE und AGD, dass Fläche $LEMG = MG.GH$ ist.

Demnach

$$a^2 - b^2 = OK.OH = a.OH$$

und

$$2ab\cos w = a.2OJ$$

folglich

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2OJ}{OH} = \frac{HN}{OH}$$

die weitere Construction ergibt sich von selbst. Man setze nur die den Winkel φ entsprechenden Elongationen auf den beiden Durchmessern durch das Parallelogramm zusammen, so erhält man durch dessen Diagonale Richtung und Endpunkt der grossen Axe.

Um diese auch für die kleine Axe zu finden, hat man nur die Lage des schwingenden Punktes nach ¼ Schwingungsdauer zu bestimmen.

Bemerkt man noch, dass man statt der Verticalen AD auch ebenso eine Parallele mit BB' anwenden kann, so gestaltet sich die Gesammtconstruction wie die Figur (3) zeigt.

H. Januschke.

5.

Eine Schüleraufgabe.

Bei der Lösung der Aufgabe: „Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite, und der ihr gegenüberliegende Winkel und die Summe der beiden anderen Seiten gegeben ist"; erhält man auf synthetischem Wege 2 Dreiecke.

Meines Wissens existirt nun kein Beweis, dass die beiden entstehenden Dreiecke congruent sind. Prof. Schenk (Einige Aufgaben über Anwendung der Algebra und Trigonometrie zur Lösung und Construction geometrischer Aufgaben für die Schüler der oberen Classen an Gymnasien und Realschulen. Sep. Abdr. a. d. Jahresber. d. Olmützer Gymn. Wien, Gerold's Sohn 1869) giebt die Formel: $x = s.\cos^2\frac{\varphi}{2}$ und $y = s.\sin^2\frac{\varphi}{2}$, wo $\sin\varphi = \sqrt{(s+a)(s-a)} : s\cos\frac{\alpha}{2}$ ist. Nach diesen Formeln nun gebe es nur ein Dreieck; entstehen nun 2, so kann man noch nicht a priori schliessen, dass dieselben congruent sein müssen.

Die Congruenz zu beweisen, würde eine passende Uebungsaufgabe sein.

Wien. Franz Lukas.

XX.

Ueber den Durchgang des elektrischen Stroms durch eine Kugelcalotte.

Von

Wilhelm Wolf

in Leipzig.

Einleitung.

Führt man einen constanten, elektrischen Strom durch irgend eine, etwa aus Metall gefertigte, leitende Fläche, so wird sich die Elektricität in derselben auf bestimmte Weise verteilen, und ein Strömungszustand eintreten, der nach einiger Zeit stationär sein wird. Dieser stationäre Strömungszustand lässt sich für jede Stelle der leitenden Fläche angeben, sobald die an jener Stelle herrschende sogenannte „elektrische Spannung" (das elektrische Potential) bekannt ist. Es handelt sich demgemäss bei allen derartigen Problemen um die Bestimmung der elektrischen Spannung für alle Stellen des durchströmten Leiters.

Um diese Spannung zu finden, werden wir zunächst nach Kirchhoff's Vorgange eine Spannung supponiren und von dieser rückwärts auf ihre Bedingungen schliessen oder deutlicher: wir werden aus einer supponirten Spannung Resultate zu gewinnen suchen, die sich mit dem in Wirklichkeit Gegebenen leicht vergleichen lassen, und durch diesen Vergleich die Mittel zu erhalten uns bestreben die vorerst fingirte Spannung zu bestimmen.

Diesen Grundgedanken verfolgend wird es in der Tat gelingen (wenigstens in speciellen Fällen) zum gewünschten Ziele zu gelangen. Es bedarf hierzu nur eines einzigen, von Kirchhoff (Poggendorff's Annalen für Physik und Chemie, Bd. 64.) abgeleiteten Satzes. Derselbe lautet:

„Ist U die an irgend einer Stelle einer durchströmten Fläche herrschende Spannung, ds ein an derselben Stelle genommenes Bogenelement, n dessen Normale, ferner $\varkappa$ die Leitungsfähigkeit, ε die unendlich kleine Dicke dieser Fläche, so wird die während der Zeit dt durch den Querschnitt εds strömende Elektricitätsmenge durch die Formel dargestellt:

$$1)\quad M = -\varkappa\varepsilon\frac{\partial U}{\partial n}.ds\,dt.\text{“}$$

Wie schon erwähnt ist man die vermittelst dieser Formel zu findenden Bedingungen allgemein zu erfüllen nicht im Stande. Wir werden uns daher im Folgenden auf die Kugeloberfläche beschränken.

I. Hauptabschnitt.

Lösung des Strömungsproblems für die gewöhnliche, von einem Kreise begrenzte Calotte.

A) Beliebig viele Zuleitungsstellen.

1) Ableitung der Bedingungen, welche das elektrische Potential zu erfüllen hat.

Um zu den Bedingungen hinzugelangen, denen das Potential zu genügen hat, wenn an beliebig vielen Zuleitungsstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ ein Strom durch die Calotte geleitet wird, schlagen wir folgenden Weg ein. Wir berechnen zunächst den Gewinn an elektrischer Materie, den irgend ein Flächenelement der Calotte während der Zeit dt erfährt.

Hierzu führen wir die bei der Kugel gebräuchlichen Coordinaten der Parallel- und Meridiankreise ein, so dass ein beliebiges Flächenelement $ABCD$ naturgemäss von den Parallelkreisen ϑ, $\vartheta + d\vartheta$ und den Meridianen φ, $\varphi + d\varphi$ begrenzt wird.

Nach unserm allgemeinen Satze ist die durch die Seite AB fliessende Elektricität

$$M = -\varkappa\varepsilon\frac{\partial U}{AD}.AB.dt$$

oder weil, wenn g der Radius der Kugel

$$AD = g\sin\vartheta.d\varphi,\quad AB = g.d\vartheta$$

ist, so wird gegenwärtig:

$$M = -\varkappa\varepsilon\,\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial U}{\partial\varphi}.d\vartheta.dt$$

Lässt man hierin $\varphi + d\varphi$ an die Stelle von φ treten, so resultirt offenbar die Menge M' der durch CD wieder fortfliessenden Elektricität. Unter gleichzeitiger Benutzung des Taylor'schen Satzes erhält man demgemäss mit Beschränkung auf Glieder 2ter Ordnung:

$$M' = -\varkappa\varepsilon.\frac{1}{\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{d\varphi}{1}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\ldots\right\}d\vartheta\,dt$$

Es folgt mithin sehr einfach:

$$\alpha)\quad M - M' = \varkappa\varepsilon.\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}.d\vartheta\,d\varphi\,dt$$

In ganz analoger Weise folgt für die Differenz der durch AD und BC strömenden Elektricität:

$$\beta)\quad N - N' = \varkappa\varepsilon.\frac{\partial\left(\sin\vartheta.\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta}.d\vartheta\,d\varphi\,dt$$

Nennen wir jetzt G den Gesammtgewinn, den das Flächenelement $ABCD$ während der Zeit dt erfährt, so ist offenbar:

$$G = (M - M') + (N - N')$$

oder nach α) und β):

$$\gamma)\quad G = \varkappa\varepsilon\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right\}d\vartheta\,d\varphi\,dt$$

Gegenwärtig führen wir die wichtige Abkürzung ein:

$$2)\quad \delta U = \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta.\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

so dass wir statt γ) schreiben können:

$$\gamma')\quad G = \frac{\varkappa\varepsilon}{g^2}.\delta U(g^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi)\,dt$$

Dieser Gesammtgewinn nun wird bei eingetretenem stationären Strömungszustande für alle Flächenelemente ausserhalb der Zuleitungsstellen offenbar gleich Null sein müssen. Hieraus folgt nach γ'), wenn $\mathfrak{K}'$ die nach Abscheidung der Elektrodenstellen α_1, α_2, ... von der Calotte übrig bleibende Fläche ist:

$$3)\quad \delta U = 0 \qquad\qquad \text{auf } \mathfrak{K}'$$

Innerhalb der Zuleitungsstellen hingegen muss dieser Gewinn für

jedes Flächenelement gleich der durch eben dieses Flächenelement von den Elektroden zu- oder fortgeführten Elektricitätsmenge sein. Nennen wir daher

J_k die Stromstärke in α_k

so muss für jede Zuleitungsstelle α_k die Gleichung erfüllt sein:

$$\frac{\varkappa\varepsilon}{g^2}\cdot dt \iint_{\alpha_k} \delta U\,(g^2 \sin^2\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi) = J_k dt$$

wo die Integration links über alle Flächenelemente von α_k zu erstrecken ist. Setzen wir α_k als klein voraus, so wird δU im Bereiche von α_k wenig schwanken und kann füglich vor das Integralzeichen treten. Die noch restirende Integration ergiebt offenbar α_k selber, wenn α_k gleichzeitig den Flächeninhalt der Zuleitungsstelle α_k repräsentirt. Man erhält somit:

$$4)\quad \delta U = f_k \qquad \text{auf } \alpha_k$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$5)\quad f_k = \frac{J_k g^2}{\varkappa\varepsilon\,\alpha_k}$$

Zu diesen bis jetzt gefundenen Bedingungen tritt weiter diejenige, welche ausdrückt, dass durch die Randelemente der Calotte keine Strömung erfolgen kann. Ist n die Normale irgend eines Randelementes, so ist hierzu nach dem Kirchhoff'schen Satze nur erforderlich, dass ist:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ für alle Randelemente}$$

wofür wir einfacher schreiben wollen:

$$6)\quad \frac{\overline{\partial U}}{\partial n} = 0$$

Der Einfachheit halber sei der Pol unseres Coordinatensystems gleichzeitig der Pol der Calotte. Dann stehen die Meridiane senkrecht zur Calottenbegrenzung und die Bedingung 6) spricht sich so aus:

$$6')\quad \frac{\overline{\partial U}}{\partial \vartheta} = 0$$

Ferner muss das Potential U, wie es in der Natur der Sache liegt, überall eindeutig, stetig und reell sein.

Endlich ergeben wenige Ueberlegungen, dass bei stationärem Zustande die Summe der gesammten zugeführten Elektricität gleich der Summe der gesammten fortgeführten Elektricität ist, oder

$$7)\quad \Sigma_k J_k = 0$$

Wir haben somit an U die Anforderungen zu stellen:

$$8)\quad \begin{cases} \delta U = f_k, & f_k = \begin{cases} 0 & \text{auf } \mathfrak{K}' \\ \frac{g^2 J_k}{\varkappa \varepsilon \alpha_k} & \text{,, } \alpha_k \end{cases} \\ \overline{\frac{\partial U}{\partial \vartheta}} = 0, & U \text{ stetig, eindeutig, reell.} \end{cases}$$

Nach sachgemässer Transformation von δU lässt sich durch Anwendung des 3ten Green'schen Satzes zeigen, dass durch diese Bedingungen das Potential U bis auf eine additive Constante bestimmt ist. Es geschieht dies in bekannter Weise und kann daher hier unterdrückt werden.

Ehe wir an die wirkliche Bestimmung von U herantreten, vereinfachen wir uns diese Aufgabe ein für alle Mal, indem wir durch die Gleichung:

$$9)\quad U = V - W$$

zwei neue Functionen einführen, an die wir successive die Bedingungen stellen:

$$10)\quad \begin{cases} \delta V = f_k, & f_k = \begin{cases} 0 & \text{auf } \mathfrak{K}' \\ \frac{g^2 J_k}{\varkappa \varepsilon \alpha_k} & \text{,, } \alpha_k \end{cases} \\ V \text{ stetig, eindeutig, reell} \end{cases}$$

und

$$11)\quad \begin{cases} \delta W = 0, & \overline{\frac{\partial W}{\partial \vartheta}} = \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \\ W \text{ stetig, eindeutig, reell} \end{cases}$$

wodurch die oben unter 8) an U gestellten Forderungen ebenfalls eingelöst sind.

2) Bestimmung der Function V.

Behufs Auffindung von V transformiren wir zunächst die Differentialgleichung

$$12)\quad \delta V \equiv \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cdot\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = f_k$$

oder

$$12')\quad \sin\vartheta\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cdot\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = f_k\cdot\sin^2\vartheta$$

in eine geeignetere Form. Dieselbe ist nur in Bezug auf ϑ ungeschickt. Wir führen daher durch

$$\tau = \tau(\vartheta)$$

eine Function von ϑ als neue Variabele ein. Die Substitution derselben in eine der Gleichungen 12) liefert an der betreffenden Stelle zunächst den Ausdruck:

$$\sin\vartheta . \frac{d\tau}{d\vartheta} \frac{\partial V}{\partial \tau}$$

Da nun die Gleichung 12') schon eine grosse Aehnlichkeit mit der analogen Differentialgleichung für den Kreis besitzt, so suchen wir diese Aehnlichkeit dadurch fast vollkommen zu machen, dass wir τ der Differentialgleichung unterwerfen:

$$\sin\vartheta . \frac{d\tau}{d\vartheta} = \tau$$

aus der nach einfacher Integration folgt:

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \log\tau + \text{const}$$

oder bei gehöriger Wahl der Constanten:

$$13) \quad \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \tau$$

Gegenwärtig nimmt die Gleichung 12) die Gestalt an:

$$14) \quad \delta V = \left(\frac{1+\tau^2}{2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau\frac{\partial V}{\partial\tau}\right) + \frac{1}{\tau^2}.\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} \right\}$$

wobei die aus 13) folgenden Relationen:

$$13') \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\vartheta = \dfrac{2\tau}{1+\tau^2} \\[2ex] \cos\vartheta = \dfrac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \end{array} \right.$$

benutzt sind.

Da die Elektrodenstellen α_k sehr klein vorausgesetzt wurden, so wird im Bereiche von α_k ausserordentlich nahe:

$$\left(\frac{1+\tau^2}{2}\right)^2 = \text{const} = \left(\frac{1+\tau_k^2}{2}\right)^2$$

sein, sofern τ_k, φ_k die Coordinaten der Zuleitungsstelle α_k sind. Jetzt nimmt die Differentialgleichung, der V zu genügen hat, die Form an:

$$15)\quad \begin{cases} \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau\frac{\partial V}{\partial\tau}\right)+\frac{1}{\tau^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=f_k' \\ f_k'=\begin{cases} 0 & \text{auf } \mathfrak{K}' \\ \left(\frac{2}{1+\tau_k^2}\right)^2\frac{g^2 J_k}{\varkappa\varepsilon\alpha_k} & ,,\ \alpha_k \end{cases} \end{cases}$$

so dass die Analogie mit dem entsprechenden Kreisprobleme, wie man ohne Weiteres bemerken wird, eine vollständige geworden ist.

Von nun an führt ganz derselbe Gedankengang zum Ziele, wie er bei erwähntem ebenen Probleme angewandt wird (Kirchhoff, Poggendorff's Annalen für Ph. u. Ch. Bd. 64). Daher dürfen wir uns mit der Angabe des Resultats begnügen. Es findet sich:

$$16)\quad \begin{cases} V=\Sigma_k\frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon}\log(\tau^2+\tau_k^2-2\tau\tau_k\cos(\varphi-\varphi_k)) \\ \text{für alle Stellen auf } \mathfrak{K}' \end{cases}$$

wo die angedeutete Summation auf sämmtliche Elektrodenstellen sich bezieht.

Anmerkung. Der Wert von V in den Zuleitungsstellen α_k selbst ist für unsere Zwecke nicht weiter nötig. Da er überdies eine ziemlich umfängliche Gestalt besitzt, konnte er um so mehr unterdrückt werden.

3) Reihenentwicklung für V. Bestimmung von $\frac{\partial V}{\partial\tau}$.

Für Stellen nahe am Rande der Calotte wird immer

$$\tau_k\leqq\tau$$

sein. Die bekannte Reihenentwicklung:

$$17)\quad \lg\{a^2+b^2-2ab\cos(\alpha-\beta)\}=\lg a^2-2\sum_1^\infty\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n\cos n(\alpha-\beta)$$

$$b\leqq a$$

darf demgemäss unter jener Voraussetzung in der Form Verwendung finden:

$$\lg\{\tau^2+\tau_k^2-2\tau\tau_k\cos(\varphi-\varphi_k)\}=\lg\tau^2-2\sum_1^\infty\frac{1}{n}\left(\frac{\tau_k}{\tau}\right)^n\cos n(\varphi-\varphi_k)$$

Hierdurch wird:

$$V=\Sigma_k\frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon}\left\{\lg\tau^2-2\sum_1^\infty\frac{1}{n}\left(\frac{\tau_k}{\tau}\right)^n\cos n(\varphi-\varphi_k)\right\}$$

oder mit Rücksicht auf 7) einfacher:

$$18)\quad V = -\Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{\tau_k}{\tau}\right)^n \cos n(\varphi-\varphi_k)$$

Gegenwärtig ergiebt eine einfache Differentiation:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_1^\infty \frac{\tau_k{}^n}{\tau^{n+1}} \cos n(\varphi-\varphi_k)$$

und mithin, wenn τ_0 der Parameter des Randkreises ist:

$$19)\quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial \tau} = \Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_1^\infty \frac{\tau_k{}^n}{\tau_0{}^{n+1}} \cos n(\varphi-\varphi_k)$$

4) Bestimmung der Function W.

Nach 11) und mit Rücksicht auf 14) hat W zunächst die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{1+\tau^2}{2}\right)^2 \left\{\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau\frac{\partial W}{\partial \tau}\right)+\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right\} = 0$$

oder einfacher:

$$\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau\frac{\partial W}{\partial \tau}\right)+\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2} = 0$$

zu befriedigen. Augenblicklich überzeugt man sich, dass eine particuläre Lösung

$$\tau^n \cos n(\varphi-\varphi_k)$$

ist, und demgemäss der Ansatz:

$$20)\quad W = \Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_1^\infty C_n^{(k)} \tau^n \cos n(\varphi-\varphi_k) + \text{Const}$$

sich rechtfertigt; vorausgesetzt, dass die Coefficienten $C_n^{(k)}$ eine derartige Bestimmung erfahren, dass die entstehenden Reihen convergiren. Dies wird, wie wir gleich sehen werden, der Fall sein.

Aus 20) folgt vorläufig:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_1^\infty n C_n^{(k)} \tau^{n-1} \cos n(\varphi-\varphi_k)$$

und mithin, wenn τ_0 wieder der Randparameter:

$$21)\quad \frac{\partial \overline{W}}{\partial \tau} = \Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_1^\infty n C_n^{(k)} \tau_0{}^{n-1} \cos n(\varphi-\varphi_k)$$

Nach 11) wird nun weiter an W die Anforderung gestellt:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \vartheta}$$

Wie man leicht sieht ist diese Forderung aequivalent mit der:

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial \tau} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \tau}$$

die leicht befriedigt werden kann; denn eine einfache Vergleichung der Reihen unter 21) und 19) zeigt diese Bedingung erfüllt, wenn

$$C_n^{(k)} = \frac{1}{n}\left(\frac{\tau_k}{\tau_0}\right)^n$$

genommen wird. — Hiermit ist W bis auf eine additive Constante bestimmt. Aus 20) findet man gegenwärtig:

$$22)\quad W = \Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{\tau\tau_k}{\tau_0^2}\right)^n \cos n(\varphi - \varphi_k) + \text{Const}$$

Man bemerkt leicht, dass die hierin auftretenden Reihen sämmtlich convergent sind. Dieselben lassen sich übrigens bei geeigneter Benutzung der Reihenentwicklung 17) summiren. Es wird:

$$W = -\Sigma \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon} \lg{}^{*)} \left\{ \left(\frac{\tau_0^2}{\tau_k}\right)^2 + \tau^2 - 2\tau \frac{\tau_0^2}{\tau_k} \cos(\varphi - \varphi_k) \right\} + \text{Const}$$

oder wenn zur Abkürzung

$$23)\quad T_k = \frac{\tau_0^2}{\tau_k}, \quad \Phi_k = \varphi_k$$

gesetzt wird, einfacher:

$$24)\quad W = \text{Const} - \Sigma_k \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon} \lg\{T_k^2 + \tau^2 - 2\tau T_k \cos(\varphi - \Phi_k)\}$$

Anmerkung. Die Punkte T_k, Φ_k liegen, wenn von der Vollkugel vorläufig abgesehen wird, immer ausserhalb der Calotte und lassen sich leicht construiren. Sie befinden sich mit τ_k, φ_k auf demselben Meridiane und T_k ist vierte Proportionale zu den Grössen τ_k, τ_0, τ_0.

5) Bestimmung von U. Curven constanter Spannung.

Die obigen Vorbereitungen führen mit Leichtigkeit zur Bestimmung des elektrischen Potentials U für alle Stellen auf $\mathfrak{K}'$. Nach 9) ist nämlich:

*) Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass hier, wie auch früher, immer die reellen Teile der Logarithmen verstanden sind.

$$U = V - W$$

und wenn wir gegenwärtig zur blossen Abkürzung

$$25)\quad \begin{cases} \varrho_k^2 = \tau_k^2 + \tau^2 - 2\tau_k\tau\cos(\varphi - \varphi_k) \\ P_k^2 = T_k^2 + \tau^2 - 2T_k\tau\cos(\varphi - \Phi_k) \end{cases}$$

setzen, so folgt sehr einfach mit Rücksicht auf 16) und 24):

$$26)\quad U = \mathrm{Const} + \frac{1}{2\pi\varkappa\varepsilon}\{J_1 \lg \varrho_1 P_1 + J_2 \lg \varrho_2 P_2 + \ldots\}$$

Die Curven constanter Spannung ergeben sich hieraus unmittelbar. Sie sind durch

$$U = \mathrm{const}$$

charakterisirt und es repräsentirt mithin nach 26) die Gleichung:

$$27)\quad J_1 \lg \varrho_1 P_1 + J_2 \lg \varrho_2 P_2 + J_3 \lg \varrho_3 P_3 + \ldots = \mathrm{const}$$

das System der Curven constanter Spannung.

6) Das System der Stromcurven.

Bekanntlich repräsentiren die orthogonalen Trajectorien der Curven constanten Potentials (Niveaucurven) das System der Stromcurven.

Für ebene Curvensysteme hat die Bestimmung senkrechter Trajectorien wenigstens insofern keine Schwierigkeit, als ohne Weiteres die Differentialgleichung aufgestellt werden kann, die das Problem löst. In unserem Falle, wo wir es mit einem sphärischen Curvensysteme zu tun haben, liegt die Sache etwas anders; doch werden folgende Betrachtungen zum Ziele führen.

Denken wir uns in Figur 1. den allgemeinen Punkt τ, φ der Calotte auf die Tangentialebene E geworfen (durch Projection von P' aus), so werden zwischen den Coordinaten r, ψ des projicirten Punktes und τ, φ des ursprünglichen offenbar die Relationen bestehen:

$$28)\quad \begin{cases} r = 2g \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = 2g\tau \\ \psi = \varphi \end{cases}$$

Nun wissen wir, dass bei der stereographischen Projection Winkel ungeändert bleiben, dass somit 2 Curvensysteme, die sich auf der Kugelcalotte senkrecht schneiden, auch nach der Projection in der Ebene E senkrecht zu einander sind. Wir können demgemäss die Bedingungen für orthogonale Trajectorien von Curvensystemen der Kugelfläche durch die Bedingungen für die senkrechten Trajectorien der entsprechenden ebenen Curven ausdrücken.

Bevor wir diesen Gedanken weiter verfolgen, führen wir in 27), der Gleichung der Niveaucurven, neue Coordinaten ein, indem wir allgemein setzen:

$$29)\quad \xi = \tau\cos\varphi,\quad \eta = \tau\sin\varphi$$

Mit Rücksicht auf 25) lautet dann die Gleichung der Curven constanten Potentials:

$$27')\quad \Sigma_k J_k \{\lg[(\xi-\xi_k)^2+(\eta-\eta_k)^2]+\lg[(\xi-\Xi_k)^2+(\eta-H_k)^2]\} = \text{const}$$

Wird hierin:

$$x = 2g\tau\cos\varphi = 2g\xi$$
$$y = 2g\tau\sin\varphi = 2g\eta$$

gesetzt, so folgt:

$$27'')\quad \Sigma_k J_k \{\lg[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2]+\lg[(x-X_k)^2+(y-Y_k)^2]\} = \text{const}$$

als Gleichung der projicirten Niveaucurven.

Ist nun $\Psi = \text{const}$ die Gleichung der senkrechten Trajectorien der letzteren, und wird die linke Seite von 27'') kurz mit U bezeichnet, so muss die Relation gelten:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

Derselben werden die Ansätze:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

gerecht, die zulässig sind, weil U der Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

genügt, wie man aus 14) nach Einführung der neuen Coordinaten leicht findet.

Gegenwärtig ergiebt sich sehr einfach für Ψ:

$$30)\quad \Psi = \Sigma_k J_k \left\{\text{arctg}\frac{x-x_k}{y-y_k}+\text{arctg}\frac{x-X_k}{y-Y_k}\right\}\ \text{*)}$$

Es repräsentirt also:

$$30')\quad \Sigma J_k \left\{\text{arctg}\frac{x-x_k}{y-y_k}+\text{arctg}\frac{x-X_k}{y-Y_k}\right\} = \text{const}$$

---

*) Vergleiche Kirchhoff, Poggendorff's Annalen, Band 64.

das System der projicirten Stromcurven. Eine ganz analoge Gleichung erhält man jetzt für die wirklichen Stromcurven nämlich:

$$30'') \quad \Sigma_k J_k \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\xi - \xi_k}{\eta - \eta_k} + \operatorname{arctg} \frac{\xi - \Xi_k}{\eta - H_k} \right\} = \text{const}$$

7) Strömungsproblem für die Vollkugel.

Geht die Calotte in eine Vollkugel über, so verschwindet gleichzeitig die Randcurve, und die Spannung U hat dann nur den Bedingungen

$$\delta U = f_k, \quad U \text{ stetig, eindeutig, reell}$$

zu genügen. Eine solche Function ist aber nach 16):

$$U = \Sigma_k \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon} \lg(\tau^2 + \tau_k^2 - 2\tau\tau_k \cos(\varphi - \varphi_k))$$

Alles Uebrige wie z. B. die Bestimmung der Stromcurven erfolgt wie vorhin.

Bemerkung. Die in diesem Abschnitt gelöste Aufgabe hat auch A. Beer in seiner „Einleitung in die Elektrostatik etc." behandelt. Anstatt aber die richtige Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

in Anwendung zu bringen, benutzt er die von ihm Seite 359. a. a. O. aufgestellte, fehlerhafte Differentialgleichung, die in unserer Bezeichnung lautet:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

Demgemäss sind die Resultate, zu welchen Beer auf Grund dieser Differentialgleichung gelangt, ebenfalls irrtümlich.

B) Beschränkung der Zuleitungsstellen auf zwei.

Die im vorigen Abschnitt gefundenen Gleichungen sind einer bemerkenswerten Interpretation nicht fähig. Wir werden daher im Folgenden einen speciellen Fall genauer discutiren.

Die einfachste und natürlichste Specialisirung ist offenbar die Annahme von nur 2 Elektroden α_1 und α_2, von denen die eine den Strom zuleitet, die andere wieder fortführt.

Zunächst folgt wegen $\Sigma k J_k = 0$

$$J_1 = -J_2$$

und mithin ergeben sich für

1) Das Potential und die Curven constanten Potentials

aus 26), mit Rücksicht auf 25), die Formeln:

$$31)\qquad U = \text{Const} + \frac{J_1}{4\pi\varkappa\varepsilon} \lg \frac{\{\tau^2+\tau_1{}^2-2\tau\tau_1\cos\overline{\varphi-\varphi_1}\}\{\tau^2+T_1{}^2-2\tau T_1\cos\overline{\varphi-\varphi_1}\}}{\{\tau^2+\tau_2{}^2-2\tau\tau_2\cos\overline{\varphi-\varphi_2}\}\{\tau^2+T_2{}^2-2\tau T_2\cos\overline{\varphi-\varphi_2}\}}$$

und

$$31')\qquad \frac{\{\tau^2+\tau_1{}^2-2\tau\tau_1\cos\overline{\varphi-\varphi_1}\}\{\tau^2+T_1{}^2-2\tau T_1\cos\overline{\varphi-\varphi_1}\}}{\{\tau^2+\tau_2{}^2-2\tau\tau_2\cos\overline{\varphi-\varphi_2}\}\{\tau^2+T_2{}^2-2\tau T_2\cos\overline{\varphi-\varphi_2}\}} = \text{const}$$

Fügen wir in 31) auf der rechten Seite die Constante

$$-\frac{J_1}{4\pi\varkappa\varepsilon}\lg\left\{\frac{1+\tau_1{}^2}{1+\tau_2{}^2}\cdot\frac{1+T_1{}^2}{1+T_2{}^2}\right\}$$

additiv hinzu, so finden wir nach leichter Umformung:

$$31'')\qquad U = C + \frac{J_1}{2\pi\varkappa\varepsilon}\lg\frac{e_1 . E_1}{e_2 . E_2}$$

und für die Niveaucurven:

$$31''')\qquad \frac{e_1 . E_1}{e_2 . E_2} = \text{const}$$

wenn e_1 und E_1 die linearen Entfernungen eines beliebigen Punktes $Q(\tau, \varphi)$ von den Punkten $a_1(\tau_1, \varphi_1)$ und $A_1(T_1, \Phi_1)$ sind, und e_2 und E_2 analoge Bedeutung haben.

2) Die Gleichung der Stromcurven

gestaltet sich im jetzigen speciellen Falle ebenfalls einfacher. Zunächst ergiebt sich aus 30) als Gleichung der projicirten Stromcurven:

$$32)\qquad \operatorname{arctg}\frac{x-x_1}{y-y_1} + \operatorname{arctg}\frac{x-X_1}{y-Y_1} - \operatorname{arctg}\frac{x-x_2}{y-y_2} - \operatorname{arctg}\frac{x-X_2}{y-Y_2} = \text{const}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\operatorname{arctg}\frac{x-x_1}{y-y_1} - \operatorname{arctg}\frac{x-x_2}{y-y_2} = w$$

$$\operatorname{arctg}\frac{x-X_1}{y-Y_1} - \operatorname{arctg}\frac{x-X_2}{y-Y_2} = W$$

so haben wir sehr einfach:

$$32') \quad w + W = \text{const}$$

als Gleichung der projicirten Stromcurven. Hierbei stellen w und W Winkel dar, die sich leicht interpretiren lassen. Seien zu diesem Zwecke in Figur 2. α_1', α_2', A_1', A_2' die Projectionen der Punkte α_1, α_2, A_1, A_2 auf die Tangentialebene E; dann ist w der Winkel, unter dem die Strecke $\alpha_1'\alpha_2'$ von dem beliebigen Punkte Q aus erscheint. Analoges gilt von W bezüglich der Strecke $A_1'A_2'$. Ueberdies findet sich leicht, dass die in 32') auftretende Winkelsumme innerhalb des Gebietes II in die Differenz übergeht. Alles dies zusammengefasst spricht demgemäss die Gleichung 32') den Satz aus:

„Projicirt man die Stromcurven in der angegebenen Weise auf die Tangentialebene E, ebenso die Punkte α_1, α_2, A_1, A_2, so ist die Summe, respective Differenz der Winkel, unter denen von irgend einem Punkte einer dieser Curven die Strecken $\alpha_1'\alpha_2'$, beziehentlich $A_1'A_2'$ erscheinen, eine constante Grösse."

Hieraus ergiebt sich mit Leichtigkeit der betreffende Satz über die wirklichen Stromcurven.

Anmerkung. Liegen speciell die Einmündungsstellen der Elektroden dem Rande der Calotte unendlich nahe, so verwandeln sich die Stromcurven in Kreise, die sämmtlich durch die Einmündungsstellen α_1 und α_2 der Elektroden hindurchgehen.

Zusätze.

Die Gleichung 32) der projicirten Stromcurven ist einer, wenn auch wenig eleganten, algebraischen Form fähig. Aus dieser lassen sich zwei ausgezeichnete Stromcurven erkennen. Die eine ist der durch die 4 Punkte α_1', α_2', A_1', A_2' gelegte Kreis, die andere der projicirte Calottenrand. Die complicirten Rechnungen hindern an dieser Stelle die directe Ableitung dieser Sätze; es empfiehlt sich daher der folgende mehr indirecte Nachweis.

a) Vermittelst der Relationen 28) und mit Rücksicht auf 23) erfährt man, dass A_1' und A_2' die sog. Spiegelpunkte von α_1' und α_2' bezüglich des projicirten Randkreises sind. Man weiss aber, dass durch 4 solche Punkte stets ein Kreis gelegt werden kann. Da nun auf der Peripherie dieses Kreises die über den Sehnen $\alpha_1'\alpha_2'$ und $A_1'A_2'$ stehenden Peripheriewinkel constant sind, so ist es auch ihre Summe resp. Differenz, und mithin gehört dieser Kreis nach 32') zu dem System der Stromcurven.

b) Um nachzuweisen, dass der Randkreis zum System der Stromcurven gehört, haben wir nur zu zeigen, dass längs der Peripherie dieses Kreises (s. Fig. 3.)

$$\angle\, \alpha_1' P' \alpha_2' + \angle\, A_1' P' A_2' = \text{const}$$

Ziehen wir die Hilfslinie PP', so zerfällt der Winkel $\alpha_1' P' \alpha_2' = w$ in 2 Teile, die w_1 und w_2 heissen mögen. Analog zerfällt W in W_1 und W_2. Nun sind die Dreiecke $PP'\alpha_2'$ und $PA_2'P'$ ähnlich, da sie denselben Winkel einschliessen und proportionale Seiten besitzen. Also:

$$\angle\, PP'A_2' = \angle\, P\alpha_2' P'$$

Ferner liefert das Dreieck $PP'\alpha_2'$:

$$\angle\, \alpha_2' P' P + \angle\, P \alpha_2' P' = \pi - P' P \alpha_2' \quad \text{oder}$$
$$w_1 + W_1 = \pi - \angle\, P' P \alpha_2'$$

Analog findet sich

$$w_2 + W_2 = \pi - \angle\, P' P \alpha_1'$$

und durch Addition der beiden letzten Gleichungen folgt schliesslich:

$$w + W = 2\pi - (\angle\, P' P \alpha_2' + \angle\, P' P \alpha_1') = \Omega$$

wenn Ω eine leicht verständliche Abkürzung und zwar eine Grösse von constantem Wert bedeutet. Es gehört demgemäss der Randkreis zum System der Stromcurven.

Anmerkung. Der Satz, zu dem wir eben gelangt sind, ist gleichzeitig geometrisch nicht ohne Interesse. Er erscheint als Verallgemeinerung des bekannten Satzes von den Peripherie- und Centriwinkeln. Denn lassen wir α_1' und α_2' an den Randkreis rücken, so fallen die Spiegelpunkte A_1' und A_2' resp. mit α_1' und α_2' zusammen, und der vorige Satz spricht sich dann so aus, dass der doppelte Peripheriewinkel gleich dem Centriwinkel ist.

Die jetzt gefundenen Sätze beziehen sich vorerst nur auf die projicirten Stromcurven. Unter Benutzung bekannter Sätze über die stereographische Projection können wir aber, zu den wirklichen Stromcurven übergehend, sagen:

„Insbesondere repräsentiren der durch die vier Punkte α_1, α_2, A_1 und A_2 gelegte Kreis und der Randkreis der Calotte stets zwei ausgezeichnete Stromcurven."

II. Hauptabschnitt.

Verwendung der stereographischen Projection. Stromverzweigung in einem excentrischen Kreisringe und in der Ellipse.

A) Ein allgemeiner Satz über die stereographische Projection.

Ein oft mit bestem Erfolg zu verwendendes Mittel für die Lösung von Stromverzweigungsproblemen bietet bekanntlich die conforme Abbildung dar. Es ist bezüglich derselben der Satz bewiesen, dass sobald für irgend eine Fläche das Verzweigungsproblem gelöst ist, sofort die Lösung dieses Problems für ihre conforme Abbildung angegeben werden kann, wenn die Abbildungen der ursprünglichen Zuleitungsstellen als neue Zuführungsstellen dienen (C. Neumann, Math. Annalen 10. Bd. S. 569. Kirchhoff, Monatsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, Juli 1875).

Derselbe Satz gilt von der stereographischen Projection, die ein specieller Fall conformer Abbildung ist.

Um von diesem wichtigen Satze Nutzen ziehen zu können, werden wir jetzt das Strömungsproblem für einige ebene Flächen lösen und hieraus die Lösung für das entsprechende Calottenproblem herleiten.

B) Lösung des Stromverzweigungsproblems für eine ringförmige ebene Fläche, die von excentrischen Kreisen begrenzt wird.

Die Lösung dieser Aufgabe gestaltet sich ziemlich einfach, sobald ein geeignetes Coordinatensystem zur Verwendung gelangt. Die Wahl desselben, das ist nach dem Früheren unmittelbar klar, geschieht am Besten nach folgenden Principien:

a) Die Bedingung dafür, dass ein Punkt längs der Randcurve fortwandert, muss sich einfach aussprechen.

b) Die Differentiation nach der Normale der Randpunkte darf keine Schwierigkeit bieten.

c) Muss eine bequeme Entwickelung des Logarithmus der Entfernung zweier Punkte möglich sein und endlich muss

d) Die Differentialgleichung $\delta U = 0$ eine möglichst einfache Gestalt annehmen.

Den ersten beiden Bedingungen entspricht offenbar das dipolare Coordinatensystem, und wir werden sofort zeigen, dass es auch die übrigen Eigenschaften besitzt.

1) Einführung des dipolaren Coordinatensystems.

Seien in Figur 4. G_1 und G_2 die Grenzpunkte*) der beiden excentrischen Kreise; ihre Entfernung betrage $2g$. Im dipolaren Coordinatensystem sind dann die Coordinaten eines Punktes P:

$$1) \quad \lambda = \frac{PG_1}{PG_2} = \frac{r}{r'}, \quad \omega = G_1PG_2$$

Hiernach sind die Curven $\lambda =$ const Kreise, welche die Strecke G_1G_2 harmonisch teilen; zu ihnen gehören auch die Randkreise unserer ringförmigen Fläche. Die Curven $\omega =$ const sind ebenfalls Kreise, die, durch G_1 und G_2 gehend, die Kreise des ersten Systems rechtwinklig schneiden. Demgemäss erfüllt das dipolare System die ersten beiden gestellten Bedingungen.

Um gegenwärtig auch die dritte und vierte Eigenschaft als vorhanden nachzuweisen, lesen wir aus Figur 4., in der xy die auf O bezogenen rechtwinkligen Coordinaten von P sind, folgende Relationen ab:

$$\varphi - \varphi' = \omega$$
$$x + iy - g = r.e^{i\varphi}$$
$$x + iy + g = r'.e^{i\varphi'}$$

aus denen leicht folgt:

$$2) \quad \frac{x+iy-g}{x+iy+g} = \lambda e^{i\omega}$$

und wenn wir

$$3) \quad e^{\vartheta} = \lambda$$

setzen, so wird noch eleganter:

$$2') \quad \frac{x+ix-g}{x+iy+g} = e^{\vartheta + i\omega}$$

oder umgekehrt:

$$2'') \quad \begin{cases} x+iy = g\,\dfrac{1+e^{\vartheta+i\omega}}{1-e^{\vartheta+i\omega}} \\[2ex] x-iy = g.\dfrac{1+e^{\vartheta-i\omega}}{1-e^{\vartheta-i\omega}} \end{cases}$$

*) Durch die bekanntlich sämmtliche Kreise gehen, welche die excentrischen Kreise orthogonal schneiden.

2) Entwicklung des Logarithmus der Entfernung der Punkte xy und $x_k y_k$.

Wenn vorgelegt ist:

$$E_k^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2$$

so können wir unter Benutzung der Identität:

$$A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$$

dafür auch schreiben:

$$E_k^2 = [(x + iy) - (x_k + iy_k)].[(x - iy) - (x_k - iy_k)]$$

wodurch die Einführung der dipolaren Coordinaten ungemein leicht wird. Mittelst der Relationen 2") ergiebt sich nämlich unmittelbar:

$$E_k^2 = g^2 \left[\frac{1 + e^{\vartheta + i\omega}}{1 - e^{\vartheta + i\omega}} - \frac{1 + e^{\vartheta_k + i\omega_k}}{1 - e^{\vartheta_k + i\omega_k}}\right]\left[\frac{1 + e^{\vartheta - i\omega}}{1 - e^{\vartheta - i\omega}} - \frac{1 + e^{\vartheta_k - i\omega_k}}{1 - e^{\vartheta_k - i\omega_k}}\right]$$

oder auch:

$$E_k^2 = 4g^2 \left[\frac{e^{\vartheta + i\omega} - e^{\vartheta_k + i\omega_k}}{(1 - e^{\vartheta + i\omega})(1 - e^{\vartheta_k + i\omega_k})}\right] \cdot \left[\frac{e^{\vartheta - i\omega} - e^{\vartheta_k - i\omega_k}}{(1 - e^{\vartheta - i\omega})(1 - e^{\vartheta_k - i\omega_k})}\right]$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$N(\vartheta, \omega) = (1 - e^{\vartheta + i\omega})(1 - e^{\vartheta - i\omega})$$

so wird noch einfacher:

$$E_k^2 = \frac{4e^{2\vartheta} g^2}{N(\vartheta_1 \omega) . N(\vartheta_k, \omega_k)} [1 - e^{\vartheta_k - \vartheta + i(\omega_k - \omega)}].[1 - e^{\vartheta_k - \vartheta - i(\omega_k - \omega)}]$$

Ist nun a) $\vartheta_k < \vartheta$ also $\vartheta_k - \vartheta$ negativ:

so sind die Entwicklungen zulässig:

$$\begin{aligned} \log E_k^2 = \lg(4g^2 e^{2\vartheta}) - \lg N(\vartheta, \omega) - \lg N(\vartheta_k, \omega_k) \\ - \sum_1^\infty \frac{1}{n} e^{-n(\vartheta - \vartheta_k) - in(\omega - \omega_k)} \\ - \sum_1^\infty \frac{1}{n} e^{-n(\vartheta - \vartheta_k) + in(\omega - \omega_k)} \end{aligned}$$

oder nach einfacher Reduction:

$$4) \quad \left\{ \begin{aligned} \lg E_k = \lg(2ge^{\vartheta}) - \tfrac{1}{2}\lg N(\vartheta, \omega) . N(\vartheta_k, \omega_k) \\ - \sum_1^\infty \frac{1}{n} e^{-n(\vartheta - \vartheta_k)} . \cos n(\omega - \omega_k). \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Ist b) $\vartheta_k > \vartheta$ also $\vartheta - \vartheta_k$ negativ:

so ergiebt die Regel der Symmetrie:

$$4') \quad \left\{ \begin{aligned} \lg E_k &= \lg(2g e^{\vartheta_k}) - \tfrac{1}{2}\lg N(\vartheta, \omega) . N(\vartheta_k, \omega_k) \\ &\quad - \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \cdot e^{-n(\vartheta_k - \vartheta)} . \cos n(\omega - \omega_k) \end{aligned} \right.$$

Das dipolare Coordinatensystem entspricht also auch der dritten Anforderung.

3) Transformation der Differentialgleichung $\delta U = 0$ in das dipolare Coordinatensystem.

Im rechtwinkligen Coordinatensystem ist bekanntlich:

$$\delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

Nun ergiebt die gewöhnliche Differentiation:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

und weiter:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \omega} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

Ganz analog folgt der Wert für $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, so dass schliesslich wird:

$$\alpha) \quad \delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} . \Box \vartheta + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} \Box \omega + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta \partial \omega} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial \vartheta} . \triangle \vartheta + \frac{\partial U}{\partial \omega} \triangle \omega$$

wenn wir zur vorübergehenden Abkürzung setzen:

$$\Box \vartheta \equiv \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)^2, \quad \ldots, \quad \triangle \vartheta \equiv \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \; - \ldots$$

Aus der Substitutionsgleichung 2') ergeben sich weiter die Relationen:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = - \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

vermittelst deren sich leicht die Beziehungen verificiren lassen:

$$\triangle\vartheta = 0,\quad \triangle\omega = 0,\quad \Box\vartheta = \Box\omega$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=0$$

Gegenwärtig wird nach α)

$$\delta U = \Box\vartheta\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\omega^2}\right]$$

Nun ist aber $\Box\vartheta$ im Allgemeinen von Null verschieden, und es heisst daher die gesuchte transformirte Differentialgleichung $\delta U = 0$:

$$5)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\omega^2}=0$$

4) Bestimmung der Function V und $\frac{\partial V}{\partial n}$

Es ist allgemein bekannt, welchen Bedingungen die Function V zu genügen hat (vergl. 10 im 1. Hptabschn.) und ebenso, dass der Ansatz: (Kirchhoff, Poggendorffs Annalen, Bd. 64.)

$$6)\quad V = \Sigma\,\frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\lg E_k$$

die geforderten Eigenschaften besitzt. In letzterem kann für $\lg E_k$ eine der Entwicklungen 4) substituirt werden, was für die Berechnung von $\frac{\partial V}{\partial n}$ wesentlich ist.

Man bemerkt leicht, dass im vorliegenden Falle

$$\frac{\partial V}{\partial n}=\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial n}$$

ist. Für Punkte nahe dem äussern Rande ist aber weiter $\vartheta_k < \vartheta$ und es folgt vermittelst 4):

$$6')\quad V = \text{Const} - \Sigma k\,\frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\,e^{-n(\vartheta-\vartheta_k)}\cos n(\omega-\omega_k),$$

wo Const die Bedeutung hat:

$$\text{Const} = -\,\Sigma k\,\frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\,\lg N(\vartheta_k,\omega_k)$$

Es ist nämlich zu beachten, dass die nur von ϑ, ω, nicht vom Index k, abhängenden Glieder wegen $\Sigma k\,J_k = 0$ verschwinden.

Ist daher schliesslich ϑ_1 der Parameter des äussern Randkreises, so findet sich:

$$\alpha)\quad \overline{\frac{\partial V}{\partial n_a}} = \overline{\frac{\partial \vartheta}{\partial n_a}} \left[\Sigma k \frac{J_k}{2\pi \varkappa \varepsilon} \cdot \sum_1^\infty e^{-n(\vartheta_1 - \vartheta_k)} . \cos n(\omega - \omega_k) \right]$$

Für den inneren Rand ist $\vartheta_k > \vartheta$ und es ergiebt sich nach 4')

$$6'')\quad V = \text{Const} - \Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_1^\infty \frac{1}{n} e^{-n(\vartheta_k - \vartheta)} . \cos n(\omega - \omega_k),$$

wo Const die Bedeutung hat:

$$\text{Const} = \Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} [\lg(2ye^{\vartheta_k}) - \tfrac{1}{2}\lg N(\vartheta_k, \omega_k)]$$

Hieraus folgt leicht:

$$\beta)\quad \overline{\frac{\partial V}{\partial n_i}} = -\overline{\frac{\partial \vartheta}{\partial n_i}} \left[\Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_1^\infty e^{-n(\vartheta_k - \vartheta_0)} . \cos n(\omega - \omega_k) \right]$$

wenn ϑ_0 der Parameter des innern Randkreises ist.

5) Bestimmung der Function W.

Aus der Differentialgleichung 5) lassen sich ohne Weiteres

$$C_n^{(k)} e^{-n(\vartheta - \vartheta_k)} . \cos n(\omega - \omega_k)$$

und

$$\Gamma_n^{(k)} e^{-n(\vartheta_k - \vartheta)} . \cos n(\omega - \omega_k)$$

als particulare Lösungen erkennen. Daher rechtfertigt sich der Ansatz:

$$7)\quad W = \Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_1^\infty [C_n^{(k)} e^{-n(\vartheta - \vartheta_k)} + \Gamma_n^{(k)} e^{-n(\vartheta_k - \vartheta)}] \cos n(\omega - \omega_k)$$

worin $C_n^{(k)}$ und $\Gamma_n^{(k)}$ Constante bedeuten. Diese sind so zu bestimmen, dass der Bedingung

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial n}} = \overline{\frac{\partial V}{\partial n}}$$

entsprochen werde. Nun berechnet sich aus 7):

$$\gamma)\quad \overline{\frac{\partial W}{\partial n_a}} = -\overline{\frac{\partial \vartheta}{\partial n_a}} \left[\Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_1^\infty n(C_n^{(k)} e^{-n(\vartheta_1 - \vartheta_k)} - \Gamma_n^{(k} e^{-n(\vartheta_k - \vartheta_1)}) \cos n(\omega - \omega_k) \right]$$

$$\delta)\quad \frac{\partial W}{\partial n_i} = -\frac{\partial\vartheta}{\partial n_i}\Big[\Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\sum_1^\infty n(C_n^{(k)}e^{-n(\vartheta_o-\vartheta_k)} - \Gamma_n^{(k)}e^{-n(\vartheta_k-\vartheta_o)}) . \cos(\omega-\omega_k)\Big]$$

und gegenwärtig ergiebt die Gleichsetzung von $\alpha)$ $\gamma)$ und $\beta)$ $\delta)$ die zur Bestimmung von $C_n^{(k)}$ und $\Gamma_n^{(k)}$ nötigen Relationen. Es findet sich:

$$C_n^{(k)} = \frac{e^{-2n\vartheta_k}+e^{-2n\vartheta_i}}{n(e^{-2n\vartheta_i}-e^{-2n\vartheta_i})}$$

$$\Gamma_n^{(k)} = \frac{e^{-2n\vartheta_i}+e^{-2n(\vartheta_i+\vartheta_0-\vartheta_k)}}{n(e^{-2n\vartheta_0}-e^{-2n\vartheta_i})}$$

Hierfür folgt aus 7) definitiv:

$$8)\quad\begin{cases} W = \Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\Big[\sum_1^\infty \frac{1}{n}\Big\{\frac{e^{-2n\vartheta_k}+e^{-2n\vartheta_i}}{e^{-2n\vartheta_k}-e^{-2n\vartheta_i}}\Big\} . e^{-n(\vartheta-\vartheta_k)} . \cos n(\omega-\omega_k) \\ \quad + \sum_1^\infty \frac{1}{n}\Big\{\frac{e^{-2n\vartheta_i}+e^{-2n(\vartheta_i+\vartheta_0-\vartheta_k)}}{e^{-2n\vartheta_0}-e^{-2n\vartheta_i}}\Big\} e^{-n(\vartheta_k-\vartheta)} . \cos n(\omega-\omega_k)\Big] \end{cases}$$

Dieser Ausdruck enthält unter dem auf n bezüglichen Summenzeichen 4 Gruppen. Wir fassen die 2te und 3te, die 1te und 4te zusammen und bringen W in die Gestalt:

$$8')\quad\begin{cases} W = 2\Sigma \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\Big[\sum_1^\infty \frac{e^{-2n\vartheta_i}}{e^{-2n\vartheta_0}-e^{-2n\vartheta_i}} \cos ni(\vartheta-\vartheta_k) . \cos n(\omega-\omega_k) \\ \quad + \sum_1^\infty \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{-n(\vartheta_0+\vartheta_1)}}{e^{-2n\vartheta_0}-e^{-2n\vartheta_i}} \cos ni(\vartheta+\vartheta_k-\vartheta_0-\vartheta_1) \cos n(\omega-\omega_k)\Big] \end{cases}$$

Wir verwandeln hierin schliesslich die Cosinusproducte in die Summe zweier Cosinus, setzen zur Abkürzung

$$9)\quad \omega + i\vartheta = w, \quad \omega - i\vartheta = w', \quad i(\vartheta_0+\vartheta_1) = v$$

und nennen überdies den echten Bruch:

$$10)\quad e^{-n(\vartheta_1+\vartheta_0)} = q$$

Die Gleichung 8') geht dann über in:

$$8'')\quad\begin{cases} W = \Sigma k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\Big[\sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\{\cos n(w-w_k) + \cos n(w'-w_k')\} \\ \quad + \sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}}\{\cos n(w-w_k'-v) + \cos n(w'-w_k+v)\}\Big] \end{cases}$$

6) Summation der in W vorkommenden Reihen.

Die in W vorkommenden unendlichen Reihen lassen sich mit Hilfe der Jacobi'schen Transcendenten Θ und H summiren (Vergl. Jacobi, Fund. funct. ellipt.). Diese Reihen haben im Wesentlichen die Typen:

$$S_1 = \sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \cos nz \quad \text{und:}$$

$$S_2 = \sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}} \cos nz$$

Lösen wir in S_1 jeden der Brüche $\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}$ in eine unendliche Reihe auf, so wandelt sich die Reihe S_1 in eine unendliche Doppelreihe um, die nach Verticalcolonnen summirt die Gestalt annimmt:

$$S_1 = -\tfrac{1}{2}\lg\{(1-2q^2\cos z + q^4)(1-2q^4\cos z + q^8)\ \ldots\}$$

Wird gegenwärtig zur Abkürzung gesetzt:

$$Q = (1-q^2)(1-q^4)\ \ldots,$$

so ist nach Jacobi:

$$(1-2q^2\cos z + q^4)(1-2q^4\cos z + q^8)\ \ldots$$
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{q}\,.\sin\frac{z}{2}} \cdot \frac{1}{Q}\left\{\sqrt[4]{q}\,.\sin\frac{z}{2} - \sqrt[4]{q^9}.\sin\frac{3z}{2} + \ldots\right\}$$

oder:

$$= \frac{1}{2Q\sqrt[4]{q}.\sin\frac{z}{2}}\,.\,H\left(\frac{K}{\pi}.z\right)$$

wo K das ganze elliptische Integral 1. Gattung, die bekannte Jacobische Constante, bedeutet. Es wird demgemäss:

$$11)\quad S_1 = -\tfrac{1}{2}\lg H\left(\frac{K}{\pi}z\right) + \tfrac{1}{2}\lg\sin\frac{z}{2} + \text{Const.}$$

In ganz analoger Weise lässt sich S_2 berechnen, und zwar findet man:

$$12)\quad S_2 = -\Theta\left(\frac{K}{\pi}z\right) + \text{Const.}$$

7) Transformation von W. Bestimmung von U.

Eine directe Verwendung der Formeln 11) und 12) liefert jetzt aus 8'')

8''')

$$W = -\Sigma k \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon}\left[\lg H\left(\frac{K}{\pi}(w-w_k)\right). H\left(\frac{K}{\pi}(w'-w_k')\right). \Theta\left(\frac{K}{\pi}(w-w_k'-v)\right)\right.$$
$$\left. + \lg\Theta\left(\frac{K}{\pi}(w'-w_k+v)\right) + \lg\sin\frac{w-w_k}{2}.\sin\frac{w'-w_k'}{2}\right] + \text{Const.}$$

Das letzte Glied in vorstehendem Ausdrucke lässt sich in folgender Weise transformiren. Es ist mit Rücksicht auf 9)

$$\Sigma k \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon} \lg\sin\frac{w-w_k}{2}.\sin\frac{w'-w_k'}{2}$$
$$= \Sigma k \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon} \lg(\cos i(\vartheta-\vartheta_k) - \cos(\omega-\omega_k)) + \text{Const.}$$

oder:

$$= \Sigma k \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon} \lg(1 - e^{-(\vartheta-\vartheta_k)+i(\omega-\omega_k)})$$
$$+ \Sigma k \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon} \lg(1 - e^{-(\vartheta-\vartheta_k)-i(\omega-\omega_k)}) + \text{Const.}$$

Mit Rücksicht auf Formel 6) und mit Beachtung der Entwicklungen für E_k^2 folgt gegenwärtig:

$$13)\quad \Sigma \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon} \lg\sin\frac{w-w_k}{2}.\sin\frac{w'-w_k'}{2} = V + \text{Const.}$$

Jetzt berechnet sich der Potentialwert $U = V - W$ sehr einfach. Es ergiebt sich nämlich nach 8''') und 13):

$$14)\quad \begin{cases} U = \Sigma k \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon}\left[\lg H\left(\frac{K}{\pi}(w-w_k)\right). H\left(\frac{K}{\pi}(w'-w'_k)\right)\right. \\ \left. + \lg\Theta\left(\frac{K}{\pi}(w-w_k'-v)\right). \Theta\left(\frac{K}{\pi}(w'-w_k+v)\right)\right] + \text{Const.} \end{cases}$$

Anmerkung. Gehen die excentrischen Kreise in concentrische über, so fällt G_2 (vergl. Fig. 4.) in unendliche Ferne, G_1 in den gemeinschaftlichen Mittelpunkt. Es wird also:

$$\varphi' = 0, \quad \varphi = \omega, \quad 2g.\frac{r}{r'} = 2ge^{\vartheta} = \varrho$$

wo ϱ und φ die gewöhnlichen Polarcoordinaten sind.

C. Die Stromverzweigung in einer elliptischen Platte.

Die erste Frage ist auch hier wieder die nach einem geeigneten Coordinatensysteme, das den früher hervorgehobenen Bedingungen entspricht. Den ersten beiden der dort aufgezählten Forderungen genügt, wie leicht ersichtlich, das elliptische Coordinaten-

system, in welchem ein beliebiger Punkt der Ebene durch die Parameter zweier confocaler Kegelschnitte bestimmt wird. Leider verträgt es sich nicht sonderlich mit den letzten beiden Bedingungen. Immerhin aber kann es als Ausgangspunkt dienen, und es wird der Versuch zu machen sein, durch Einführung gewisser Functionen der elliptischen Coordinaten, als neuer Coordinaten (so dass die genannten ersten beiden Eigenschaften erhalten bleiben) auch eine bequeme Logarithmenentwicklung etc. zu ermöglichen. Wir schlagen hierzu folgenden Weg ein:

1) Auffindung und Transformation der Differentialgleichung $\delta U = 0$.

Es wäre nicht geschickt die Gleichung $\delta U = 0$ aus der für rechtwinklige Coordinaten bekannten abzuleiten. Gegenwärtig ist die directe Ableitung vorzuziehen.

Seien zu diesem Zwecke in Figur 5. λ_0 und λ_1 die Parameter, welche den Punkt A characterisiren; die ihnen zugehörigen Kegelschnitte in Verbindung mit denen, die die Parameter $\lambda_0 + d\lambda_0$ und $\lambda_1 + d\lambda_1$ besitzen, schliessen das rechtwinklige Flächenelement $ABCD$ ein. Wird der elliptischen Platte ein elektrischer Strom zugeführt, so ist das durch AD während der Zeit dt tretende elektrische Quantum:

$$M = -\varkappa\varepsilon \frac{\partial U}{AB} . AD . dt$$

Nun ist nach Hesse's Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes (2. Aufl. S. 290.) ein beliebiges Bogenelement ds dargestellt durch:

$$15)\quad ds^2 = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{4}\left\{\frac{d\lambda_0^2}{L_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{L_1^2}\right\}$$

wenn zur Abkürzung

$$16)\quad \begin{cases} L_0^2 = (a+\lambda_0)(b+\lambda_0) \\ -L_1^2 = (a+\lambda_1)(b+\lambda_1) \end{cases}$$

gesetzt wird und a, b die Parameter der Grundellipse sind. Im Speciellen findet sich demgemäss:

$$15')\quad \begin{cases} AB = dx = \sqrt{\dfrac{\lambda_0 - \lambda_1}{2}} \cdot \dfrac{d\lambda_1}{L_1} \\ AD = dy = \sqrt{\dfrac{\lambda_0 - \lambda_1}{2}} \cdot \dfrac{d\lambda_0}{L_0} \end{cases}$$

Es wird also:

$$\alpha)\quad M = -\varkappa\varepsilon \cdot \frac{L_1}{L_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} \cdot d\lambda_0\, dt$$

und wenn wir $\lambda_1 + d\lambda_1$ an die Stelle von λ_1 treten lassen, ergiebt sich für die durch BC austretende Elektricität:

$$\beta)\quad M' = -\varkappa\varepsilon \left[\frac{L_1}{L_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} + \frac{d\lambda_1}{1} \cdot \frac{\partial \left(\frac{L_1}{L_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial \lambda_1}\right)}{\partial \lambda_1} + \dots\right] d\lambda_0\, dt$$

Schliesslich folgt aus α) und β):

$$\gamma)\quad M - M' = \varkappa\varepsilon \cdot \frac{\partial \left(\frac{L_0}{L_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial \lambda_1}\right)}{\partial \lambda_1} \cdot d\lambda_0\, d\lambda_1\, dt$$

In ganz der nämlichen Weise resultirt für die in der Figur 5. angedeuteten Mengen N und N':

$$\delta)\quad N - N' = \varkappa\varepsilon \cdot \frac{\partial \left(\frac{L_1}{L_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial \lambda_0}\right)}{\partial \lambda_0} \cdot d\lambda_1\, d\lambda_0\, dt$$

Gegenwärtig berechnet sich mit Leichtigkeit der Gesammtgewinn $G = (M - M') + (N - N')$ des Flächenelements, durch dessen Nullsetzung die gesuchte Differentialgleichung:

$$\delta U \equiv \frac{\partial \left(\frac{L_1}{L_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial \lambda_1}\right)}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \left(\frac{L_0}{L_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial \lambda_0}\right)}{\partial \lambda_0} = 0$$

hervorgeht. Da L_0 unabhängig von λ_1, L_1 unabhängig von λ_0, so kann man dieser Differentialgleichung auch die Form geben:

$$17)\quad L_1 \cdot \frac{\partial \left(L_1 \frac{\partial U}{\partial \lambda_1}\right)}{\partial \lambda_1} + L_0 \cdot \frac{\partial \left(L_0 \frac{\partial U}{\partial \lambda_0}\right)}{\partial \lambda_0} = 0$$

Rücksichtlich der Bedeutungen von L_0 und L_1 hat diese Gleichung keine einfache Form. Wir wollen versuchen ihr durch Einführung neuer Parameter:

$$\eta = \eta(\lambda_1), \qquad \vartheta = \vartheta(\lambda_0)$$

eine bequemere Gestalt zu verschaffen. Denken wir uns diese neuen Variabeln substituirt, zunächst etwa η für λ_1, so wird offenbar:

$$L_1 \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot L_1 \frac{\partial \eta}{\partial \lambda_1}$$

Könnten wir nun $\eta = \eta(\lambda_1)$ so bestimmen, dass:

$$\text{a)}\quad L_1 \frac{\partial \eta}{\partial \lambda_1} = C$$

würde, wo C eine Constante bedeutet, dann erhielte das erste Glied der Differentialgleichung 17) eine sehr einfache Gestalt.

Die durch die Differentialgleichung a) charakterisirte Function lässt sich glücklicherweise leicht angeben. Es folgt nämlich aus a) mit Rücksicht auf 16) sehr einfach:

$$\eta = C \int \frac{\partial \lambda_1}{\sqrt{-(a+\lambda_1)(b+\lambda_1)}} + \text{Const}$$

Nun liegt nach Hesse (a. a. O. S. 282.) der Wert des Parameters λ_1 immer zwischen $-a$ und $-b$ und wir dürfen

$$\lambda_1 = -a - \lambda_1'$$

setzen. Gegenwärtig lässt sich die Integration leicht ausführen und erhält man für $C = -\frac{1}{2}$, Const $= \frac{\pi}{2}$:

$$18)\quad 2\eta = \arccos\left\{\frac{a+b}{a-b} + \frac{2\lambda_1}{a-b}\right\}$$

oder umgekehrt:

$$18')\quad \begin{cases} a+\lambda_1 = (a-b)\cos^2\eta \\ b+\lambda_1 = -(a-b)\sin^2\eta \end{cases}$$

Bei der ganz analogen Bestimmung der Function $\vartheta(\lambda_0)$ ist zu beachten, dass nach Hesse (a. a. O. S. 282.) λ_0 immer zwischen $-b$ und ∞ enthalten ist. Es ergeben sich dann die Gleichungen:

$$19)\quad \begin{cases} a+\lambda_0 = (a-b)\cos^2 i\vartheta \\ b+\lambda_0 = -(a-b)\sin^2 i\vartheta \end{cases}$$

wo i die imaginäre Einheit bedeutet.

Führen wir die jetzt gefundenen Coordinaten wirklich ein, so wird die Differentialgleichung 17) in die Normalform:

$$20)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0$$

transformirt.

2) Entwicklung des Logarithmus der Entfernung zweier Punkte im Coordinatensystem der ϑ und η.

Wie wir schon früher fanden, lässt sich zunächst in rechtwinkligen Coordinaten die Entfernung der Punkte x, y und x_k, y_k darstellen durch:

$$\text{a)}\quad E_k^2 = [(x+iy)-(x_k+iy_k)]\,[(x-iy)-(x_k-iy_k)]$$

Von den rechtwinkligen Coordinaten gelangen wir nun zn den elliptischen (Hesse, a. a. O. S. 282. Formel 10.) durch die Snbstitutionen:

$$x^2 = \frac{(a+\lambda_0)(a+\lambda_1)}{a-b}$$

$$y^2 = \frac{(b+\lambda_0)(b+\lambda_1)}{b-a}$$

oder mit Rücksicht anf 18') nnd 19):

$$21)\quad \begin{cases} x+iy = \sqrt{a-b}\,.\cos(\eta+i\vartheta) \quad \text{oder:} \\ x-iy = \sqrt{a-b}\,.\cos(\eta-i\vartheta) \end{cases}$$

Mithin wird gegenwärtig:

$$\text{a}')\quad E_k^2 = (a-b)\,[\cos(\eta+i\vartheta)-\cos(\eta_k+i\vartheta_k)]\,[\cos(\eta-i\vartheta)-\cos(\eta_k-i\vartheta_k)]$$

Durch Einführung von Exponentialgrössen findet sich nun weiter nach elementaren Transformationen:

$$\cos(\eta+i\vartheta)-\cos(\eta_k+i\vartheta_k) = \tfrac{1}{2}e^{\vartheta+i\eta}\{1-e^{-(\vartheta-\vartheta_k)-i(\eta-\eta_k)}\} \times \{1-e^{-(\vartheta+\vartheta_k)-i(\eta+\eta_k)}\}$$

$$\cos(\eta-i\vartheta)-\cos(\eta_k-i\vartheta_k) = \tfrac{1}{2}e^{\vartheta-i\eta}\{1-e^{-(\vartheta+\vartheta_k)+i(\eta+\eta_k)}\} \times \{1-e^{-(\vartheta-\vartheta_k)+i(\eta-\eta_k)}\}$$

Demgemäss ergiebt sich jetzt:

$$\lg E_k^2 = \lg\left(\frac{a-b}{4}.e^{2\vartheta}\right) + \lg(1-e^{-(\vartheta-\vartheta_k)-i(\eta-\eta_k)}) + \lg(1-e^{-(\vartheta+\vartheta_k)-i(\eta+\eta_k)}) + \lg(1-e^{-(\vartheta+\vartheta_k)+i(\eta+\eta_k)}) + \lg(1-e^{-(\vartheta-\vartheta_k)+i(\eta+\eta_k)})$$

Ist nun $\vartheta > \vartheta_k$

so sind die recllen Teile der in den Klammern stchenden Exponentialgrössen < 1 und wir können die vorkommenden Logarithmen in der bekannten einfachen Weise entwickeln.

Es findet sich zunächst:

$$\lg E_k^2 = \lg\left(\frac{a-b}{4}.e^{2\vartheta}\right) - 2\sum_1^\infty \frac{1}{n}e^{-n(\vartheta+\vartheta_k)}\left\{\frac{e^{ni(\eta+\eta_k)}+e^{-ni(\eta+\eta_k)}}{2}\right\} - 2\sum_1^\infty \frac{1}{n}e^{-n(\vartheta-\vartheta_k)}\left\{\frac{e^{ni(\eta-\eta_k)}+e^{-ni(\eta-\eta_k)}}{2}\right\}$$

und nach leichter Umformung:

$$22)\quad \begin{cases} \lg E_k = \tfrac{1}{2}\lg\left(\dfrac{a-b}{4}\,.\,e^{2\vartheta}\right) - \sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n}\, e^{-n\vartheta}(e^{n\vartheta_k} + e^{-n\vartheta_k}) \cos n\eta \cos n\eta_k \\ \qquad - \sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n}\, e^{-n\vartheta}(e^{n\vartheta_k} - e^{-n\vartheta_k}) \sin n\eta \sin n\eta_k \end{cases}$$

3) Bestimmung der Function V. Berechnung von $\dfrac{\overline{\partial V}}{\partial \vartheta}$

Auch gegenwärtig setzen wir:

$$23)\quad V = \Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \lg E_k$$

wo unter E_k die Entfernung eines beliebigen Punktes von der Zuleitungsstelle α_k verstanden wird. Behufs späterer Verwendung berechnen wir jetzt $\dfrac{\partial V}{\partial \vartheta}$ für $\vartheta = \vartheta_0$, wenn ϑ_0 der Parameter der Randellipse ist. Für solche Punkte ist $\vartheta > \vartheta_k$ und mithin die Entwicklung 22) verwendbar. Somit wird aus 23):

$$23')\quad \begin{cases} V = -\Sigma \dfrac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\Big[\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n}\, e^{-n\vartheta}(e^{n\vartheta_k} + e^{-n\vartheta_k}) \cos n\eta \cos n\eta_k \\ \qquad + \sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n}\, e^{-n\vartheta}(e^{n\vartheta_k} - e^{-n\vartheta_k}) \sin n\eta \sin n\eta_k\Big] + \text{Const} \end{cases}$$

Gegenwärtig folgt ohne Mühe:

$$\text{b)}\quad \frac{\overline{\partial V}}{\partial \vartheta} = \Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\Big[\sum_1^\infty e^{-\;\vartheta_0}(e^{n\vartheta_k} + e^{-n\vartheta_k}) \cos n\eta \cos n\eta_k + \sum_1^\infty e^{-n\vartheta_0}(e^{n\vartheta_k} - e^{-n\vartheta_k}) \sin n\eta \sin n\eta_k\Big]$$

4) Bestimmung der Function W.

Es ist leicht zu bemerken, dass

$$C e^{\pm n\vartheta} \cos n\eta \quad \text{und} \quad C_1 e^{\pm n\vartheta} \sin n\eta$$

particuläre Lösungen der Differentialgleichung 20) sind. Derselben tut deshalb auch:

$$24)\quad W = \Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_1^\infty \left[C_{n,k}(e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}) \cos n\eta + \Gamma_{n,k}(e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}) \sin n\eta\right]$$

Genüge. Dieser Ausdruck erfüllt auch die Stetigkeitsbedingungen, wie C. Neumann im 59. Bande des Crelle'schen Journals (in der Abhandlung „Ueber die Integration etc.") streng nachgewiesen hat.

Digitized by Google

Die genannten Coefficienten bestimmen sich durch die Bemerkung, dass für den Rand

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n}$$

oder, wie man leicht erkennt:

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \frac{\partial V}{\partial \vartheta}$$

sein muss. Nun ergiebt sich vermittelst 24) leicht:

$$\text{c)} \left\{ \begin{aligned} \overline{\frac{\partial W}{\partial \vartheta}} = \Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} [& \sum_1^\infty C_{n,k} . n (e^{n\vartheta_0} - e^{-n\vartheta_0}) \cos n\eta \\ & + \sum_1^\infty \Gamma_{n,k} . n (e^{n\vartheta_0} + e^{-n\vartheta_0}) \sin n\eta] \end{aligned} \right.$$

wenn wieder ϑ_0 der Parameter des Ellipsenrandes ist. Eine Vergleichung der Reihen b) und c) ergiebt gegenwärtig sehr einfach:

$$\text{d)} \left\{ \begin{aligned} C_{n,k} &= \frac{2e^{-n\vartheta_0} \cos ni\vartheta_k \cos n\eta_k}{n(e^{n\vartheta_0} - e^{-n\vartheta_0})} \\ \Gamma_{n,k} &= \frac{2e^{-n\vartheta_0}\, i \sin ni\vartheta_k \sin n\eta_k}{n(e^{n\vartheta_0} + e^{-n\vartheta_0})} \end{aligned} \right.$$

wenn gleichzeitig gewisse Exponentialgrössen durch trigonometrische ersetzt werden. Die Substitution dieser Werte in 24) ergiebt nach einigen leichten Umformungen:

$$\text{25)} \left\{ \begin{aligned} W = 4\Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \Bigg[& \sum_1^\infty \frac{e^{-n\vartheta_0}}{n(e^{n\vartheta_0} - e^{-n\vartheta_0})} \cos ni\vartheta_k \cos ni\vartheta \cos n\eta_k \cos n\eta \\ & - \sum_1^\infty \frac{e^{-n\vartheta_0}}{n(e^{n\vartheta_0} + e^{-n\vartheta_0})} \sin ni\vartheta_k \sin ni\vartheta \sin n\eta_k \sin n\eta \Bigg] \end{aligned} \right.$$

5) **Transformation von *W*. Bestimmung des Potentials *U*.**

Wir setzen in 25) den echten Bruch:

$$\text{26)} \quad e^{-2\vartheta_0} = q$$

und überzeugen uns dann leicht von der Richtigkeit der Umwandlung:

$$\text{25')} \left\{ \begin{aligned} W = 4\Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \Bigg[& \sum_1^\infty \frac{q^n + q^{2n}}{n(1-q^{2n})} \cos ni\vartheta_k \cos ni\vartheta \cos n\eta_k \cos n\eta \\ & - \sum_1^\infty \frac{q^n - q^{2n}}{n(1-q^{2n})} \sin ni\vartheta_k \sin ni\vartheta \sin n\eta_k \sin n\eta \Bigg] \end{aligned} \right.$$

aus der leicht gefolgert wird:

$$W = 4\Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\left[\sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})}\{C+S\}\right.$$
$$\left.+\sum_1^\infty \frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\{C-S\}\right]$$

wenn die beiden Cosinus- resp. Sinusprodukte vorübergehend mit C und S bezeichnet werden. Elementare Rechnungen liefern:

$$4(C+S) = 2\{\cos ni(\vartheta+\vartheta_k)\cos n(\eta+\eta_k) + \cos ni(\vartheta-\vartheta_k)\cos n(\eta-\eta_k)\}$$
$$4(C-S) = 2\{\cos ni(\vartheta+\vartheta_k)\cos n(\eta-\eta_k) + \cos ni(\vartheta-\vartheta_k)\cos n(\eta+\eta_k)\}$$

Und wenn jetzt allgemein zur Abkürzung:

$$27)\quad \eta + i\vartheta = \omega, \quad \eta - i\vartheta = \omega'$$

gesetzt wird, so folgt weiter:

$$4(C+S) = \cos n(\omega+\omega_k) + \cos n(\omega'+\omega_k') + \cos n(\omega-\omega_k) + \cos n(\omega'-\omega_k')$$
$$4(C-S) = \cos n(\omega-\omega_k') + \cos n(\omega'-\omega_k) + \cos n(\omega+\omega_k') + \cos n(\omega'-\omega_k)$$

Nach Substitution dieser Ausdrücke besteht W aus 8 Summen, von denen jede einzelne nach 11) und 12) sich leicht summiren lässt. Es wird dann schliesslich:

$$25'')\quad \left\{\begin{aligned} W = &-\Sigma_k \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon}\Big[\lg H\Big(\frac{K}{\pi}(\omega+\omega_k)\Big).H\Big(\frac{K}{\pi}(\omega-\omega_k)\Big) \\ &+\lg H\Big(\frac{K}{\pi}(\omega'+\omega_k')\Big).H\Big(\frac{K}{\pi}(\omega'-\omega_k')\Big) \\ &+\lg\Theta\Big(\frac{K}{\pi}(\omega+\omega_k')\Big).\Theta\Big(\frac{K}{\pi}(\omega-\omega_k')\Big) \\ &+\lg\Theta\Big(\frac{K}{\pi}(\omega'+\omega_k)\Big).\Theta\Big(\frac{K}{\pi}(\omega'-\omega_k)\Big)\Big] \\ &+\Sigma_k \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon}\lg \sin\frac{\omega+\omega_k}{2}\sin\frac{\omega-\omega_k}{2}\sin\frac{\omega'+\omega_k'}{2}\sin\frac{\omega'-\omega_k'}{2} + \text{const} \end{aligned}\right.$$

Fassen wir im letzten Gliede das Produkt je zweier Sinus zusammen und verwandeln es in die Differenz zweier Cosinus, so erhalten wir nach Restitution der unter 27) eingeführten Abkürzungen:

$$28)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma_k \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon}\lg \sin\frac{\omega+\omega_k}{2}\sin\frac{\omega-\omega_k}{2}\sin\frac{\omega'+\omega_k'}{2}\sin\frac{\omega'-\omega_k'}{2} \\ &= \Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\lg\{\cos(\eta+i\vartheta)-\cos(\eta_k+i\vartheta_k)\}\{\cos(\eta-i\vartheta)-\cos(\eta_k-i\vartheta_k)\} \\ &\text{d. h.} = V \end{aligned}\right.$$

wie ans 23) und a′) nnmittelbar gefolgert wird.

Gegenwärtig gestaltet sich die Bestimmung des gesnchten Potentials

$$U = V - W$$

sehr einfach. Ans 25″) in Verbindnng mit 28) nnd 23) folgt nämlich:

$$29)\quad \left\{\begin{aligned} U = \Sigma_k \frac{J_k}{4\pi\varkappa\varepsilon}\Big[&\lg H\left(\frac{K}{\pi}(\omega+\omega_k)\right).H\left(\frac{K}{\pi}(\omega-\omega_k)\right) \\ &+\lg H\left(\frac{K}{\pi}(\omega'+\omega_k')\right).H\left(\frac{K}{\pi}(\omega'-\omega_k')\right) \\ &+\lg \Theta\left(\frac{K}{\pi}(\omega+\omega_k')\right).\Theta\left(\frac{K}{\pi}(\omega-\omega_k')\right) \\ &+\lg \Theta\left(\frac{K}{\pi}(\omega'+\omega_k)\right).\Theta\left(\frac{K}{\pi}(\omega'-\omega_k)\right)\Big] \\ &+\text{Const} \end{aligned}\right.$$

Anmerkung. Dnrch die Formeln 14) nnd 29) sind gleichzeitig die beiden Probleme erledigt, die sich auf die Kugelcalotte beziehen, wenn diese einmal von zwei excentrischen Kreisen, ein zweites Mal von der Schnittcurve eines elliptischen Kegels begrenzt wird, dessen Spitze im Gegenpole P' (vergl. Fignr 1.) der Calotte sich befindet. Man hat nur nötig in den erwähnten Formeln an Stelle der Punkte r, φ die entsprechenden Punkte τ, φ treten zn lassen. Dieser Uebergang wird dnrch die Formeln 28) im I. Hptabschn. leicht vermittelt.

D) Nachträge.

Die Lösnngen der unter B) und C) im zweiten Hanptabschnitt behandelten Probleme sind einer zwar analytisch umständlichen, jedoch geometrisch sehr anschaulichen Umgestaltung fähig, die wir hier kurz besprechen wollen.

1) Ad B.

Unter 8) fanden wir, die Lösnng des Problems für ringförmige Begrenzung betreffend:

$$8)\quad \left\{\begin{aligned} W = \Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\Big[&\sum_1^\infty \frac{1}{n}\left\{\frac{e^{-2n\vartheta_k}+e^{-2n\vartheta_1}}{e^{-2n\vartheta_0}-e^{-2n\vartheta_1}}\right\}.e^{-n(\vartheta-\vartheta_k)}.\cos n(\omega-\omega_k) \\ &+\sum_1^\infty \frac{1}{n}\left\{\frac{e^{-2n\vartheta_1}+e^{-2n(\vartheta_1+\vartheta_0-\vartheta_k)}}{e^{-2n\vartheta_0}-e^{-2n\vartheta_1}}\right\}.e^{-n(\vartheta_k-\vartheta)}.\cos n(\omega-\omega_k) \end{aligned}\right.$$

Nun ist durch leichte Reihenentwicklung:

$$\frac{e^{-2n\vartheta_k}+e^{-2n\vartheta_1}}{e^{-2n\vartheta_0}-e^{-2n\vartheta_1}}\cdot e^{-n(\vartheta-\vartheta_k)}=$$

$$=e^{+2n\vartheta_0}\cdot e^{-n(\vartheta-\vartheta_k)}\cdot(e^{-2n\vartheta_k}+e^{-2n\vartheta_1}\,[1+e^{-2n(\vartheta_1-\vartheta_0)}+\ldots]$$

$$=e^{-n(\vartheta+\vartheta_k-2\vartheta_0)}+e^{-n(\vartheta+\vartheta_k-2\vartheta_0+2(\vartheta_1-\vartheta_0))}+\ldots$$

$$+e^{-n(\vartheta-\vartheta_k+2(\vartheta_1-\vartheta_0))}+e^{-n(\vartheta-\vartheta_k+4(\vartheta_1-\vartheta_0))}+\ldots$$

und analog:

$$\frac{e^{-2n\vartheta_1}+e^{-2n(\vartheta_0+\vartheta_1-\vartheta_k)}}{e^{-2n\vartheta_0}-e^{-2n\vartheta_1}}\cdot e^{-n(\vartheta_k-\vartheta)}=$$

$$=e^{-n(2\vartheta_1-\vartheta_k-\vartheta)}+e^{-n(2\vartheta_1-\vartheta_k-\vartheta+2(\vartheta_1-\vartheta_0))}+\ldots$$

$$+e^{-n(\vartheta_k-\vartheta+2(\vartheta_1-\vartheta_0))}+e^{-n(\vartheta_k-\vartheta+4(\vartheta_1-\vartheta_0))}+\ldots$$

Die Substitution dieser Entwicklungen in 8) verwandelt 8) in eine unendliche Doppelreihe, die nach Verticalcolonnen angeordnet beispielsweise das folgende Glied enthält:

$$T=\sum_1^\infty e^{-n(\vartheta+\vartheta_k-2\vartheta_0)}\cdot\cos n(\omega-\omega_k)$$

Wird kurz gesetzt:

$$2\vartheta_0-\vartheta_k=\Theta_{1,k}$$

so ist vorerst zu bemerken, dass $\Theta_{1,k}<\vartheta_0$ mithin auch $\Theta_{1,k}<\vartheta$ ist. Demgemäss repräsentirt T nach 4) im Wesentlichen den negativen Logarithmus der Entfernung der Punkte ϑ, ω und $\Theta_{1,k}$, ω_k.

Analog verhält es sich mit den übrigen Verticalreihen der unendlichen Doppelreihe.

Bezeichnen wir gegenwärtig die Entfernung des Punktes ϑ, ω von den Punkten:

$$\alpha)\quad\begin{cases}2\vartheta_0-\vartheta_k-2(m-1)(\vartheta_1-\vartheta_0), & \omega_k \text{ kurz durch } E'_{m,k}\\ \vartheta_k-2m(\vartheta_1-\vartheta_0), & \omega_k \quad ,, \quad ,, \quad E''_{m,k}\\ 2\vartheta_1-\vartheta_k+2(m-1)(\vartheta_1-\vartheta_0), & \omega_k \quad ,, \quad ,, \quad H'_{m,k}\\ \vartheta_k+2m(\vartheta_1-\vartheta_0), & \omega_k \quad ,, \quad ,, \quad H''_{m,k}\end{cases}$$

so nimmt W die Form an:

$$W=-\Sigma_k\frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\sum_1^\infty{}_m\lg E'_{m,k}E''_{m,k}H'_{m,k}H''_{m,k}+\text{Const}$$

und es wird mithin:

$$\beta)\quad U=\Sigma_k\frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}[\lg E_k+\sum_1^\infty{}_m\lg E'_{m,k}E''_{m,k}H'_{m,k}H''_{m,k}]+\text{Const}$$

Die Lage der durch α) charakterisirten Punkte lässt sich leicht angeben. Bezeichnen wir die den Entfernungen $E_{m,k}$, ... entsprechenden Punkte mit den bezüglichen kleinen Buchstaben, so können wir sagen:

a) Sämmtliche $e_{m,k}$ und $\eta_{m,k}$ liegen auf dem durch α_k gehenden, die Randkreise orthogonal schneidenden Kreise, mit α_k auf derselben Seite der Centrale; denn wie aus α) ersichtlich besitzen sämmtliche Punkte den Parameter ω_k.

b) Die Punkte e liegen ausserhalb des äusseren, die Punkte η innerhalb des inneren Randkreises, denn es ist nach α) sowohl:

$$2\vartheta_1 - \vartheta_k + 2(m-1)(\vartheta_1 - \vartheta_0) \quad \text{als auch} \quad \vartheta_k + 2m(\vartheta_1 - \vartheta_0)$$
$$\text{stets} > \vartheta_1$$

und sowohl

$$2\vartheta_0 - 2(m-1)(\vartheta_1 - \vartheta_0) \quad \text{als auch} \quad \vartheta_k - 2m(\vartheta_1 - \vartheta_0)$$
$$\text{stets} < \vartheta_0$$

Beachten wir noch, dass in β) einzelne der Stromstärken J_k wegen $\Sigma_k J_k = 0$ negativ werden, so können wir den gefundenen Satz so aussprechen:

„Treten an den Stellen α_k einer von excentrischen Kreisen begrenzten ringförmigen Fläche elektrische Ströme ein resp. aus, so lässt sich die resultirende elektrische Spannung für jeden Punkt dieser Fläche als Logarithmus eines Quotienten von Entfernungen dieses Punktes von gewissen Punktsystemen darstellen. Letztere befinden sich auf den durch die Zuleitungsstellen α_k gehenden Orthogonalkreisen mit α_k immer auf derselben Seite der Centralen, teils ausserhalb des äusseren, teils innerhalb des inneren Randkreises."

Wie sich dieser Satz im Falle concentrischer Kreise modificirt, ist leicht einzusehen. Ebenso lässt sich derselbe leicht auf das entsprechende Calottenproblem übertragen.

2) Ad C.

In fast wörtlich derselben Weise lässt sich der unter 25) für das Ellipsenproblem gewonnene Ausdruck in eine anschauliche Form bringen.

Wir dürfen uns daher mit der Angabe des Resultats begnügen.

Zu diesem Zwecke nennen wir die Entfernung des allgemeinen Punktes ϑ, η der Reihe nach von den Punkten:

$$\gamma)\left\{\begin{array}{lll} 4m\vartheta_0+\vartheta_k, & \eta_k & \text{kurz } E'_{m,k} \\ (4m+2)\vartheta_0-\vartheta_k, & \eta_k & \text{„} \; E''_{m,k} \\ 4m\vartheta_0-\vartheta_k, & -\eta_k & \text{„} \; H'_{m,k} \\ (4m+2)\vartheta_0+\vartheta_k, & -\eta_k & \text{„} \; H''_{m,k} \end{array}\right.$$

und erhalten:

$$\delta)\quad W = -\Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_0^{\infty}{}_m \lg E'_{m,k} E''_{m,k} H'_{m,k} H''_{m,k} + \text{Const}$$

Demgemäss wird gegenwärtig:

$$\varepsilon)\quad U = \Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \lg E_k + \Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon} \sum_0^{\infty} \lg E'_{m,k} E''_{m,k} H'_{m,k} H''_{m,k} + \text{Const}$$

Verstehen wir unter $e_{k,m}$ und $\eta_{k,m}$, analog wie vorhin, die den Entfernungen $E_{m,k}$ und $H_{m,k}$ entsprechenden Punkte, so lässt sich deren Lage auch hier leicht angeben. Sie liegen:

a) sämmtlich auf der durch a_k (Figur 7.) gehenden confocalen Hyperbel; denn sie haben nach γ) sämmtlich den Parameter $\pm\eta_k$. Jedoch liegen die $e_{k,m}$ mit a_k auf derselben, die $\eta_{k,m}$ auf der entgegengesetzten Seite der Hauptachse, da erstere den Parameter $+\eta_k$, letztere den Parameter $-\eta_k$ besitzen*).

b) sie liegen ohne Ausnahme ausserhalb der Ellipse, wie man aus γ) leicht ersieht.

Der durch δ) ausgedrückte Satz lässt sich hiernach leicht in Worte fassen.

III. Hauptabschnitt.

Strömung in einer von einer sphärischen Ellipse begrenzten Calotte.

Ist die Calotte von einer sphärischen Ellipse (d. h. von dem Schnitte eines centralen Kegels 2ter Ordnung mit der Kugelfläche) begrenzt, so empfehlen sich als Coordinaten vorerst die elliptischen Kugelcoordinaten (cf. Hesse a. a. O. Seite 315). In diesem System wird irgend ein Punkt der Kugel durch die Parameter λ_1 und λ_2

*) Die Bedeutung des negativen Parameters η_k folgt leicht aus der geometrischen Interpretation desselben, nach welcher η die sogenannte excentrische Anomalie ist.

zweier confocaler, sich orthogonal schneidender Kegel 2. O. bestimmt, die ihre Spitzen im Mittelpunkte der Kugel haben.

Die folgende Untersuchung wird zeigen, dass dies Coordinatensystem für unsern Zweck zwar nicht vollständig geeignet sein wird, dass aber doch mit leichter Mühe aus demselben ein passendes abgeleitet werden kann.

A) Bogenelement in den elliptischen Kugelcoordinaten und Transformation desselben.

Für die Ebene giebt uns die allgemeine Formel 15) im vor. Abschn. das Bogenelement ds in elliptischen Coordinaten zu:

$$1)\quad ds^2 = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{4}\left\{\frac{d\lambda_0^2}{L_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{L_1^2}\right\}$$

welche Formel sich durch Einführung der ϑ, η Coordinaten vermittelst der Relationen 18) und 19) des vor. Abschnitts umwandelt in:

$$2)\quad ds^2 = f(\vartheta, \eta)\{d\vartheta^2 + d\eta^2\}$$

wenn zur blossen Abkürzung gesetzt wird:

$$f(\vartheta, \eta) = \frac{a-b}{4}(\cos^2 i\vartheta - \cos^2\eta)$$

In ähnlicher Weise hat man für ein Bogenelement im Raume in elliptischen Raumcoordinaten (Hesse a. a. O. Seite 313. Formel 49.) den Ausdruck:

$$d\Sigma^2 = \frac{P}{4}\left\{\frac{d\lambda_0^2}{(\lambda_1-\lambda_2)\Lambda_0^2} + \frac{d\lambda_1^2}{(\lambda_0-\lambda_2)\Lambda_1^2} + \frac{d\lambda_2^2}{(\lambda_0-\lambda_1)\Lambda_2^2}\right\}$$

aus dem man leicht das Bogenelement der Kugeloberfläche in elliptischen Kugelcoordinaten findet, wenn man $\lambda_0 = \text{const} = \text{Kugelradius}$ setzt und den auf bekannte Weise durchzuführenden Uebergang (Hesse a. a. O. Seite 316 u. f.) von den elliptischen zu den elliptischen Kugelcoordinaten vornimmt.

Es findet sich für ein Bogenelement $d\sigma$ der Kugeloberfläche:

$$3)\quad d\sigma^2 = \frac{r(\lambda_1-\lambda_2)}{4}\left\{\frac{d\lambda_1^2}{\Lambda_1^2} + \frac{d\lambda_2^2}{\Lambda_2^2}\right\}$$

wo r den Radius der Kugel, λ_1, λ_2 elliptische Kugelcoordinaten bedeuten und zur Abkürzung gesetzt ist:

$$4)\quad \begin{cases} -\Lambda_1^2 = (\alpha_0+\lambda_1)(\alpha_1+\lambda_1)(\alpha_2+\lambda_1) \\ \Lambda_2^2 = (\alpha_0+\lambda_2)(\alpha_1+\lambda_2)(\alpha_2+\lambda_2) \end{cases}$$

Um das sphärische Bogenelement unter 3) in ähnlicher Weise zu vereinfachen wie das ebene unter 1) führen wir durch die Gleichungen:

$$5)\quad \frac{d\lambda_1}{\Lambda_1} = \frac{1}{C} d\tau \quad \text{und} \quad \frac{d\lambda_2}{\Lambda_2} = \frac{1}{C} d\omega$$

wobei C eine Constante bezeichne, an Stelle von λ_1 und λ_2 zwei neue Parameter τ, ω ein. Ist dann $\varphi(\tau, \omega)$ eine vorläufig nicht näher anzugebende Function der Parameter τ und ω, so nimmt das sphärische Bogenelement, wie leicht erkannt wird, die einfache Gestalt an:

$$6)\quad d\sigma^2 = \varphi(\tau, \omega)\{d\tau^2 + d\omega^2\}$$

Lassen wir nun gegenwärtig den Punkten τ, ω der Kugeloberfläche Punkte ϑ, η der Ebene in der Weise entsprechen, dass

$$7)\quad \vartheta = \tau, \quad \eta = \omega$$

entsprechende Punkte sind, so ergiebt sich für das Verhältniss zweier entsprechender Bogenelemente nach 6) und 2):

$$8)\quad \frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\frac{\varphi}{f}} = F(\vartheta, \eta)$$

woraus man erkennt, dass unter Anwendung des Correspondenzgesetzes unter 7) die Punkte der Kugeloberfläche conform in die Ebene abgebildet werden.

Die weitere Untersuchung soll zeigen, dass dasselbe Correspondenzgesetz die sämmtlichen Punkte einer sphärischen Ellipse in eine ebene Ellipse conform abbildet.

B) Nähere Angabe der neuen Parameter τ, ω. Bestimmung ihrer Grenzen für die sphärische Ellipse.

Aus der ersten Gleichung unter 5) folgt mit Rücksicht auf 4) unmittelbar:

$$\tau = C \int \frac{d\lambda_1}{\sqrt{-(\alpha_0 + \lambda_1)(\alpha_1 + \lambda_1)(\alpha_2 + \lambda_1)}} + \text{Const}$$

und da λ_1 immer zwischen $-\alpha_1$ und $-\alpha_2$ liegt *), so darf

$$\lambda_1 = -\alpha_2 - \lambda_1'$$

gesetzt werden, wodurch τ die Gestalt annimmt:

$$\tau = -C \int \frac{d\lambda_1'}{\sqrt{\lambda_1'(a - \lambda_1')(b - \lambda_1')}} + \text{Const}$$

*) Vergl. Hesse a. a. O. S. 316.

wenn vorübergehend gesetzt wird:

$$\alpha_0 - \alpha_2 = a, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = b, \quad a > b$$

Die Substitutionen:

$$9) \quad k^2 = \frac{b}{a} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_0 - \alpha_2} \quad (\text{stets} < 1)$$

und

$$\lambda_1' = b \sin^2\varphi = (\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2\varphi$$

bringen schliesslich das Integral auf die Normalform:

$$\tau + \gamma = -\frac{2C}{\sqrt{a}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

wenn γ eine fernerweite Constante bezeichnet.

Umgekehrt ergiebt sich gegenwärtig:

$$\sin\varphi = \sin am \frac{\sqrt{a}\,(\tau + \gamma)}{-2C}$$

oder wenn für $\frac{\sqrt{a}}{-2C} = c$ gesetzt und für φ der Parameter λ_1 restituirt wird:

$$10) \quad \alpha_1 + \lambda_1 = -(\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2 am\, c(\tau + \gamma)$$

Hierbei sind c und γ vorläufig nicht weiter bestimmte Constanten.

Durch beiderseitige Addition von $\alpha_1 - \alpha_2$ resp. von $\alpha_0 - \alpha_2$ folgt rücksichtlich 9) hieraus noch leicht:

$$10') \quad \begin{cases} \alpha_1 + \lambda_1 = (\alpha_1 - \alpha_2) \cos^2 am\, c(\tau + \gamma) \\ \alpha_0 + \lambda_1 = (\alpha_0 - \alpha_2)\, \Delta^2 am\, c(\tau + \gamma) \end{cases}$$

Eine ganz entsprechende Behandlung ist der zweiten Gleichung unter 5) angemessen. Es ist nur zu beachten, dass λ_2 zwischen $-\alpha_1$ und $-\alpha_0$ enthalten ist*), woranf die successiven Substitutionen:

$$\lambda_2 = -\alpha_1 - \lambda_2'$$

$$\lambda_2' = (\alpha_0 - \alpha_1) \cos^2\varphi$$

$$11) \quad k'^2 = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_0 - \alpha_2} \quad (\text{stets} < 1)$$

sehr einfach liefern:

$$12) \quad \begin{cases} \alpha_0 + \lambda_2 = (\alpha_0 - \alpha_1) \sin^2 am\, c(\omega + \gamma') \\ \alpha_1 + \lambda_2 = -(\alpha_0 - \alpha_1) \cos^2 am\, c(\omega + \gamma') \\ \alpha_2 + \lambda_2 = -(\alpha_0 - \alpha_2)\, \Delta^2 am\, c(\omega + \gamma') \end{cases}$$

*) Hesse a. a. O. S. 316.

wo γ' eine weitere noch nicht bestimmte Constante ist. — Besonders hervorgehoben zu werden verdient, dass nach 9) und 11) die Moduln der elliptischen Functionen der Argumente τ und ω verschieden sind; ihre Quadrate ergänzen sich zur Einheit.

Was gegenwärtig die Grenzen der Parameter τ, ω innerhalb einer sphärischen Ellipse anlangt, so ist zuvörderst zu bemerken, dass für die sphärische Ellipse der Parameter λ_1 zwischen:

$$\lambda_1{}^0 = -\alpha_1 \quad \text{und} \quad \lambda_1' < -\alpha_2$$

der Parameter λ_2 dagegen innerhalb

$$\lambda_2{}^0 = -\alpha_1 \quad \text{und} \quad \lambda_2' = -\alpha_0$$

variirt *). Heissen daher τ_0 und τ_1 die neuen Randparameter, so ergiebt sich aus 10):

$$13) \quad \begin{cases} \sin^2 amc(\tau_0 + \gamma) = 1 \\ \sin^2 amc(\tau_1 + \gamma) = -\dfrac{\alpha_2 + \lambda_1'}{\alpha_1 - \alpha_2} \end{cases}$$

Kommen wir jetzt überein die kleinsten sich hieraus ergebenden Parameterwerte zu acceptiren, so folgt:

$$14) \quad \begin{cases} \tau_0 = 0 \\ \tau_1 = \dfrac{t + K}{c} \end{cases}$$

wenn $\gamma = -\dfrac{K}{c}$ gewählt wird, wo K die bekannte Jacobi'sche, und c eine vorläufig unbestimmte Constante bezeichnet; überdies aber zur Abkürzung

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \quad \sin^2\varphi = -\frac{\alpha_2 + \lambda_1'}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad k^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_0 - \alpha_2}$$

bedeutet.

In analoger Weise bekommt man aus 12):

$$\sin^2 amc(\omega_0 + \gamma') = 0$$
$$\sin^2 amc(\omega_1 + \gamma') = 1$$

wenn ω_0 und ω_1 die Randwerte des neuen Parameters ω sind; es folgt hieraus sofort:

$$15) \quad \begin{cases} \omega_0 = 0 \\ \omega_1 = 2\pi \end{cases}$$

*) Hesse a. a. O. S. 316. Formel 61.

sobald gewählt wird:

$$c = \frac{K}{2\pi}, \quad \gamma' = 0$$

C) Zurückführung des Strömungsproblems für die sphärische Ellipse auf das der ebenen Ellipse.

Die unter 14) und 15) gefundenen Grenzwerte der Parameter τ, ω lassen erkennen, dass die durch das Correspondenzgesetz 7) in der Ebene der gewöhnlichen elliptischen Coordinaten ϑ, η (den sämmtlichen Punkten der sphärischen Ellipse entsprechend) gefundenen Punkte innerhalb einer Ellipse liegen, dass somit rücksichtlich 8) die sphärische Ellipse conform abgebildet wird in eine ebene Ellipse.

Mit Rücksicht auf den von Carl Neumann, Math. Annalen Bd. 10. S. 569. bewiesenen allgemeinen Satz (vergl. II. A.) ergiebt sich gegenwärtig sofort die Lösung des Strömungsproblems für die sphärische Ellipse, da wir dieselbe für die ebene gefunden haben. Und zwar ergiebt sich für die in irgend einem Punkte der sphärischen Ellipse herrschende Spannung U der Wert:

$$\begin{aligned} U = \Sigma_k \frac{J_k}{2\pi\varkappa\varepsilon}\Big[& \lg H\left(\frac{K}{\pi}(\Omega + \Omega_k)\right) . H\left(\frac{K}{\pi}(\Omega - \Omega_k)\right) \\ & + \lg H\left(\frac{K}{\pi}(\Omega' + \Omega'_k)\right) . H\left(\frac{K}{\pi}(\Omega' - \Omega'_k)\right) \\ & + \lg \Theta\left(\frac{K}{\pi}(\Omega + \Omega'_k)\right) . \Theta\left(\frac{K}{\pi}(\Omega - \Omega'_k)\right) \\ & + \lg \Theta\left(\frac{K}{\pi}(\Omega' + \Omega_k)\right) . \Theta\left(\frac{K}{\pi}(\Omega' - \Omega_k)\right) + \text{Const} \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung allgemein gesetzt ist:

$$\omega + i\tau = \Omega, \qquad \omega - i\tau = \Omega'$$

und τ und ω nach 10) und 12) mit Rücksicht auf die Constantenbestimmungen durch die Gleichungen:

$$\alpha_0 + \lambda_1 = (\alpha_0 - \alpha_2)\Delta^2 am \frac{K}{2\pi}(\tau - 2\pi)$$

$$\alpha_0 + \lambda_2 = (\alpha_0 - \alpha_1)\sin^2 am \frac{K}{2\pi}\omega$$

mit den elliptischen Kugelcoordinaten zusammenhängen.

Ausserdem ist K das ganze elliptische Integral 1ster Gattung mit dem ω entsprechenden Modul k', dessen Wert durch 11) dargestellt wird.

XXI.

Ueber aufsteigende Kettenbrüche.

Von

Herrn **Emanuel Czuber**

in Prag.

Im Jahre 1857 veröffentlichte Prof. Alfred Kunze in Eisenach eine dankenswerte Schrift „über die aufsteigenden Kettenbrüche“ (Weimar, Böhlau), durch welche er dieselben in den mathematischen Elementarunterricht einzuführen beabsichtigte. In der Tat fanden sie nachher in der Aufgabensammlung von Dr. E. Heiss, sowie in dem „Lehrbuche der allgemeinen Arithmetik“ von Dr. C. Spitz einige Beachtung. In neuerer Zeit hat namentlich Dr. S. Günther zur Förderung ihrer Theorie beigetragen. (Man vergl. dessen Aufsatz „Ueber aufsteigende Kettenbrüche“ in Schlömilch's Zeitschr. XXI, 3, wo namentlich ihre Darstellung durch Determinanten zur Geltung kommt. Daselbst auch Litteraturnachweise.)

In den folgenden Zeilen soll eine directe Entstehungsweise der aufsteigenden Kettenbrüche gezeigt werden, aus welcher sich die wesentlichsten Eigenschaften derselben leicht herleiten lassen.

1. Die Logarithmirung des Radicals

$$R = \sqrt[\alpha_1]{\beta_1 \sqrt[\alpha_2]{\beta_2 \sqrt[\alpha_3]{\beta_3 \dots \sqrt[\alpha_n]{\beta_n}}}}$$

führt zu dem Ausdrucke

Digitized by Google

$$lR = \cfrac{l\beta_1 + \cfrac{l\beta_2 + \cfrac{l\beta_n + \dots \cfrac{l\beta_n}{a_n}}{a_3}}{a_2}}{a_1}$$

in welchem man sofort einen aufsteigenden Kettenbruch erkennt. Durch entsprechende Reduction obigen Wurzelausdruckes erhält man aber andererseits

$$R = \sqrt[a_1 a_2 a_3 \dots a_n]{\beta_1^{a_2 a_3 \dots a_n} \beta_2^{a_3 a_4 \dots a_n} \dots \beta_{n-1}^{a_n} \beta_n}$$

und daraus

$$lR = \frac{a_2 a_3 \dots a_n l\beta_1 + a_3 a_4 \dots a_n l\beta_2 + \dots + a_n l\beta_{n-1} + l\beta_n}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für lR gewonnenen Ausdrücke gelangt man zu der Gleichung:

(1)

$$\cfrac{l\beta_1 + \cfrac{l\beta_2 + \cfrac{l\beta_3 \dots \cfrac{l\beta_n}{a_n}}{a_3}}{a_2}}{a_1} = \frac{a_2 a_3 \dots a_n l\beta_1 + a_3 a_4 \dots a_n l\beta_2 + \dots + a_n l\beta_{n-1} + l\beta_n}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}.$$

Setzt man nun

$$l\beta_1 = b_1 \quad l\beta_2 = b_2 \quad l\beta_3 = b_3 \dots l\beta_n = b_n,$$

so ergibt sich nach einfacher Reduction die Gleichung

$$(2) \qquad \cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{b_3 \dots \cfrac{b_n}{a_n}}{a_3}}{a_2}}{a_1} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \frac{b_3}{a_1 a_2 a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}.$$

durch welche der aufsteigende Kettenbruch in eine äquivalente Reihe gewöhnlicher Brüche verwandelt erscheint, deren Bildungsgesetz leicht zu übersehen ist; die Zähler der aufeinanderfolgenden Glieder sind die Partialzähler der Kette, die Nenner sind Producte der Partialnenner, jedesmal vom ersten bis zu jenem, dessen Zähler eben betrachtet wird. Der aufsteigende Kettenbruch drückt also eine Division der Partialzähler durch alle unter ihnen befindlichen Partialnenner und eine nachherige Summirung der so erhaltenen Quotienten aus.

Da die Zahl der Glieder der äquivalenten Reihe mit der Zahl der Kettenglieder übereinstimmt, so wird erstere mit der letzteren zugleich unendlich und die Untersuchung der Convergenz eines un-

begrenzten aufsteigenden Kettenbruches ist zurückgeführt auf jene einer unendtichen Reihe.

2. Der Wert, welchen r Glieder der Kette vom ersten gezählt geben, wird der $r$te Näherungswert genannt; er ist ausgedrückt durch die r ersten Glieder der Reihe. Man hat demnach, wenn mit w_1 $w_2 \dots w_r$ die aufeinanderfolgenden Näherungswerte obigen Kettenbruches bezeichnet werden, nach Gleich. (1) und (2):

$$w_1 = \frac{b_1}{a_1}$$

$$w_2 = \frac{a_2 b_1 + b_2}{a_1 a_2} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2}$$

$$w_3 = \frac{a_2 a_3 b_1 + a_3 b_2 + b_3}{a_1 a_2 a_3} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \frac{b_3}{a_1 a_2 a_3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(3) \quad w_r = \frac{a_2 a_3 \dots a_r b_1 + a_3 a_4 \dots a_r b_2 + \dots + a_r b_{r-1} + b_r}{a_1 a_2 a_3 \dots a_r} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} \dots + \frac{b_r}{a_1 a_2 \dots a_r}.$$

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich leicht die recurrente Formel

$$(4) \qquad \frac{Z_r}{N_r} = \frac{a_r Z_{r-1} + b_r}{a_r N_{r-1}},$$

wenn unter $\frac{Z_{r-1}}{N_{r-1}}$ und $\frac{Z_r}{N_r}$ zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche verstanden werden.

Unter der Voraussetzung, dass sämmtliche Glieder der Kette positiv sind, wachsen die Näherungswerte, so dass

$$w_1 < w_2 < w_3 \dots < w,$$

wobei w den wahren Wert bedeutet. Auch erkennt man, dass der Unterschied zwischen dem $r-1$ten und $r$ten Näherungsbruch

$$\frac{b_r}{a_1 a_2 a_3 \dots a_r}$$

beträgt, während der Abstand des letzteren vom Totalwert durch die Summe

$$\frac{b_{r+1}}{a_1 a_2 \dots a_{r+1}} + \dots + \frac{b_n}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

ausgedrückt ist, wenn mit dem $n > r$ten Gliede die Kette schliesst.

3. Setzt man in dem allgemeinen Kettenbruche sämmtliche Zähler gleich der Einheit, so erhält man den gewöhnlichen aufsteigenden Kettenbruch und die ihm äquivalente Reihe, nämlich:

$$\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cdots\frac{1}{a_n}}{a_3}}{a_2}}{a_1}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2a_3}+\dots+\frac{1}{a_1a_2\dots a_n};$$

letztere ist in diesem Falle eine sogenannte Teilbruchreihe (nach Heis), jedes Glied derselben ist ein aliquoter Teil der vorhergehenden. Die recurrirende Näherungsbruchformel lautet jetzt

$$(5)\qquad \frac{Z_r}{N_r}=\frac{a_rZ_{r-1}+1}{a_rN_{r-1}}.$$

Für den Fall z. B., dass $a_1=1$ und die übrigen Partialnenner die natürliche Zahlenreihe bilden, ergibt sich:

$$\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1\cdots\frac{1}{n}}{3}}{2}}{1}}{1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots+\frac{1}{1.2.3\dots n}$$

Setzt man Kette und Reihe in's Unendliche fort, so convergirt letztere gegen die Zahl e, so dass

$$\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1\cdots}{3}}{2}}{1}}{1}=e,$$

wodurch die Basis des natürlichen Logarithmensystems durch einen gewöhnlichen unbegrenzten aufsteigenden Kettenbruch dargestellt erscheint. Allgemeiner erhält man:

$$\cfrac{1+\cfrac{x+\cfrac{x^2+\cfrac{x^3\cdots}{3}}{2}}{1}}{1}=e^x.$$

4. Findet bei einem Kettenbruche beständige Wiederholung einer Gruppe von Gliedern statt, so heisst er periodisch und die sich wiederholende Gruppe wird Periode genannt. Beginnt dieselbe mit dem ersten Gliede, so spricht man von einem rein periodischen Kettenbruch, fängt sie dagegen mit dem $r+1$ ten Gliede an, so hat die Kette r Vorglieder.

Digitized by Google

Die Ermittelnng des Wertes periodischer aufsteigender Kettenbrüche führt, wie sich im Folgenden zeigen wird, auf die Summirung geometrischer Progressionen.

5. Der eingliedrig-periodische Kettenbruch

$$\frac{b+\frac{b+\frac{b+\ldots\frac{b}{a}(n)}{a}}{a}}{a}$$

ist äquivalent mit der Reihe:

$$\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}+\frac{b}{a^3}+\ldots+\frac{b}{a^n};$$

wird demnach sein Wert mit w_n bezeichnet, so hat man

$$w_n=\frac{b}{a}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots+\frac{1}{a^{n-1}}\right)$$

nnd nach ausgeführter Summirnng der geometr. Progression

$$(6)\qquad w_n=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^n-1}{a^{n-1}(a-1)}$$

Es erscheint demnach der Wert der Periode $\frac{b}{a}$ mit dem Bruche $\frac{a^n-1}{a^{n-1}(a-1)}$ multiplicirt, welcher, wenn $a>1$, nnecht ist und bei wachsendem n an Grösse zunimmt. Setzt man den Kettenbruch in's Uneudliche fort und bezeichnet dann seinen Wert mit w, so ist

$$w=\lim w_n=\frac{b}{a}\cdot\lim\frac{a-\frac{1}{a^{n-1}}}{a-1}$$

$$(7)\quad \text{d. h.}\quad w=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{a-1}=\frac{b}{a-1}$$

Für den gewöhnlichen Kettenbruch, wo $b=1$, hätte man

$$w=\frac{1}{a-1}.$$

Diese Werte sind endlich, sobald $a>1$, so dass nnter dieser Bedingung jeder aufsteigende Kettenbruch von eben betrachteter Form convergent. Es stimmt dies mit der Convergenzbedingnng der geometrischen Progression überein, auf welche die Kette zurückgeführt wurde. Man hat also z. B.

$$\frac{1}{2} + {}^{\frac{1}{2} + {}^{\frac{1}{2}\cdots}} = 1,$$

$$\frac{4}{3} + {}^{\frac{4}{3} + {}^{\frac{4}{3} + \cdots}} = 2 \quad \text{u. s. w.}$$

Hätte die Periode r Vorglieder gehabt, so dass

$$w_n = \frac{b_1}{a_1} + {}^{\frac{b_2}{a_2} \cdots {}^{\frac{b_r}{a_r} + {}^{\frac{b}{a} + {}^{\frac{b}{a} \cdots {}^{\frac{b}{a}(n)}}}}} \qquad n > r$$

wäre, so führte die Reduction auf die Reihe

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{b_r}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_r} + \frac{b}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_r \cdot a}\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1}{a^{n-r-1}}\right)$$

deren Summirung

$$w_n = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{b_r}{a_1 a_2 \ldots a_r} + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r} \cdot \frac{b}{a} \; \frac{a^{n-r} - 1}{a^{n-r-1}(a-1)}$$

und

$$w = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \ldots \frac{b_r}{a_1 a_2 \ldots a_r} + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r} \cdot \frac{b}{a} \; \frac{a}{a-1}$$

ergibt. Man erkennt hier deutlich den Wert der Vorziffern und den des periodischen Anteils der. Kette, welcher letztere diesmal — gegen den früheren Fall — durch das Product aller, der ersten Periode vorangehenden Nenner dividirt erscheint.

5. Der zweigliedrig-periodische Kettenbruch

$$\frac{b_1}{a_1} + {}^{\frac{b_2}{a_2} + {}^{\frac{b_1}{a_1} + {}^{\frac{b_2}{a_2} \cdots}}}$$

führt, wenn man ihn beim $2n$ten Gliede abbricht, zu der Reihe

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \frac{b_1}{a_1 a_2 \cdot a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2 \cdot a_1 a_2} + \ldots + \frac{b_2}{(a_1 a_2)^n}.$$

Bezeichnet man ihre Summe mit w_{2n}, so ist nach entsprechender Zusammenfassung

$$w_{2n} = \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2}\right)\left\{1 + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{(a_1 a_2)^2} + \dots + \frac{1}{(a_1 a_2)^{n-1}}\right\},$$

und schreibt man für die geometr. Progression den geschlossenen Ausdruck, so wird

$$(8) \quad w_{2n} = \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2}\right) \frac{(a_1 a_2)^n - 1}{(a_1 a_2)^{n-1}(a_1 a_2 - 1)}$$

Hätte man $2n+1$ Glieder von der Kette genommen, so wäre hiezu noch $\frac{b_1}{(a_1 a_2)^n \cdot a_1}$ hinzuzufügen. Wird die Kette wieder in's Unendliche fortgesetzt, so ist dann ihr Totalwert

$$(9) \quad w = \lim w_{2n} = \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2}\right) \cdot \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 - 1};$$

Dieser ist offenbar endlich, sobald $a_1 a_2 > 1$. Wieder ist der eingeklammerte Ausdruck der Wert der Periode. Man erhält beispielsweise

$$\frac{1 + \frac{1 + \frac{1 + \frac{1 + \dots}{2}}{1}}{2}}{1} = 3.$$

6. Durch gleichen Vorgang findet man den Wert eines unbegrenzten i-gliedrig-periodischen Kettenbruches, wenn mit p kurz der Wert der Periode genannt wird,

$$(10) \quad w = p \cdot \frac{a_1 a_2 \dots a_i}{a_1 a_2 \dots a_i - 1}$$

und die Convergenz knüpft sich an die Bedingung

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_i > 1.$$

Man erkennt aus dieser Formel, dass bei einem vielgliedrig-periodischen Kettenbruche der Totalwert dem Wert der einfachen Periode sehr nahe kommen kann.

Gehen der i-gliedrigen Periode r Vorglieder $\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2} \dots \frac{\beta_r}{\alpha_r}$ voran, bezeichnet wieder p den Wert der Periode und v jenen der Vorglieder, so findet man

$$(11) \quad w = v + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_r} \cdot p \cdot \frac{a_1 a_2 \dots a_r}{a_1 a_2 \dots a - 1}$$

darin ist bekanntlich:

$$v = \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_1 \alpha_2} + \ldots + \frac{\beta_r}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}$$

$$p = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{b_i}{a_1 a_2 \ldots a_i}$$

7. Kehren wir zum Ausgangspunkt unserer Betrachtung zurück, so war der aufsteigende Kettenbruch der Logarithme einer Wurzelgrösse. Dies kann zur Entwickelung derartiger Wurzelgrössen verwendet werden.

Hat man

$$R = \sqrt[n]{a\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a \ldots}}}$$

so ist

$$lR = \cfrac{la + \cfrac{la + \cfrac{la \ldots}{n}}{n}}{n}$$

ein unbegrenzter periodischer Kettenbruch, dessen Wert mit $\frac{la}{n-1}$ gefunden wurde, so dass

$$lR = \frac{la}{n-1},$$

mithin

$$R = (e^{la})^{\frac{1}{n-1}} = a^{\frac{1}{n-1}}$$

d. h.

$$\sqrt[n]{a\sqrt[n]{a \ldots}} = \sqrt[n-1]{a}.$$

Zu dem gleichen Resultate gelangt man bekanntlich mit Hilfe der Gleichung

$$\sqrt[n]{aR} = R.$$

So ist beispielsweise

$$\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4 \ldots}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{a\sqrt{a \ldots}} = a$$

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2 \ldots}}} = 2.$$

Hätte man den Wert von

$$\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b \ldots}}}}$$

zu bestimmen, so würde sich

$$lR = \frac{la + \frac{lb + \frac{la + \frac{lb}{n} \cdots}{m}}{n}}{m}$$

als unbegrenzter, zweigliedrig-periodischer Kettenbruch ergeben, dessen Wert mit $\left(\frac{la}{m} + \frac{lb}{mn}\right)\frac{mn}{mn-1}$ gefunden wurde. Hiernach ist

$$lR = \left(\frac{la}{m} + \frac{lb}{mn}\right)\frac{mn}{mn-1}$$
$$= \frac{1}{mn-1} \cdot la^n b$$

und

$$R = (e^{la^n b})^{\frac{1}{mn-1}}$$

d. h.

$$R = \sqrt[mn-1]{a^n b},$$

derselbe Wert, der sich aus der Gleichung

$$\sqrt[m]{a\sqrt[n]{bR}} = R$$

ergeben würde.

XXII.

Théorème sur les courbes, dont les tangentes font partie d'un complexe de droites du premier ordre.

Par

M. **Paul Appell,**

Maître de Conférences à l'Ecole des Hautes-Etudes de la Sorbonne, à Paris.

„Si les tangentes d'une courbe gauche font partie d'un complexe linéaire, le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

relatif à cette courbe, est, à une facteur constant près, le carré du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

p, q, r étant trois constantes."

En effet, soit

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)$$
$$+p(zy_0-yz_0)+q(xz_0-zx_0)+r(yx_0-xy_0)=0$$

l'équation du complexe; les coordonnées des points d'une courbe, dont les tangentes appartiennent à ce complexe, satisfont à l'équation différentielle

$$(1)\qquad (qz-ry+a)dx+(rx-pz+b)dy+(py-qx+c)dz=0,$$

et aux deux autres équations suivantes, qu'on déduit par différentiation de l'équation (1),

$$(2)\qquad (qz-ry+a)d^2x+(rx-pz+b)d^2y+(py-qx+c)d^2z=0$$

$$(3)\qquad (qz-ry+a)d^3x+(rx-pz+b)d^3y+(py-qx+c)d^3z= \\ (rdy-qdz)d^2x+(pdz-rdx)d^2y+(qdx-pdy)d^2z=-D$$

Cela posé, considérons le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} qz-ry+a & rx-pz+b & py-qx+c & -(ap+bq+cr) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

et multiplions par le déterminant Δ le déterminant H écrit de la manière suivante:

$$H=\begin{vmatrix} dx & dy & dz & 0 \\ d^2x & d^2y & d^2z & 0 \\ d^3x & d^3y & d^3z & 0 \\ q & p & r & 1 \end{vmatrix}.$$

En faisant le produit $H\Delta$ par la règle connue de multiplication et en tenant compte des relations (1), (2), (3), nous avons:

$$H\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -D & 0 \\ dx & d^2x & d^3x & p \\ dy & d^2y & d^3y & q \\ dz & d^2z & d^3z & r \end{vmatrix}$$

d'où

$$H\Delta=-D\begin{vmatrix} dx & d^2x & p \\ dy & d^2y & q \\ dz & d^2z & r \end{vmatrix}=-D^2;$$

mais Δ et égal à la constante

$$ap+bq+cr;$$

donc

$$H=-\frac{D^2}{ap+bq+cr};$$

ce qu'il fallait démontrer.

XXIII.

Zweite asymptotische Linie einer Regelfläche.

Von

R. Hoppe.

§. 1. Bedingungsgleichung.

Die Gerade, deren Gleichungen

$$x = x_0 + au; \quad y = y_0 + bu; \quad z = z_0 + cu \tag{1}$$

und deren Richtungscosinus a, b, c sind, so dass der Parameter u die Strecke von $(x_0 y_0 z_0)$ bis (xyz) darstellt, erzeugt bei Variation von a, b, c, x_0, y_0, z_0 mit einem zweiten Parameter v eine Regelfläche, deren eine asymptotische Linie (d. i. Linie der Nullkrümmung des berührenden Normalschnitts) sie selbst ist. Die andere werde gesucht. Wir definiren v durch die Gleichung

$$\partial v^2 = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 \tag{2}$$

und bezeichnen durch Accente die Differentiation der von u unabhängigen Grössen nach v.

Mit Anwendung der in meiner Flächentheorie (T. LIX. N. XVII.) erklärten Bezeichnung ist nach §. 28. S. 264. die Bedingung einer asymptotischen Linie:

$$E\partial u^2 + 2F\partial u\partial v + G\partial v^2 = 0 \tag{3}$$

In unserm Falle ist

$$Et = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix} = 0$$

$$Ft = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a' & x_0' \\ b & b' & y_0' \\ c & c' & z_0' \end{vmatrix} = - K \qquad (4)$$

$$Gt = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix} = L + Mu + Nu^2 \qquad (5)$$

wo

$$L = \begin{vmatrix} a & x_0' & x_0'' \\ b & y_0' & y_0'' \\ c & z_0' & z_0'' \end{vmatrix}; \qquad N = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} a & a' & x_0'' \\ b & b' & y_0'' \\ c & c' & z_0'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a'' & x_0' \\ b & b'' & y_0' \\ c & c'' & z_0' \end{vmatrix}$$

gesetzt ist. Die Gl. (3) zerfällt wegen $E = 0$ in die beiden:

$$\partial v = 0; \quad 2F\partial u + G\partial v = 0$$

Die erste entspricht der Erzeugenden; die zweite hat in Bezug auf u die Form:

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{L + Mu + Nu^2}{2K} \qquad (6)$$

Von dieser ist bekannt, dass sie sich auf eine lineare Gleichnng 2. Ordnung reduciren lässt, ferner dass, wenn eine specielle Lösnng $u = u_0$ vorliegt, das allgemeine Integral mit der willkürlichen Constanten k in der Form

$$u = u_0 + \frac{v_2}{k + v_1} \qquad (7)$$

dargestellt wird. Führt man diesen Wert in Gl. (6) ein und erfüllt sie unabhängig von k, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial v_2}{v_2 \partial v} = \frac{M}{2K} + \frac{Nu_0}{K}; \qquad \frac{\partial v_1}{\partial v} = -\frac{Nv_2}{2K}$$

also

$$v_2 = e^{\int\left(\frac{M}{2} + Nu_0\right)\frac{\partial v}{K}}; \quad v_1 = -\tfrac{1}{2}\int \frac{N\partial v}{K} e^{\int\left(\frac{M}{2} + Nu_0\right)\frac{\partial v}{K}}$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

§. 2. Darstellung der Fläche in asymptotischen Parametern.

Der speciellen Lösung entspricht eine einzelne asymptotische Linie. Wir kehren nun das Problem um, nehmen eine beliebige Curve s_0 als Leitlinie der Bewegung der Geraden (1) und bestimmen letztere so, dass s_0 asymptotische Linie auf der erzeugten Regelfläche wird. Bekanntlich (s. Flächenth. Satz 15.) fällt die Schmiegungsebene einer krummen asymptotischen Linie mit der Berührungsebene der Fläche zusammen. Wir haben daher die Erzeugende in die Schmiegungsebene von s_0 zu legen. Bildet sie darin mit der Tangente den Winkel φ, so haben die Gl. (1) die Form

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + (f_0 \cos\varphi + f_0' \sin\varphi) u \\ y &= y_0 + (g_0 \cos\varphi + g_0' \sin\varphi) u \\ z &= z_0 + (h_0 \cos\varphi + h_0' \sin\varphi) u \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

wo f_0, g_0, h_0 die Richtungscosinus der Tangente, f_0', g_0', h_0' die der Hauptnormale von s_0 bezeichnen, also v der Krümmungswinkel von s_0 ist. Der Fall $\varphi = 0$, wo die Fläche abwickelbar ist, muss ebendeshalb ausgeschlossen werden. Bezeichnen ferner l_0, m_0, n_0 die Richtungscosinus der Binormale, ϑ_0 den Torsionswinkel von s_0, so erhält man durch Differentiation:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = f_0 \cos\varphi + f_0' \sin\varphi; \quad \text{etc.}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = f_0\{s_0' - u(1+\varphi')\sin\varphi\} + f_0' u(1+\varphi')\cos\varphi + l_0 u \vartheta_0' \sin\varphi; \quad \text{etc.}$$

Sind p, q, r die Richtungscosinus der Flächennormale, so findet man durch Determinanten aus diesen Werten:

$$pt = f_0 u \vartheta_0' \sin^2\varphi - f_0' u \vartheta_0' \sin\varphi \cos\varphi + l_0\{u(1+\varphi') - s_0' \sin\varphi\} \quad (9)$$

etc. Das ist für $u = 0$:

$$pt = -l_0 s_0' \sin\varphi; \quad \text{etc.}$$

also mit Beziehung der Vorzeichen:

$$p = \pm l_0; \quad q = \pm m_0; \quad r = \pm n_0; \quad t = \mp s_0' \sin\varphi$$

Demnach fällt bedingungslos für jedes φ die Schmiegungsebene bei s_0 in die Berührungsebene, und s_0 ist asymptotische Linie.

Hieraus folgt, dass $u = 0$ die Gl. (6) befriedigen muss. Daher ist $L = 0$, $u_0 = 0$. Die Gleichung lässt sich jetzt nach Division durch u^2 in der linearen Form

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{M}{2K}\frac{1}{u} + \frac{N}{2K} = 0$$

schreiben, und giebt so unmittelbar, wie auch aus (7) für $u_0 = 0$ erhalten wird:

$$u = \frac{v_4}{k + v_3}$$

$$v_4 = e^{\frac{1}{2}\int\frac{M\partial v}{K}}; \quad v_3 = -\tfrac{1}{2}\int\frac{N\partial v}{K}e^{\frac{1}{2}\int\frac{M\partial v}{K}} \tag{10}$$

Substituirt man diesen Wert für u in die Flächengleichungen (8), und schreibt u statt k, so werden sie:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{f_0\cos\varphi + f_0'\sin\varphi}{u + v_3}v_4 \\ y &= y_0 + \frac{g_0\cos\varphi + g_0'\sin\varphi}{u + v_3}v_4 \\ z &= z_0 + \frac{h_0\cos\varphi + h_0'\sin\varphi}{u + v_3}v_4 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Sie stellen dann für constantes v die erzeugende Gerade, für constantes u die zweite asymptotische Linie, überhaupt also eine Regelfläche in asymptotischen Parametern u, v dar. Aus der Herleitung geht hervor, dass der Ausdruck alle windschiefen Regelflächen in sich begreift.

Es bleiben noch die Werte von K, M, N anzugeben. Aus (8) findet man:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = f_0\cos\varphi + f_0'\sin\varphi$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = f_0\{s_0' - u(1+\varphi')\sin\varphi\} + f_0'u(1+\varphi')\cos\varphi + l_0u\vartheta_0'\sin\varphi$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = -f_0(1+\varphi')\sin\varphi + f_0'(1+\varphi')\cos\varphi + l_0\vartheta_0'\sin\varphi$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = {} & f_0\{s_0'' - u(1+\varphi')^2\cos\varphi - u\varphi''\sin\varphi\} \\ & + f_0'\{s_0' - u(1+\varphi')^2\sin\varphi + u\varphi''\cos\varphi - u\vartheta_0'^2\sin\varphi\} \\ & + l_0u\{\vartheta_0'(1+2\varphi')\cos\varphi + \vartheta_0''\sin\varphi\}\end{aligned}$$

Dies in dio anfänglichen Ausdrücke (3) (4) cingeführt giebt:

$$Ft = -s_0'\vartheta_0'\sin^2\varphi$$

$$Gt = \begin{vmatrix} \cos\varphi & s_0' - u(1+\varphi')\sin\varphi & s_0'' - u\varphi''\sin\varphi \\ \sin\varphi & u(1+\varphi')\cos\varphi & s_0' + u\varphi''\cos\varphi - u\vartheta_0'^2\sin\varphi \\ 0 & u\vartheta_0'\sin\varphi & u\{\vartheta_0'(1+2\varphi')\cos\varphi - \vartheta_0''\sin\varphi\} \end{vmatrix}$$

$$= u\{(s_0''\vartheta_0' - s_0'\vartheta_0'')\sin\varphi - 2s_0'\vartheta_0'(1+\varphi')\cos\varphi\}\sin\varphi$$

$$+ u^2\{[\vartheta_0''(1+\varphi') - \vartheta_0'\varphi'']\sin\varphi + [(1+\varphi')(1+2\varphi') + \vartheta_0'^2\sin^2\varphi]\cos\varphi\}$$

Demnach ist

$$K = s_0'\vartheta_0'\sin^2\varphi$$

$$M = \{s_0''\vartheta_0' - s_0'\vartheta_0'' - 2s_0'\vartheta_0'(1+\varphi')\cot\varphi\}\sin^2\varphi$$

$$N = \{\vartheta_0''(1+\varphi') - \vartheta_0'\varphi''\}\sin\varphi + \vartheta_0'\{(1+\varphi')(1+2\varphi') + \vartheta_0'^2\sin^2\varphi\}\cos\varphi$$

woraus:

$$\frac{M}{K} = \frac{s_0''}{s_0'} - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0'} - 2(1+\varphi')\cot\varphi \tag{12}$$

$$\frac{N}{K} = \frac{1}{s_0'}\left\{\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0'}\frac{1+\varphi'}{\sin\varphi} - \frac{\varphi''}{\sin\varphi} + (1+\varphi')(1+2\varphi')\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \vartheta_0'^2\cos\varphi\right\}$$

Jetzt ist nach (9)

$$v_4 = \frac{\Phi}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{s_0'}{\vartheta_0'}}, \quad \text{wo} \quad \Phi = e^{-\int\cot\varphi\,\partial v}$$

$$v_3 = -\frac{1}{2}\int\frac{\Phi\,\partial v}{\sqrt{s_0'\vartheta_0'}}\left\{\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0'}\frac{1+\varphi'}{\sin^2\varphi} - \frac{\varphi''}{\sin^2\varphi} + (1+\varphi')(1+2\varphi')\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \vartheta_0'^2\cot\varphi\right\}$$

oder

$$v_3 = \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{\vartheta_0'}{s_0}}\left\{\partial\left(\frac{\Phi}{\vartheta_0'}\frac{1+\varphi'}{\sin^2\varphi}\right) + \vartheta_0'\partial\Phi\right\}$$

Diese Werte sind in die Gl. (11) einzuführen.

Wir haben nun zunächst die Fundamentalgrössen der Fläche (11) für asymptotische Parameter zu berechnen. Für solche ist allgemein $E = 0 \quad G = 0$. Differentiirt man die Gl. (11) mit Anwendung der in (6) gefundenen Relation

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{v_4}{u+v_3} = \frac{M}{2K}\frac{v_4}{u+v_3} + \frac{N}{2K}\left(\frac{v_4}{u+v_3}\right)^2$$

so kommt:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -(f_0 \cos\varphi + f_0' \sin\varphi)\frac{v_4}{(u+v_3)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = f_0 \left\{ s_0' + \left[-(1+\varphi')\sin\varphi + \frac{M\cos\varphi}{2K}\right]\frac{v_4}{u+v_3} + \frac{N\cos\varphi}{2K}\left(\frac{v_4}{u+v_3}\right)^2 \right\}$$

$$+ f_0' \left\{ \left[(1+\varphi')\cos\varphi + \frac{M\sin\varphi}{2K}\right]\frac{v_4}{u+v_3} + \frac{N\sin\varphi}{2K}\left(\frac{v_4}{u+v_3}\right)^2 \right\}$$

$$+ l_0 \vartheta_0' \sin\varphi \frac{v_4}{u+v_3}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = f_0 \left\{ \left[(1+\varphi')\sin\varphi - \frac{M\cos\varphi}{2K}\right]\frac{v_4}{(u+v_3)^2} - \frac{N\cos\varphi}{K}\frac{v_4^2}{(u+v_3)^3} \right\}$$

$$- f_0' \left\{ \left[(1+\varphi')\cos\varphi + \frac{M\sin\varphi}{2K}\right]\frac{v_4}{(u+v_3)^2} + \frac{N\sin\varphi}{K}\frac{v_4^2}{(u+v_3)^3} \right\}$$

$$- l_0 \vartheta_0' \sin\varphi \frac{v_4}{(u+v_3)^2}$$

Hiernach ist

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \frac{v_4^2}{(u+v_3)^4}$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} =$$

$$- \left\{ s_0' \cos\varphi + \frac{M}{2K}\frac{v_4}{u+v_3} + \frac{N}{2K}\left(\frac{v_4}{u+v_3}\right)^2 \right\} \frac{v_4}{(u+v_3)^2}$$

$$g = s_0'^2 + s_0' \left[-2(1+\varphi')\sin\varphi + \frac{M\cos\varphi}{K}\right]\frac{v_4}{u+v_3}$$

$$+ \left[(1+\varphi')^2 + \vartheta_0'^2 \sin^2\varphi + \frac{M^2}{4K^2} + \frac{s_0' N \cos\varphi}{K}\right]\left(\frac{v_4}{u+v_3}\right)^2$$

$$+ \frac{MN}{2K^2}\left(\frac{v_4}{u+v_3}\right)^3 + \frac{N^2}{4K^2}\left(\frac{v_4}{u+v_3}\right)^4$$

$$Ft = -s_0' \vartheta_0' \sin^2\varphi \frac{v_4^2}{(u+v_3)^4}$$

$$t^2 = eg - f^2 = \left\{ \left[s_0' \sin\varphi - \frac{1+\varphi'}{u+v_3} v_4\right]^2 + \left(\frac{v_4 \vartheta_0' \sin\varphi}{u+v_3}\right)^2 \right\} \frac{v_4^2}{(u+v_3)^2}$$

§. 3. Fall einer linearen Differentialgleichung der Krümmungslinien.

Die Untersuchung der Krümmungslinien der Fläche, welche durch die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \pm\sqrt{\frac{g}{e}}$$

bestimmt sind, führt auf die Frage, unter welchen Bedingnngen die Grösse $\frac{g}{e}$ unabhängig von u ein Quadrat ist. Setzen wir den Fall voraus, so folgt aus dem ersten und den 2 letzten Termen von g, dass

$$\sqrt{\frac{g}{e}} = s_0' \frac{(u+v_3)^2}{v_4} + \frac{M}{2K}(u+v_3) + \frac{N}{2K}v_4$$

sein muss. Entwickelt man das Quadrat dieses Ausdrucks und identificirt auch die beiden übrigen Terme, so erhält man:

$$\frac{M}{K}(1-\cos\varphi) + 2(1+\varphi')\sin\varphi = 0$$

$$\frac{N}{K}s_0'(1-\cos\varphi) = (1+\varphi')^2 + \vartheta_0'^2\sin^2\varphi$$

und nach Einführung der Werte (12):

$$\frac{s_0''}{s_0'} - \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0'} + 2\frac{1+\varphi'}{\sin\varphi} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0'}\frac{1+\varphi'}{\sin\varphi} - \frac{\varphi''}{\sin\varphi} + (1+\varphi')(1+2\varphi')\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \vartheta_0'^2\cos\varphi =$$
$$\left\{\left(\frac{1+\varphi'}{\sin\varphi}\right)^2 + \vartheta_0'^2\right\}(1+\cos\varphi) \tag{14}$$

Die erste Gleichnng giebt integrirt:

$$\frac{\vartheta_0'}{s_0'} = \Phi_1^2 \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}, \quad \text{wo} \quad \Phi_1 = e^{\int\frac{\partial v}{\sin\varphi}} \tag{15}$$

Die zweite reducirt sich nach Division durch ϑ_0' auf

$$\left(\frac{1+\varphi'}{\vartheta_0'\sin\varphi}\right)' = -\vartheta_0'\left\{\left(\frac{1+\varphi'}{\vartheta_0'\sin\varphi}\right)^2 + 1\right\} \tag{16}$$

woraus nach zweimaliger Integration erst

$$\frac{1+\varphi'}{\vartheta_0'\sin\varphi} = -\operatorname{tg}(\vartheta_0+\varepsilon) \tag{17}$$

dann

$$\cos(\vartheta_0+\varepsilon) = \varkappa\Phi_1 \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \tag{18}$$

wo ε und $\varkappa$ constant. Eliminirt man Φ_1 zwischen beiden Gleichungen, so kommt:

$$\cos^2(\vartheta_0+\varepsilon) = \varkappa^2 \frac{\partial \vartheta_0}{\partial s_0} \tag{19}$$

Dies nochmals integrirt giebt:

$$s_0 = \varkappa^2 \operatorname{tg}(\vartheta_0+\varepsilon) \tag{20}$$

Letztere Gleichung ist unabhängig von v und φ, und drückt eine Eigenschaft der Curve s_0 aus, die ihr bei jeder Beziehung zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel durch Bestimmung der Dimensionen erteilt werden kann. Hierzu kommt die Gl. (17), die durch Bestimmung von φ zu erfüllen und auf jede Curve s_0 anwendbar ist. Daher werden durch Annahme des gegenwärtigen Falles in den Gleichungen der Fläche nur die Grössen x_0, y_0, z_0, v_4, v_3 und φ specialisirt. Die 3 ersten erhalten die Werte:

$$x_0 = \varkappa^2 \int f_0 \partial \operatorname{tg}(\vartheta_0+\varepsilon); \quad \text{etc.}$$

Ferner gehen die Ausdrücke (12) nach Gl. (13) (14) (16) (17) (19) jetzt über in

$$\frac{M}{K} = -2(1+\varphi')\cot\frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{N}{K} = \frac{\vartheta_0'}{s_0'}\left\{-\left(\frac{1+\varphi'}{\vartheta_0'\sin\varphi}\right)' + \left[\left(\frac{1+\varphi'}{\vartheta_0'\sin\varphi}\right)^2+1\right]\vartheta_0'\cos\varphi\right\}$$

$$= \frac{\vartheta_0'^2}{s_0'}\left[\left(\frac{1+\varphi'}{\vartheta_0'\sin\varphi}\right)^2+1\right](1+\cos\varphi) = \frac{\vartheta_0'^2}{s_0'}\,\frac{1+\cos\varphi}{\cos^2(\vartheta_0+\varepsilon)}$$

$$= \vartheta_0'\,\frac{1+\cos\varphi}{\varkappa^2}$$

Jetzt ergeben sich unmittelbar aus (10)

$$v_4 = \frac{1}{\varphi_1\sin^2\frac{\varphi}{2}}, \quad \text{wo} \quad \varphi_1 = e^{\int\cot\frac{\varphi}{2}\partial v}$$

$$v_3 = -\int\frac{\cot^2\frac{\varphi}{2}}{\varphi_1}\partial\vartheta_0$$

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien lautet also:

$$\pm\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\varkappa^2\vartheta_0'\varphi_1\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2(\vartheta_0+\varepsilon)}\left(u - \int\frac{\partial\vartheta_0}{\varphi_1\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}\right)^2$$

$$-\frac{1+\varphi'}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\left(u - \int\frac{\partial\vartheta_0}{\varphi_1\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}\right) + \frac{\vartheta_0'}{\varkappa^2\varphi_1\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$$

Sie hat gleich wie Gl. (6) die Form

$$\pm\frac{\partial u}{\partial v} = L_1 + M_1 u + N_1 u^2$$

sie lässt sich also auf eine lineare Gleichung 2. Ordnung reduciren. und die den einzelnen Zeichen entsprechenden allgemeinnn Lösnngen, sobald für jede eine Speciallösung $u = u_1$, $u = u_2$ bekannt ist, wie folgt darstellen:

$$u = u_1 + \frac{v_6}{\lambda + v_5}; \quad u = u_2 + \frac{v_8}{\mu + v_7} \tag{21}$$

Wenn man also eine Krümmungslinie von jeder Schar kennt, so kann man auch das System der Krümmungslinien finden und die Fläche in Parametern der Krümmungslinien λ, μ darstellen, indem man die Werte (21) einzeln in die Flächengleichungen einführt und v, das auch in u_1, u_2 gegebener Weise steckt, eliminirt. Dagegen lässt sich die Aufgabe nicht umkehren, weil die Fläche schon teilweise bestimmt ist.

§. 4. Asymptotische Wendecurve.

Wir kehren zurück zu den Gl. (8), wo u den Abstand des laufenden Punkts längs der Erzeugenden von der Leitcurve s_0 audrückt, verlegen aber den Anfang der u in den Drehpunkt der Erzeugenden, d. h. denjenigen Punkt, welcher der Consecutiven am nächsten ist. Bezeichnet R den Drehpunktsabstand, so werden die Gleichungen der Fläche:

$$x = x_0 + (f_0 \cos\varphi + f_0' \sin\varphi)(R + u); \quad \text{etc.} \tag{22}$$

Für R findet man nach bekannter Formel (Arch. LV. 102. Gl. (74)):

$$R = \frac{s_0'(1+\varphi')\sin\varphi}{P^2}, \quad \text{wo} \quad P^2 = (1+\varphi')^2 + \vartheta_0'^2\sin^2\varphi$$

Die Richtungscosinus der Normale sind bereits in Gl. (9) allgemein bestimmt; es ist nur $R+u$, und da wir bloss die Werte für $u = 0$ brauchen, nur R für u zu setzen, also im Drehpunkte

$$pt = f_0 R\vartheta_0'\sin^2\varphi - f_0' R\vartheta_0'\sin\varphi\cos\varphi + l_0\{R(1+\varphi') - s_0'\sin\varphi\}$$

oder, für R seinen Wert gesetzt,

$$pt = s_0'\sin\varphi\left\{\frac{f_0\sin\varphi - f_0'\cos\varphi}{P^2}(1+\varphi')\vartheta_0'\sin\varphi + l_0\left[\frac{(1+\varphi')^2}{P^2} - 1\right]\right\}$$

$$= \frac{s_0'\vartheta_0'\sin^2\varphi}{P^2}\{(f_0\sin\varphi - f_0'\cos\varphi)(1+\varphi') - l_0\vartheta_0'\sin\varphi\}$$

Die Quadratsumme der 3 Analogen giebt:

$$t=\frac{s_0'\vartheta_0'\sin^2\varphi}{P}$$

$$p=\frac{(f_0\sin\varphi-f_0'\cos\varphi)(1+\varphi')-l_0\vartheta_0'\sin\varphi}{P};\quad \text{etc.}$$

das ist

$$p=-\frac{1}{P}\frac{\partial(f_0\cos\varphi+f_0'\sin\varphi)}{\partial v}=-\frac{1}{P}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v};\quad \text{etc.}$$

woraus sofort:

$$F=p\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+q\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+r\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=-P$$

Um demnächst G zu finden, sind die Gl. (22) zweimal nach v zu differentiiren. Dies giebt für $u=0$:

$$\frac{\partial x}{\partial v}=f_0 s_0'-pPR+(f_0\cos\varphi+f_0'\sin\varphi)R'$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=f_0 s_0''+f_0's_0'-\frac{\partial p}{\partial v}PR-p(PR)'-pPR'+(f_0\cos\varphi+f_0'\sin\varphi)R''$$

woraus:

$$G=p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+q\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+r\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=$$

$$\frac{s_0''\sin\varphi-s_0'\cos\varphi}{P}(1+\varphi')-2\frac{(P^2R)'}{P}+3P'R$$

$$=\frac{s_0''\sin\varphi-s_0'\cos\varphi}{P}(1+\varphi')-2\frac{\{s_0'(1+\varphi')\sin\varphi\}'}{P}$$

$$+3P'\frac{s_0'(1+\varphi')\sin\varphi}{P^2}$$

$$=\frac{s_0'(1+\varphi')\sin\varphi}{P}\left\{-\frac{s_0''}{s_0'}-\frac{2\varphi''}{1+\varphi'}-(1+2\varphi')\cot\varphi+\frac{3P'}{P}\right\}$$

$$=-\frac{s_0'(1+\varphi')\sin\varphi}{P}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{s_0'(1+\varphi')^2\sin^2\varphi}{P^3}+\cot\varphi\right\}$$

Betrachten wir nun den Fall, wo die Curve $u=0$, d. i. der Ort der Drehpunkte der Erzeugenden, den wir die Wendecurve der windschiefen Regelfläche nennen, eine asymptotische Linie derselben ist, so reducirt sich die Bedingung (3) vermöge $\partial u=0$ auf $G=0$. Sie ist nach der letzten Gleichung erfüllt, wenn man setzt:

$$s_0' = \frac{p^3\Phi}{(1+\varphi')^2\sin^2\varphi} \tag{23}$$

und zwar ist dies die einzige Lösung; denn mit $1+\varphi'$ und mit $\sin\varphi$ verschwindet der Ausdruck nicht.

§. 5. Gerade Leitlinie.

Die vorigen Formeln setzen zum grossen Teil einen endlichen Krümmungsradius voraus, sind daher für den Fall einer geraden Leitlinie nicht eingerichtet. Indem wir diesen besonders betrachten, nehmen wir die Leitlinie zur Axe der z, so dass die Flächengleichungen sich auf

$$x = au; \quad y = bu; \quad z = h + cu \tag{24}$$

reduciren, wo a, b, c, h Functionen von v, bestimmt wie anfänglich, sind. Sie stimmen mit den Gl. (1) bis auf die Werte $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = h$ überein. Daher gilt noch Gl. (6), und zwar ist hier, wenn man

$$\delta = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}; \quad \varDelta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \tag{25}$$

setzt,

$$K = h'\delta; \quad L = 0; \quad M = h''\delta - h'\delta'; \quad N = \varDelta \tag{26}$$

Gl. (6) geht dann über in

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\delta}{h'}\left(\frac{h'}{\delta'}\right)'\frac{u}{2} + \frac{\varDelta}{h'\delta}\frac{u^2}{2} \tag{27}$$

das ist nach Multiplication mit $\frac{1}{u^2}\sqrt{\frac{h'}{\delta}}$:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{u}\sqrt{\frac{h'}{\delta}}\right) + \frac{\varDelta}{2\delta\sqrt{h'\delta}} = 0$$

und giebt nach Integration:

$$u = \frac{v_4}{k + v_3}$$

wo

$$v_4 = \sqrt{\frac{h'}{\delta}}; \quad v_3 = -\tfrac{1}{2}\int\frac{\varDelta\,\partial v}{\delta\sqrt{h'\delta}} \tag{28}$$

Führt man den Wert von u in (24) ein, und schreibt u für k, so sind

$$x = \frac{av_4}{u+v_3}; \quad y = \frac{bv_4}{u+v_3}; \quad z = h + \frac{cv_4}{u+v_3} \tag{29}$$

die Gleichungen der Fläche in asymptotischen Parametern u, v.

Die Leitlinie ist als Gerade, wie auch aus $L = 0$ folgt, asymptotische Linie. Sie entspricht $u = \infty$.

Die Untersuchung der in §. 3. behandelten Frage führt, obgleich der Weg ein ganz verschiedener sein muss, ebenfalls zur vollständigen Integration der Bedingungsgleichungen für ein rationales $\sqrt{\frac{g}{e}}$. Das Resultat ist jedoch, dass allein ein Rotationshyperboloid den Bedingungen genügt. Da die Frage nur hinsichtlich der Krümmungslinien Interesse hat, so würde es nutzlos sein, diese keinen neuen Aufschluss bietende Rechnung durchzuführen. Fragt man, auf welchen Umständen es beruht, dass das ungleichaxige Hyperboloid, ohne den in Rede stehenden Bedingungen zu genügen, doch die Integration der Gleichung der Krümmungslinien zulässt, so zeigt sich, dass zwar hier das Verhältniss $\sqrt{\frac{g}{e}}$ nicht rational wird, dass aber darin die Functionen von u und von v gesondert erscheinen, so dass sich in der Differentialgleichung sofort die beiden Variabeln scheiden. Der gleiche Fall kann nicht wol bei andern Regelflächen von gerader Leitlinie statthaben, da durch 3 disponibele Functionen 4 Bedingungsgleichungen zu erfüllen sein würden.

Betrachten wir noch die Wendecurve, so ist zunächst der Drehpunktsabstand der Erzeugenden (24)

$$u = -c'h' \tag{30}$$

daher die Gleichungen der Wendecurve:

$$x = -ac'h'\,; \quad y = -bc'h'\,; \quad z = h - cc'h'$$

Damit die Wendecurve asymptotische Linie sei, muss der Wert (30) die Gl. (27) befriedigen. Es muss also sein

$$2(c'h')' = c'\delta\left(\frac{h'}{\delta}\right)' - \frac{\varDelta}{\delta}c'^2h'$$

oder

$$c'h'' + \left(2c'' + c'\frac{\delta' + \varDelta c'}{\delta}\right)h' = 0$$

Dies integrirt ergiebt:

$$h' = \frac{T}{c'^2\delta}$$

wo

$$T = e^{-\int\frac{\varDelta\partial c}{\delta}}$$

Man kann also die Richtung der Erzeugenden beliebig variiren lassen und h stets so bestimmen, dass die Wendecurve asymptotisch wird. Führt man jetzt für h überall T ein, so wird

$$\frac{\varDelta \partial c}{\delta} = -\frac{\partial T}{T}; \quad \sqrt{h'\delta} = \frac{\sqrt{T}}{c'}; \quad \sqrt{\frac{h'}{\delta}} = \frac{\sqrt{T}}{c'\delta}$$

also

$$\frac{\varDelta \partial v}{\delta \sqrt{h'\delta}} = -T^{-\frac{3}{2}} \partial T$$

und nach (28)

$$v_4 = \frac{\sqrt{T}}{c'\delta}; \quad v_3 = -\frac{1}{\sqrt{T}}$$

Die Gleichungen der Fläche in asymptotischen Parametern lauten nun:

$$x = \frac{a}{\delta} \frac{T}{u\sqrt{T}-1}; \quad y = \frac{b}{\delta} \frac{T}{u\sqrt{T}-1}; \quad z = \int \frac{T\partial v}{c'^2\delta} + \frac{c}{\delta} \frac{T}{u\sqrt{T}-1}$$

Die Werte

$$u = \infty; \quad u = \frac{1-c'}{\sqrt{T}}$$

entsprechen der Leitlinie und der Wendecurve.

Sei zu weiterer Reduction

$$a = \sin\varkappa \sin\mu; \quad b = \sin\varkappa \cos\mu; \quad c = \cos\varkappa$$

dann findet man:

$$\delta = -\mu' \sin^2\varkappa$$
$$\varDelta = (\varkappa''\mu' - \varkappa'\mu'')\sin\varkappa - (2\varkappa'^2 + \mu'^2 \sin^2\varkappa)\mu' \cos\varkappa$$

Nun ist zufolge der Gl. (2)

$$1 = \varkappa'^2 + \mu'^2 \sin^2\varkappa$$

Zerlegt man diese Gleichung in

$$\varkappa' = \cos\lambda; \quad \mu' = \frac{\sin\lambda}{\sin\varkappa}$$

so wird

$$\delta = -\sin\varkappa \sin\lambda; \quad \varDelta = -\lambda' - \cot\varkappa \sin\lambda$$
$$\frac{\varDelta \partial c}{\delta} = -\cot\lambda\, \partial\lambda - \cot\varkappa\, \partial\varkappa$$

folglich nach Integration

$$T = A \sin\varkappa \sin\lambda \quad (A \text{ constant})$$
$$\frac{T}{\delta} \frac{\partial v}{c'^2} = -\frac{A\partial\varkappa}{\sin^2\varkappa \cos^3\lambda}$$

und die Gleichungen der Fläche gehen über in

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A \sin\varkappa \sin\mu}{1 - u\sqrt{A \sin\varkappa \sin\lambda}}; \quad y = \frac{A \sin\varkappa \cos\mu}{1 - u\sqrt{A \sin\varkappa \sin\lambda}} \\ z &= A \int \frac{\partial \cot\varkappa}{\cos^3\lambda} + \frac{A \cos\varkappa}{1 - u\sqrt{A \sin\varkappa \sin\lambda}} \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

wo

$$\mu = \int \frac{\operatorname{tg}\lambda\,\partial\varkappa}{\sin\varkappa}$$

Die Relation zwischen $\varkappa$ und λ bleibt so in ihrer Allgemeinheit bestehen; man kann $\varkappa$ oder λ als zweiten Parameter betrachten. Bei Veränderung der Constanten in den Integralen μ und h bleibt sich die Fläche congruent, bei der von A ähnlich.

Die Resultate, um sie zusammenzustellen, sind folgende.

1. Für eine gegebene Regelfläche wird die zweite asymptotische Linie durch eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung bestimmt, die im allgemein nicht integrabel ist. Gl. (6).

2. Der umfassende Ausdruck aller Regelflächen in asymptotischen Parametern, ergänzt durch singuläre Bestimmung in speciellem Falle, lässt sich aufstellen, indem man die Erzeugende an einer beliebigen Curve unter beliebigem Winkel gegen deren Tangente in ihrer Schmiegungsebene gleiten lässt. Gl. (11).

3. Der genannte Winkel und die Dimensionen der Leitlinie lassen sich, während die inneren Beziehungen der letzteren willkürlich bleiben, so bestimmen, dass die Krümmungslinien durch eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung ausgedrückt werden. Gl. (18) (20).

4. Durch blosse Bestimmung der Dimensionen der Leitlinie kann man die Wendecurve zur asymptotischen Linie machen. Gl. (23).

5. Für den Fall einer geraden Leitlinie erhalten die bezeichneten Aufgaben ihre besondere Lösung in abweichender Form. Gl. (29) (31).

XXIV.

Beiträge zur Theorie des Dreiecks.

Von

Emil Hain.

I.

Wenn von einem Punkte P der Peripherie des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises auf die BC Senkrechte gefällt werden, welche die BC in A_p treffen; so liegen die Fusspunkte A_p in einer Geraden. Es soll die Gleichung derselben in trimetrischen Coordinaten angegeben werden.

Es sei $P \equiv p_a$, dann ist $\Sigma a p_b p_c = 0$.

Ferner gibt die Figur als Seitennormalen von A_p:

$$\begin{array}{lll} A_p \equiv 0 & p_b + p_a \cos\gamma & p_c + p_a \cos\beta \\ B_p \equiv p_a + p_b \cos\gamma & 0 & p_c + p_b \cos\alpha \\ C_p \equiv p_a + p_c \cos\beta & p_b + p_c \cos\alpha & 0 \end{array}$$

Setzen wir:

$$p_a + p_b \cos\gamma = a_b, \quad p_a + p_c \cos\beta = a_c$$

so haben wir:

$$a b_a c_a . \Sigma a p_b p_c = a b_a c_a [c p_b (p_a + p_c \cos\beta) + b p_c (p_a + p_b \cos\gamma)]$$
$$= a b_a c_a (c p_b a_c + b p_c a_b) = b c p_a b_c c_b . 0 + c a p_b c_a a_c . b_a + a b p_c a_b b_a . c_a$$

Folglich liegt wegen $\Sigma a p_b p_c = 0$ der Punkt $A_p \equiv 0 \; b_a c_a$ in der Geraden:

$$b c p_a b_c c_b \quad c a p_b c_a a_c \quad a b p_c a_b b_a$$

Sonach liegen die A_p in der Geraden:

$$b c p_a b_c c_b \equiv b c p_a (p_b + p_c \cos\alpha)(p_c + p_b \cos\alpha).$$

II.

Die Schnittpunkte der Winkeldreiteilungslinien eines Dreiecks mit dessen Seiten liegen auf einer Ellipse.

Um diesen Satz zu beweisen, bezeichnen wir mit A_b, A_c solche Punkte der BC des Dreiecks ABC, welche der Reihe nach liegen:

$$B \quad A_b \quad A_c \quad C$$

so dass:

$$\text{Wkl. } BAA_b = A_bAA_c = A_cAC = \frac{\alpha}{3}$$

wo

$$BAC = \alpha.$$

Ziehen wir hierauf von A_b Senkrechte auf AC und AB, so sind die Seitennormalen von A_b:

$$0 \quad AA_b \sin\frac{2\alpha}{3} \quad AA_b \sin\frac{\alpha}{3}$$

Sonach sind die Coordinaten der Punkte A_b, A_c:

$$A_b \equiv 0 \quad \sin\frac{2\alpha}{3} \quad \sin\frac{\alpha}{3}$$

$$A_c \equiv 0 \quad \sin\frac{\alpha}{3} \quad \sin\frac{2\alpha}{3}$$

oder

$$A_b = 0 \quad 2\cos\frac{\alpha}{3} \quad 1$$

$$A_c \equiv 0 \quad 1 \quad 2\cos\frac{\alpha}{3}$$

Nehmen wir nun an, die A_bA_c liegen auf dem Kegelschnitt:

$$\Sigma g_{aa}x_a^2 + 2\Sigma g_{bc}x_bx_c = 0$$

Setzen wir die Coordinatenwerte der A_b ein, so erhalten wir:

$$4g_{bb}\cos\frac{\alpha^2}{3} + g_{cc} + 4g_{bc}\cos\frac{\alpha}{3} = 0$$

$$g_{bb} + 4g_{cc}\cos\frac{\alpha^2}{3} + 4g_{bc}\cos\frac{\alpha}{3} = 0$$

Die Subtraction beider Gleichungen ergibt:

$$g_{bb} = g_{cc}$$

Sonach ist:

$$\frac{2g_{bc}}{g_{bb}} = -\frac{1+4\cos\frac{\alpha^2}{3}}{2\cos\frac{\alpha}{3}}$$

Da die g_{aa} einander gleich sind, so muss g_{aa} eine symmetrische Function der α sein. Wir können also setzen:

$$g_{aa} = 2\cos\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\beta}{3}\cos\frac{\gamma}{3}$$

$$2g_{bc} = -\left(1+4\cos^2\frac{\alpha}{3}\right)\cos\frac{\beta}{3}\cos\frac{\gamma}{3}$$

Diese Form des Kegelschnittes wird durch Einsetzen der übrigen Coordinatenwerte bestätigt, die Bestimmung desselben als Ellipse gibt die Figur.

III.

P sei ein Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC. Die PA treffen den Umkreis in A_1. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ zu bestimmen.

Wir bezeichnen:

$$P \equiv p_a \; p_b \; p_c$$
$$A_1 \equiv \xi_{aa}\,\xi_{ab}\,\xi_{ac}$$

Wegen $PA \equiv 0, \; -p_c, \; +p_b$ und der Umkreisgleichung $\Sigma a x_b x_c = 0$ haben wir:

$$-p_c\,\xi_{ab} + p_b\,\xi_{ac} = 0$$
$$\Sigma a\,\xi_{ab}\,\xi_{ac} = 0$$

Die Elimination gibt:

$$\frac{\xi_{aa}}{\xi_{ab}} = -\frac{a p_c}{b p_c + c p_b} = \frac{-a p_b p_c}{p_b(b p_c + c p_b)}$$

$$\frac{\xi_{aa}}{\xi_{ac}} = -\frac{a p_b}{b p_c + c p_b} = \frac{-a p_b p_c}{p_c(b p_c + c p_b)}$$

$$A_1 \equiv -a p_b p_c, \quad +p_b(b p_c + c p_b), \quad +p_c(b p_c + c p_b)$$

Um die Seitennormalen zu finden, muss man die Coordinaten mit λ_a multipliciren, man findet:

$$\lambda_a = \frac{2F}{p_b p_c(b^2+c^2-a^2) + bc(p_b^2+p_c^2)}$$

Nun ist:

$$\text{Dreieck } A_1B_1C_1 = \frac{abc\,\Pi\lambda_a}{8F^2}\begin{vmatrix} \xi_{aa} & \xi_{ab} & \xi_{ac} \\ \xi_{ba} & \xi_{bb} & \xi_{bc} \\ \xi_{ca} & \xi_{cb} & \xi_{cc} \end{vmatrix}$$

Nach Entwicklung der Determinante bekommen wir:

$$A_1B_1C_1 = \frac{abc\,F[\Sigma a^3p_b^3p_c^3 + 3\Pi p_a\,\Sigma a^2p_bp_c(bp_c + cp_b) + 6\,\Pi a p_a^2]}{\Pi[p_bp_c(b^2+c^2-a^2) + bc(p_b^2+p_c^2)]}$$

$$= \frac{abc\,F(\Sigma a p_b p_c)^3}{\Pi[p_bp_c(b^2+c^2-a^2) + bc(p_b^2+p_c^2)]}$$

Demnach liegen alle P, für welche $\triangle A_1B_1C_1 = \text{const.}$, auf einer Curve 6. Grades.

Für $p_a = a$ wird

$$A_1B_1C_1 = 27F\,\Pi\frac{a^2}{2b^2+2c^2-a^2} = \frac{27}{64}F.\,\Pi\frac{a^2}{s_a^2}$$

$$2b^2+2c^2-a^2 = 4s_a^2$$

Für $p_a = 1$ bekommen wir:

$$A_1B_1C_1 = \frac{abc\,s}{8F} = \frac{r\,s}{2}$$

wo r den Umkreisradius und s den halben Umfang bezeichnet.

Eine einfache Umwandlung gibt ferner:

$$A_1B_1C_1 = \frac{(\Sigma a p_b p_c)^3}{4r\,\Pi(p_b^2+p_c^2+2p_bp_c\cos\alpha)}$$

Für $P \equiv U \equiv \cos\alpha$ wird:

$$\Sigma a p_b p_c = \Sigma a\cos\beta\cos\gamma = \frac{F}{r}$$

$$p_b^2+p_c^2+2p_bp_c\cos\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\,\Pi\cos\alpha = \sin^2\alpha = \frac{a^2}{4r^2}$$

also $A_1B_1C_1 = F$, was sich auch leicht anders ergibt; man hat nämlich:

$$A_1B_1C_1 = \Sigma B_1UC_1 = \frac{\Sigma r^2\sin 2\alpha}{2} = F$$

Für $P \equiv H \equiv \cos\beta\cos\gamma$ erhalten wir ähnlich:

$$A_1B_1C_1 = 8F\,\Pi\cos\alpha.$$

IV.

$P \equiv p_a$ treffe BC in P_a. Es ist die Gleichung der Harmonikalen des Punktes $Q \equiv q_a$ in Bezug auf das Dreieck der P_a zu bilden.

Wir haben:

$$P_a \equiv 0 \qquad p_b \qquad p_c$$
$$P_b P_c \equiv -p_b p_c \quad + p_c p_a \quad + p_a p_b$$

Nach Greiner (Archiv LIX 351) ist die Harmonikale des Punktes Q in Bezug auf das Dreieck:

$$\Sigma a_1 x_a = \Sigma a_2 x_a = \Sigma a_3 x_a = 0$$

die Gerade:

$$\Sigma(a_1 \Sigma a_2 q_a \Sigma a_3 q_a)$$

Für unsern Fall gibt die Rechnung als Harmonikale des Punktes Q in Bezug auf das Dreieck $P_a P_b P_c$ die Gerade:

$$(p_b p_c (q_a' q_b' + q_a' q_c' - q_b' q_c') = p_b p_c (\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma)$$

wo

$$q_a' = -p_b p_c q_a + p_c p_a q_b + p_a p_b q_c$$
$$\alpha = p_b p_c q_a$$

Specielle Folgerungen dieses Resultates sind z. B.

Die Harmonikale eines Punktes P bezogen auf das Dreieck der P_a fällt mit der Harmonikalen von P in Bezug auf das Urdreieck zusammen.

Die Harmonikale des Punktes Q in Bezug auf das Dreieck $J_a J_b J_c$ wo J das Inkreiscentrum des Urdreiecks bezeichnet) ist die Gerade:

$$q_b^2 + q_c^2 - 3q_a^2 + 2q_a q_b + 2q_a q_c - 2q_b q_c$$

Die Harmonikale des Inkreiscentrums in Bezug auf das Mittendreieck des Urdreiecks ist die Gerade:

$$a(b^2 + c^2 - 3a^2 + 2ab + 2ac - 2bc)$$

Trifft P die BC in P_a, so bilden die Harmonikalen der A in Bezug auf das Dreieck $P_a P_b P_c$ ein Dreieck von der Fläche:

$$\frac{4F\Pi a p_a}{\Pi(2a p_a + b p_b + c p_c)}$$

V.

Gegeben sind die Punkte $P \equiv p_a$, $Q \equiv q_a$. Es ist zu construiren der Punkt:

$$p_a(-p_b p_c q_a + p_c p_a q_b + p_a p_b q_c)$$

Die Harmonikale von P in Bezug auf das Urdreieck treffe QP_a in A_1. Dann ist:

$$\begin{array}{rll} P_a \equiv 0 & +p_b & +p_c \\ QP_a \equiv p_b q_c - p_c q_b & +p_c q_a & -p_b q_a \\ A_1 \equiv 2 p_a p_b p_c q_a & -p_b q_b' & -p_c q_c' \\ q_a' \equiv -p_b p_c q_a & +p_c p_a q_b & +p_a p_b q_c' \\ AA_1 \equiv 0 & -p_c q_c' & +p_b q_b' \end{array}$$

Die Gerade AA_1 trifft BC in

$$R_a \equiv 0 \quad +p_b q_b' \quad +p_c q_c'$$

Sonach treffen sich die AR_a im Punkte $R \equiv p_a q_a'$.

Die Construction von R ist also folgende:

Man verlängere PA, bis sie die BC in P_a trifft, und construire die Harmonikale von P in Bezug auf das Dreieck ABC. Diese Gerade wird von der QP_a in A_1 getroffen. Die AA_1 schneiden sich in R.

Wenn wir AQ verlängern, bis die BC in Q_a getroffen wird, und den zu Q in Bezug auf AQ_a harmonischen Punkt Q_a' bestimmen, so treffen sich die $P_a Q_a'$ im Punkte

$$R' \equiv q_a(-p_b p_c q_a + p_c p_a q_b + p_a p_b q_c)$$

Es ist nämlich:

$$\begin{array}{rll} Q \equiv +q_a & +q_b & +q_c \\ Q_a \equiv 0 & +q_b & +q_c \\ Q_a' \equiv -q_a & +q_b & +q_c \\ P_a Q_a' \equiv p_b q_c - p_c q_b & -q_a p_c & +q_a p_b \end{array}$$

VI.

Der Ort der Punkte, deren Umkreispolaren parallel ihren Harmonikalen in Bezug auf das Urdreieck sind, ist eine Curve 3. Grades, welche durch die Ecken, Seitenmitten, Schwerpunkt, Grebe'schen Punkt, In- und Umkreiscentrum des Urdreieckes geht.

Die Umkreispolare und die Harmonikale des Punktes x_a sind die Geraden: $bx_c + cx_b$, $x_b x_c$. Sie sind parallel, wenn

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ bx_c+cx_b & cx_a+ax_c & ax_b+bx_a \\ x_b x_c & x_c x_a & x_a x_b \end{vmatrix} = 0$$

Für ABC verschwindet die 3. Zeile. Die Coordinaten der Seitenmitten machen je zwei Colonnen gleich. Für $x_a = 1$ erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Die Coordinaten des Grebe'schen Punktes $G \equiv a$ machen die 2. und 3., die des Schwerpunktes die 3. und 1., die des Umkreiscentrums die 1. und 2. Zeile gleich.

VII.

Ist $P \equiv p_a$ gegeben, so wird der Punkt $Q \equiv a p_a^2$ auf folgende Weise construirt:

AP trifft BC in P_a. Π_a sei der zu P_a bezüglich BC harmonische Punkt, M_a die Mitte von $P_a \Pi_a$. N_a trenne M_a harmonisch von BC. Die AN_a schneiden sich in Q.

Es ist nämlich:

$$P_a \equiv 0 \quad +p_b \quad +p_c$$
$$\Pi_a \equiv 0 \quad +p_b \quad -p_c$$

Die Seitennormalen dieser Punkte sind:

$$P_a \equiv 0 \quad \frac{2Fp_b}{bp_b+cp} \quad \frac{2Fp_c}{bp_c+cp_c}$$

$$\Pi_a \equiv 0 \quad \frac{2Fp_b}{bp_b-cp_c} \quad \frac{-2Fp_c}{bp_b-cp_c}$$

Sonach ist:

$$M_a \equiv 0 \quad bp_b^2 \quad -cp_c^2$$

Es hat also M_a dieselbe Form für $Q \equiv ap_a^2$, wie Π_a für $P \equiv p_a$. Somit treffen sich die AN_a in Q.

VIII.

Trifft PA die BC in P_a und ist P_a' der zu P in Bezug auf AP_a, Π_a der zu P_a in Bezug auf BC vierte harmonische Punkt; so bilden die $\Pi_a P_a'$ ein Dreieck, dessen Flächeninhalt ausgedrückt wird durch

Digitized by Google

$$\frac{16 F \Pi a p_a}{\Pi(3ap_a - bp_b - cp_c)}$$

Wir haben:

$$\begin{array}{lll} P_a' \equiv -p_a & +p_b & +p_c \\ \Pi_a \equiv 0 & +p_b & -p_c \\ \Pi_a P_a' \equiv +2p_b p_c & +p_c p_a & +p_a p_b \end{array}$$

Das von 3 Geraden a_1 a_2 a_3 gebildete Dreieck hat die Fläche:

$$\frac{abcF\Delta^2}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Hier ist

$$\Delta = 4\Pi p_a^2, \quad \Delta_1 = (3ap_a - bp_b - cp_c)\Pi p_a.$$

IX.

Zwei Gerade a_1 a_2 treffen BC in A_1 A_2. Die B_1 C_2, B_2 C_1 schneiden sich in Punkten A_3 der Geraden: $a_1 a_2(b_1 c_2 + b_2 c_1)$.

Es ist:

$$\begin{array}{lll} A_1 \equiv 0 & +c_1 & -b_1 \\ A_2 \equiv 0 & +c_2 & -b_2 \\ B_1 C_2 \equiv a_1 a_2 & a_1 b_2 & a_2 c_1 \\ B_2 C_1 \equiv a_1 a_2 & a_2 b_1 & a_1 c_2 \end{array}$$

$$A_3 \equiv b_1 c_1 a_2^2 - b_2 c_2 a_1^2, \quad a_1 a_2(a_1 c_1 - a_2 c_1) \quad a_1 a_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Die Rechnung zeigt, dass die A_3 in der Geraden $a_1 a_2(b_1 c_2 + b_2 c_1)$ liegen.

X.

PA, QA treffen die BC in P_a, Q_a. Dann schneiden sich die PQ_a, QP_a in A_1 und die AA_1 in

$$R \equiv (p_a q_b + p_b q_a)(p_a q_c + p_c q_a)$$

für $P \equiv p_a$, $Q \equiv q_a$.

Wir haben:

$$\begin{array}{lll} PQ_a \equiv p_b q_c - p_c q_b & -p_a q_c & +p_a q_b \\ QP_a \equiv p_b q_c - p_c q_b & +p_c q_a & -p_b q_a \end{array}$$

$$A_1 \equiv p_a q_a \quad p_a q_b + p_b q_a \qquad p_a q_c + p_c q_a$$
$$AA_1 \equiv 0 \quad +(p_a q_c + p_c q_a) \qquad -(p_a q_b + p_b q_a)$$
$$\equiv 0 \quad +(p_a q_c + p_c q_a)(p_b q_c + p_c q_b) \quad -(p_a q_b + p_b q_a)(p_b q_c + p_c q_b)$$

XI.

Trifft PA die BC in P_a und sind A', A'' die Mitten von BC, PA; so schneiden sich die $A'A''$ in einem Punkt.

Die Seitennormalen der Punkte A und P_a sind:

$$A \equiv \frac{2F}{a} \qquad 0 \qquad 0$$
$$P_a \equiv 0 \qquad \frac{2Fp_b}{bp_b + cp_c} \qquad \frac{2Fp_c}{bp_b + cp_c}$$

folglich ist:

$$A'' \equiv \frac{F}{a}. \qquad \frac{Fp_b}{bp_b + cp_c} \qquad \frac{Fp_c}{bp_b + cp_c}$$
$$\equiv bp_b + cp_c \qquad ap_b \qquad ap_c$$

Die Mitte von BC hat die Coordinaten: $0\ c\ b$. Sonach ist:

$$A'A'' \equiv a(bp_b - cp_c) \quad -b(bp_b + cp_c) \quad +c(bp_b + cp_c)$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} +a(bp_b - cp_c) & -b(bp_b + cp_c) & +c(bp_b + cp_c) \\ +a(cp_c + ap_a) & +b(cp_c - ap_a) & -c(cp_c + ap_a) \\ -a(ap_a + bp_b) & +b(ap_a + bp_b) & +c(ap_a - bp_b) \end{vmatrix}$$

verschwindet; denn addirt man zur ersten Reihe die beiden übrigen, so werden die einzelnen Glieder Null. Sonach treffen sich die AA' in einem Punkte $Q = p_a(bp_b + cp_c)$.

Nimmt man statt P den reciproken Punkt $p_b p_c$, so wird $Q \equiv bp_c + cp_b$ gleich dem reciproken Punkte des harmonischen Poles der Umkreispolare von $P \equiv p_a$.

XII.

Die in den Ecken eines Dreiecks auf die Seiten desselben errichteten Normalen bilden abwechselnd zwei flächengleiche Dreiecke.

Die Normale des Punktes $X \equiv \xi_a$ auf die Gerade a_1 hat die Form:

$$\begin{vmatrix} \xi_b & u_b \\ \xi_c & u_c \end{vmatrix}$$

wo $u_a = a_1 - b_1 \cos\gamma - c_1 \cos\beta$.

Ist BB_a die Senkrechte in B auf BC, so ist:

$$\begin{aligned} BB_a &\equiv \cos\beta & 0 && 1 \\ CC_b &\equiv 1 & \cos\gamma && 0 \\ AA_c &\equiv 0 & 1 && \cos\alpha \end{aligned}$$

Diese drei Geraden bilden ein Dreieck von der Fläche

$$\Phi = \frac{abc F \Delta^2}{\Delta_a \Delta_b \Delta_c}$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\beta & 0 & 1 \\ 1 & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 1 & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1 + \Pi \cos\alpha$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 1 & \cos a \end{vmatrix} = \frac{aF}{rb}$$

$$r = \frac{abc}{4F}$$

Demnach ist

$$\Phi = \frac{abc(1 + \Pi\cos\alpha)^2 r^3}{F^2}$$

Dieser Ausdruck ist symmetrisch für das Urdreieck und beweist sonach die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung.

XIII.

Die auf den Ecktransversalen eines Punktes in demselben errichteten Normalen treffen die Gegenseiten des Urdreieckes in Punkten einer Geraden.

Die Normale des Punktes ξ_a auf die Gerade a_1 ist die Gerade $\xi_b u_c - \xi_c u_b$, wo $u_a = a_1 - b_1 \cos\gamma - c_1 \cos\beta$. Für $PA \equiv 0\ p_c - p_b$ wird:

$$\begin{aligned} u_a &= p_b \cos\beta - p_c \cos\gamma \\ u_b &= p_c + p_b \cos\alpha \\ u_c &= -(p_b + p_c \cos\alpha) \end{aligned}$$

Die Normale in P auf PA treffe BC in A_1. Dann ist:

$$\begin{aligned} PA_1 &\equiv -(p_b^2 + 2 p_b p_c \cos\alpha + p_c^2) \quad +\gamma' \quad +\beta' \\ A_1 &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +\beta' \quad -\gamma' \\ \alpha' &= p_b p_c + p_a(-p_a \cos\alpha + p_b \cos\beta + p_c \cos\gamma) \end{aligned}$$

Sonach liegen die A_1 in der Geraden $\beta'\gamma'$. Ihr harmonischer Pol in Bezug auf das Urdreieck ist der Punkt α'.

Digitized by Google

XIV.

Trifft PA die BC in P_a, QP_a die P_bP_c in A_1; so schneiden sich die AA_1 in $Q \equiv a q_b' q_c'$, wenn

$$q_a' = -p_b p_c q_a + p_c p_a q_b + p_a p_b q_c$$

$$P \equiv p_a, \quad Q \equiv q_a$$

Es ist:

$$\begin{array}{rll} P_bP_c \equiv -p_b p_c & +p_c p_a & +p_a p_b \\ QP_a \equiv p_c q_b - p_b q_c & -p_c q_a & +p_b q_a \\ A_1 \equiv 2 p_a p_c q_a & +p_b q_c' & +p_c q_b' \\ AA_1 \equiv 0 & +p_c q_b' & -p_b q_c' \\ \equiv 0 & +q_a' q_b' p_c & -q_a' q_c' p_b. \end{array}$$

XV.

Es sind die Coordinaten des zu Z bezüglich der Strecke XY zugeordneten harmonischen Punktes zu bestimmen.

Gegeben: $X \equiv x_a$, $Y \equiv y_a$, $Z \equiv z_a$. $T \equiv t_a$ sei der zu bestimmende Punkt.

Es sei XY durch Z im Verhältnisse $m:n$ geteilt, so dass

$$XZ : ZY = m : n$$

Dann ist:

$$(z_a) = \frac{m(y_a) + n(x_a)}{m+n}$$

wo (x_a) die Seitennormalen bezeichnen. Setzen wir:

$$\xi = \Sigma a a_a, \quad \eta = \Sigma a x_a, \quad \zeta = \Sigma a z_a, \quad t = \Sigma a t_a$$

so haben wir ferner:

$$\frac{\xi_a}{\xi} = \frac{m y_a \xi + a x_a \eta}{(m+n)\xi\eta}$$

Nun ist:

$$XT : TY = m : -n$$

$$\frac{t_a}{\tau} = \frac{m y_a \xi - n x_a \eta}{(m-n)\xi\eta}$$

Die Elimination von m und n giebt:

$$t_a = \frac{z_a(x_a\eta + y_a\xi) - 2x_a y_a \xi}{\xi(\xi y_a + \eta x_a) - 2\xi\eta z_a}.$$

XVI.

Trifft eine Gerade die Seiten BC in A_1, so liegen die Mitten der AA_1 auf einer Geraden. Durch Projection erhalten wir den allgemeineren Satz:

Trifft eine Gerade die Seiten BC in A_1 und liegen auf den AA_1 drei Punkte A_2 in gerader Linie; so liegen die den A_2 bezüglich AA_1 harmonisch zugeordneten Punkte auch in einer Geraden.

Es soll die Gleichung derselben gefunden werden, wenn gegeben ist:

$$A_1B_1C_1 \equiv a_1 \quad b_1 \quad c_1$$
$$A_2B_2C_2 \equiv a_2 \quad b_2 \quad c_2$$

Es ist dann:

$$A_1 \equiv 0 \qquad c_1 \qquad -b_1$$
$$AA_1 \equiv 0 \qquad b_1 \qquad c_1$$
$$A_2 \equiv b_1c_2 - b_2c_1 \quad a_2c_1 \quad -a_2b_1$$

Wendet man die Formel des vorhergehenden Paragraphen an, so findet man:

$$X \equiv A, \quad Y \equiv A_1, \quad Z \equiv A_2, \quad \xi = a, \quad \eta = bc_1 - cb_1$$
$$\xi = a\,b_1c_2 - a\,b_2c_1 + b\,a_2c_1 - c\,a_2b_1$$
$$T \equiv A_3 \equiv b_1c_2 - b_2c_1 \quad -a_2c_1 \quad +a_2b_1$$

Sonach liegen die A_3 in der Geraden:

$$a_2(a_1b_2c_1 + a_1b_1c_2 - a_2b_1c_1).$$

XVII.

Treffen PA, QA die BC in P_a, Q_a, und wird BC von P_a durch Π_a, $P_a\Pi_a$ von Q_a durch R_a harmonisch getrennt; so schneiden sich die AR_a in $R \equiv p_a{}^2q_bq_c$, wenn $P \equiv p_a$, $Q \equiv q_a$.

Zum Beweis dieses Satzes bedienen wir uns der Formel in XV. Sie gibt:

$$\Pi_a \equiv 0 \qquad p_b \qquad -p_c$$
$$R_a \equiv 0 \qquad p_b{}^2q_c \qquad p_c{}^2q_b$$
$$\equiv 0 \qquad p_b{}^2q_cq_a \qquad p_c{}^2q_bq_a$$

Somit schneiden sich die AR_a in $R \equiv p_a{}^2q_bq_c$. Ist P das Inkreiscentrum, so ist $R \equiv q_bq_c$, der reciproke Punkt von $Q \equiv q_a$, und AP halbirt den Winkel Q_aAR_a. Ist P der Schwerpunkt, so ist $R \equiv b^2c^2q_bq_c$ und P_a ist dann Halbirungspunkt der Strecke Q_aR_a. Beide Fälle, welche bekannte Sätze geben, liefern durch Projection den so eben

bewiesenen Lehrsatz. Nennen wir den Punkt $R \equiv p_a{}^2 q_b q_c$ den Reciprokalpunkt von P bezüglich Q. Es ergeben sich dann folgende Beziehungen:

Ist R der Reciprokalpunkt von P bezüglich Q, so ist Q der Reciprokalpunkt von P bezüglich R. Der Reciprokalpunkt von P bezüglich des Inkreiscentrums ist der Punkt $p_a{}^2$. Der Reciprokalpunkt von $P (\equiv p_a)$ bezüglich seines reciproken Punktes $(\equiv p_b p_c)$ ist der Punkt $p_a{}^2$. Bezeichnen wir noch kürzer den Reciprokalpunkt von P bezüglich Q mit $R(P, Q)$, so dass $R(P, Q) \equiv p_a{}^2 q_b q_c$; so ist z. B. wenn S, J, G Schwerpunkt, Inkreiscentrum, Grebe'schen Punkt des Urdreiecks bezeichnen,

$$R(P, S) \equiv a p_a{}^2 \equiv P_1.$$

$$R(P_1, G) \equiv p_a{}^4 \equiv P_2$$

$$R(P, P_2) \equiv p_b{}^2 p_c{}^2$$

$$R(G, S) \equiv a^2$$

$$R[R(P, Q), \quad R(Q, P)] \equiv p_a{}^5 q_b{}^4 q_c{}^4$$

$$R[G, R(J, P)] \equiv a^2 p_a$$

$$R[R(P, S), \quad R(J, P) \equiv a^2 p_a{}^5.$$

Wien, Jan. 1877.

XXV.

Begriff der Harmonikalebene eines Punktes in Bezug auf ein Tetraeder.

Von

Emil Hain.

$ABCD$ seien die Ecken des Fundamentaltetraeders; λp_a bezeichne die Normale eines Punktes P auf die Ebene BCD, so dass $\lambda \Sigma BCD . p_a = 3K$, wenn K das Volumen des Tetraeders ist. Mit P_a wollen wir den Punkt der Ebene BCD bezeichnen, in welchem diese von der AP_a getroffen wird.

Die Figur gibt für den Punkt P_a:

$$\frac{x_b}{p_b} = \frac{x_c}{p_c} = \frac{x_d}{p_d} = \frac{AP_a}{AP}$$

so dass die Coordinaten von P_a sind:

$$P_a \equiv 0, \quad p_b, \quad p_c, \quad p_d$$

Die Ebene, welche durch die Punkte $P_b P_c P_d$ geht, hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_a & p_a & p_a & p_a \\ x_b & 0 & p_b & p_b \\ x_c & p_c & 0 & p_c \\ x_d & p_d & p_d & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{x_a}{p_a} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{x_b}{p_b} & 0 & 1 & 1 \\ \frac{x_c}{p_c} & 1 & 0 & 1 \\ \frac{x_d}{p_d} & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Somit ist die Gleichung der $P_b P_c P_d$:

$$-\frac{2x_a}{p_a} + \frac{x_b}{p_b} + \frac{x_c}{p_c} + \frac{x_d}{p_d} = 0$$

Die $P_b P_c P_d$ trifft die BCD in der Geraden:

$$\frac{x_b}{p_b} + \frac{x_c}{p_c} + \frac{x_d}{p_d} = 0$$

Diese ist aber die Harmonikale von P_a in Bezug auf das Dreieck BCD.

Es ist nämlich ersichtlich, dass für alle Punkte und Gerade der Ebene BCD $x_a = 0$. Bezeichnen wir mit X irgend einen Punkt dieser Ebene, mit $\mathfrak{x}_b \mathfrak{x}_c \mathfrak{x}_d$ die Normalen von X auf die Seiten des Dreiecks BCD; seien ferner $\mathfrak{p}_b \mathfrak{p}_c \mathfrak{p}_d$ die Normalen von P_a auf die Seiten desselben Dreiecks: dann ist:

$$x_b = \mathfrak{x}_b \sin(BCD.ACD)$$

$$\frac{x_b}{p_b} = \frac{\mathfrak{x}_b}{\mathfrak{p}_b}$$

Wir können also in der Ebene BCD in diesem Falle mit den Tetraedercoordinaten so rechnen, als wenn sie trimetrische Coordinaten bezogen auf das Fundamentaldreieck BCD wären.

Die Harmonikale des Punktes $P_a \equiv p_b p_c p_d$ in Bezug auf das Dreieck BCD hat die Gleichung:

$$\frac{x_b}{p_b} + \frac{x_c}{p_c} + \frac{x_d}{p_d} = 0$$

Die Geraden:

$$0 \quad \frac{1}{p_b} \quad \frac{1}{p_c} \quad \frac{1}{p_d}$$

liegen demnach in der Ebene

$$\frac{1}{p_a} \quad \frac{1}{p_b} \quad \frac{1}{p_c} \quad \frac{1}{p_d}$$

Die Harmonikalebene des Punktes p_a ist somit die Ebene $p_a p_c p_d$. Wir haben also den bekannten Satz:

Ist P ein Punkt im Raume des Tetraeders $ABCD$, trifft AP die Ebene BCD in P_a; so schneiden die $P_b P_c P_d$ die BCD in vier Geraden, welche in einer Ebene liegen und die Harmonikalen von P_a in Bezug auf die Dreiecke BCD sind.

Wien, December 1876.

XXVI.

Bemerkung über Symmetriepunkte des Tetraeders.

Von

Emil Hain.

$ABCD$ seien die Ecken eines Tetraeders. Das Gegendreieck von A habe die Fläche $A = a^2$. P sei ein Punkt im Raume, p_a der Normale von A auf die Ebene BCD proportional. Dann heisst P ein Symmetriepunkt des Tetraeders, wenn p_a eine nach b, c, d symmetri-

sche Function der A ist und $p_b p_c p^d$ durch cyklische Vertauschung aus p_a hervorgehen. So ist das Inkugelcentrum des Tetraeders der Punkt 1, der Schwerpunkt der Punkt BCD. Analog den Verhältnissen des ebenen Dreieckes kann man also den Punkt $\varphi A^n + B^n + C^n + D^n$ einen Punkt $n$ter Dimension nennen.

Die Verbindungsgerade zweier Symmetriepunkte $\xi_a \xi_a'$ wird sonach eine Symmetriegerade des Tetraeders sein. Sie hat die Form:

$$\begin{aligned} a_b x_b + a_c x_c + a_d x_d &= 0 \\ b_c x_c + b_d x_d + b_a x_a &= 0 \\ c_d x_d + c_a x_a + c_b x_b &= 0 \\ d_a x_a + d_b x_b + d_c x_c &= 0 \end{aligned}$$

wo

$$a_b = \begin{vmatrix} \xi_c & \xi_d \\ \xi_c' & \xi_d' \end{vmatrix}, \quad a_c = \begin{vmatrix} \xi_d & \xi_b \\ \xi_d' & \xi_b' \end{vmatrix}, \quad a_d = \begin{vmatrix} \xi_b & \xi_c \\ \xi_b' & \xi_c' \end{vmatrix}$$

So ist z. B. für die Punkte $\varphi A + B + C + D$, A:

$$a_b = \begin{vmatrix} \varphi C + D + A + B. & \varphi D + A + B + C \\ C & D \end{vmatrix} =$$

$$= (A + B + C + D) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ C & D \end{vmatrix} \equiv C - D$$

Die Gerade $C - D$ ist also die Verbindungslinie aller Symmetriepunkte 1. Dimension.

Die Ebene, welche 3 Punkte $\xi_a \xi_a' \xi_a''$ enthält, hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_a & \xi_a & \xi_a' & \xi_a'' \\ x_b & \xi_b & \xi_b' & \xi_b'' \\ x_c & \xi_c & \xi_c' & \xi_c'' \\ x_d & \xi_d & \xi_d' & \xi_d'' \end{vmatrix} = 0$$

Sind die ξ_a Symmetriepunkte, so kann diese Ebene kurz bezeichnet werden als die Symmetrieebene:

$$\begin{vmatrix} \xi_b & \xi_b' & \xi_b'' \\ \xi_c & \xi_c' & \xi_c'' \\ \xi_d & \xi_d' & \xi_d'' \end{vmatrix}$$

So hat z. B. die Ebene, welche den Schwerpunkt und die Symmetriepunkte 1. Dimension enthält, die Form:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{B} & 1 & B \\ \frac{1}{C} & 1 & C \\ \frac{1}{D} & 1 & D \end{vmatrix} = \frac{1}{BCD} \begin{vmatrix} 1 & B & B^2 \\ 1 & C & C^2 \\ 1 & D & D^2 \end{vmatrix} \equiv A(B-C)(C-D)(D-B)$$

Ein Beispiel der Uebertragung aus der Theorie der Symmetriepunkte des ebenen Dreiecks ist der Punkt gleicher Transversalflächen. Legen wir nämlich durch den Punkt $X \equiv x_a$ eine Ebene parallel zu BCD, so begrenzt das Tetraeder von derselben eine Fläche gleich A', so dass für K als das Volumen des Tetraeders:

$$\sqrt{\frac{A'}{A}} = \frac{\frac{3K}{A} - x_a \cdot \frac{3K}{\Sigma A x_a}}{\frac{3K}{A}}$$

$$\sqrt{\frac{A'}{A}} \cdot \Sigma A x_a = B x_b + C x_c + D x_d$$

Für den Fall, dass die A' einander gleich seien, setzen wir $A' = u^2$. Dann ist:

$$a^2 u x_a + b^2(u-a) x_b + c^2(u-a) x_c + d^2(u-a) x_d = 0$$

Zur Bestimmung von u hat man:

$$\begin{vmatrix} u & u-a & u-a & u-a \\ u-b & u & u-b & u-b \\ u-c & u-c & u & u-c \\ u-d & u-d & u-d & u \end{vmatrix}$$

Die Subtraction der Colonnen ergibt:

$$u = \frac{3abcd}{abc+bcd+cda+dab} = \frac{3H_a}{\Sigma bcd}$$

Nun ist:

$$\frac{u}{a} = 1 - \frac{a^2 x_a}{\Sigma a^2 x_a}, \quad x_a \equiv \frac{a-a}{a^3}$$

$$x \equiv b^2 c^2 d^2 (abc + acd + abd - 2bcd)$$

Suchen wir denjenigen Punkt $X \equiv x_a$, für welchen die Quadratsumme der Normalen auf die BCD ein Minimum ist. Wir haben dann:

$$f = \Sigma \left(\frac{x_a \cdot 3K}{\Sigma A x_a}\right)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_a} = 18K^2 \cdot \frac{x_a \Sigma A x_a - A \Sigma x_a^2}{(\Sigma A x_a)^3} = 0$$

Sonach ist $x_a \equiv A$ der Grebe'sche Punkt des Tetraeders.

Wien, December 1876.

XXVII.

Propositions sur les corps de révolution de la Géométrie élémentaire.

Par

Georges Dostor.

Les questions suivantes ne seraient pas déplacées dans un Cours de Géométrie élémentaire; beaucoup d'entre elles appartiennent de droit à la partie théorique du Cours, les autres se classent dans les problèmes et exercices. Nous avons marqué d'un astérisque les propositions que nous croyons ignorées, peu connues ou imparfaitement répandues.

I. Mesure du cylindre.

1. Théorème I. La surface totale S d'un cylindre est égale à la surface latérale d'un second cylindre, qui a même base que le premier et dont la hauteur est égale à celle H du premier cylindre, augmentée de son rayon de base R; ou

$$S = 2\pi R(H + R).$$

2. Théorème II. Le volume V du cylindre est égal à la surface latérale s multipliée par la moitié du rayon de base; ou

$$V = s \cdot \tfrac{1}{2}R.$$

3. Théorème III. Le volume du cylindre est égal à la surface latérale multipliée par le tiers du rayon de base, plus le cône de même base et de même hauteur que le cylindre; ou

$$V = s \cdot \tfrac{1}{3}R + \tfrac{1}{3}\pi R^2 H.$$

4. Théorème IV. Le volume du cylindre est égal à la surface latérale multipliée par le tiers de la distance x d'un point quelconque P de l'axe à la génératrice, plus la somme ou la différence des deux cônes qui ont pour bases celles du cylindre et pour sommet commun le point P, suivant que ce point est intérieur ou extérieur au cylindre.

* 5. Théorème V. Le volume du cylindre est égal à la surface totale multipliée par la moyenne harmonique entre le rayon de base et la hauteur du cylindre; ou

$$V = S.\frac{1}{2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{H}\right)}$$

6. Théorème VI. Le volume du cylindre est égal à la surface du rectangle générateur, multipliée par la circonférence que décrit autour de l'axe le point de concours des diagonales de ce rectangle (Théorème de Pappus, retrouvé par Guldin); ou

$$V = RH.2\pi\frac{R}{2}$$

* 7. Théorème VII. Lorsque le volume d'un cylindre est exprimé par le même nombre que la surface latérale, on a $R = 2$, quelle que soit la hauteur; et, lorsque ce volume est exprimé par le même nombre que la surface totale, on a

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{H}=\frac{1}{2}$$

* 8. Théorème VIII. Le volume V du cylindre, la surface latérale s et la surface totale S sont liés entre eux par la relation

$$8\pi V^2 = s^2(S-s).$$

9. Théorème IX. De tous les cylindres de même surface totale, le cylindre équilatéral comprend le plus petit volume.

10. Théorème X. Lorsque deux cylindres ont même surface latérale, leurs volumes sont entre eux comme les rayons de leurs bases; et, s'ils ont même volume, leurs surfaces latérales sont en raison inverse des rayons de leurs bases.

11. Théorème XI. Lorsqu'un rectangle tourne successivement autour de ses deux côtés, il engendre deux cylindres, dont les surfaces latérales sont égales et dont les surfaces totales sont entre elles comme les volumes.

12. Théorème XII. Lorsqu'un rectangle, tournant successivement autour de ses deux côtés, engendre les volumes πa^3 et πb^3, les côtés de ce rectangle sont $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{a^2}{b}$.

13. Problème I. La surface du rectangle générateur d'un cylindre est égale à a^2, calculer la surface latérale. — On trouve $s = 2\pi a^2$; pour $a^2 = 3125$ on a $s = 19625$.

14. Problème II. Connaissant la surface latérale s et la surface totale S d'un cylindre, calculer le rayon de base R et la hauteur H. — On a $R = \sqrt{\frac{S-s}{2\pi}}$ $H = \frac{s}{\sqrt{2\pi(S-s)}}$ Pour $s = 11781$ et $S = 15708$, on trouve $R = 25$, $H = 75$.

15. Problème III. Connaissant la surface latérale s et le volume V d'un cylindre, déterminer le rayon de base R et la hauteur H. — On a $R = \frac{2V}{S}$. $H = \frac{s^2}{4\pi V}$ Pour $s = 4712{,}40$ et $V = 35343$, il vient $R = 15$, $H = 50$.

16. Problème IV. Calculer le diamètre $2R$ d'un cylindre, connaissant la hauteur H et la surface totale πa^2. — On trouve $2R = \sqrt{4H^2 - 2a^2} - 2H$. Si $H = 2{,}35$ et $a = 3{,}24$, on aura $2R = 2{,}80$.

II. Le cylindre inscrit dans un cône donné.

17. Théorème I. Lorsqu'un cylindre est inscrit dans un cône le rayon de base r et la hauteur h du cylindre sont liés avec le rayon de base R et la hauteur H du cône par la relation

$$\frac{r}{R} + \frac{h}{H} = 1.$$

18. Théorème II. De tous les cylindres inscrits dans un cône donné celui, qui divise en deux parties égales la hauteur du cône, a la plus grande surface latérale.

19 Théorème III. De tous les cylindres inscrits dans un cône donné, celui qui est terminé par la plus grande surface totale, a la somme du rayon de base et de la hauteur égale à la demi-hauteur du cône, ou $r + h = \frac{H}{2}$

20. Théorème IV. De tous les cylindres inscrits dans un cône donné, celui, qui comprend le plus grand volume, a pour hauteur le tiers de la hauteur du cône.

III. Le Cylindre inscrit dans une sphère donné.

21. Théorème I. De tous les cylindres inscrits dans la sphère le cylindre équilatéral a la plus grande surface latérale; cette surface est la moitié de la surface de la sphère.

22. Théorème II. De tous les cylindres inscrits dans la sphère de rayon R, celui, qui est terminé par la plus grande surface totale, a

$$r = \tfrac{1}{10}R\sqrt{5(10+2\sqrt{5})}, \quad h = \tfrac{1}{5}R\sqrt{5(10-2\sqrt{5})}$$

pour rayon de base et pour hauteur.

23. Théorème III. De tous les cylindres inscrits dans la sphère, celui, dont le diamètre de base est à la hauteur comme $\sqrt{2}$ est à 1, renferme le plns grand volume.

IV. Mesure du cône.

24. Théorème I. La surface totale S d'un cône est égale à la surface latérale d'un second cône, qui a même base que le premier et dont le côté est égal à celui C du premier cône augmenté de son rayon de base R; ou

$$S = \pi R(C+R).$$

25. Théorème II. Le volume V du cône s'obtient en multipliant la surface totale par le tiers du rayon r de la sphère inscrite; on

$$V = \pi R(C+R).\tfrac{1}{3}r.$$

* 26. Théorème III. Le volume du cône s'obtient aussi, en divisant le carré de la surface latérale s par 3 fois la circonférence $2\pi R$ d'un grand cercle de la sphère circonscrite; ou

$$V = \frac{s^2}{3(2\pi R)}.$$

27. Théorème IV. Le volume du cône s'obtient encore, en multipliant la surface latérale par le tiers de la distance d du centre de la base au côté du cône; ou

$$V = s.\tfrac{1}{3}d.$$

28. Théorème V. Le volume du cône s'obtient aussi, en multipliant la surface du triangle générateur par la circonférence $2\pi m$, que décrit le point de concours des médianes autour de l'axe (Théorème de Pappus); ou

$$V = \tfrac{1}{2}RH.2\pi m.$$

* 29. Théorème VI. Le volume du cône égale encore la surface latérale s multipliée par le tiers de la distance x du côté à un point quelconque P de l'axe, plus la base multipliée par le tiers de la distance y de cette base au même point P de l'axe; ou

$$V = s.\tfrac{1}{3}x + \pi R^2.\tfrac{1}{3}y.$$

On prendra la distance y positivement ou négativement, suivant que le point P sera situé au-dessus ou au-dessous de la base du cône; et l'on regardera la perpendiculaire x comme positive ou négative, suivant qu'elle rencontrera le côté C du cône en-deçà ou au-delà du sommet.

* 30. Théorème VII. Lorsque le volume du cône est exprimé par le même nombre que la surface latérale, on a

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{H^2} = \frac{1}{9};$$

et lorsque ce volume est exprimé par le même nombre que la surface totale, on a

$$\frac{3}{R^2} + \frac{2}{H} = \frac{1}{3}$$

* 31. Théorème VIII. Le volume V du cône, la surface latérale s et la surface totale S sont liés entre eux par la relation

$$9\pi V^2 = S(S-s)(2s-S)$$

On en conclut que la surface totale d'un cône, plus grande que la surface latérale, est toujours moindre que le double de cette surface latérale.

32. Problème I. Calculer la surface latérale s d'un cône, dont on donne la surface totale S et le volume V. — On trouve que

$$s = \tfrac{3}{4}S \pm \frac{1}{4S}\sqrt{S(S^3 - 27\pi V^2)}.$$

* 33. Problème II. De tous les cônes, qui ont même surface latérale s, quel est celui qui renferme le plus grand volume? — Les trois côtés du triangle rectangle, qui engendre le cône maximum, sont entre eux comme les trois nombres $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, et le volume maximum sera

$$V = \frac{s}{9\pi}\sqrt{2\pi s\sqrt{3}}.$$

* 34. Problème III. De tous les cônes, qui ont même surface totale S, quel est celui qui renferme le plus grand volume? — Les trois côtés du triangle rectangle, qui engendre le cône de volume

maximum, sont entre eux comme les trois nombres 1, $2\sqrt{2}$ et 3; la surface latérale de ce cône est les trois quarts de la surface totale et son volume est

$$V = \frac{S}{12\pi}\sqrt{2\pi S}.$$

35. **Problème IV.** Sur un grand cercle d'une sphère de rayon R construire un cône, dont le volume soit équivalent à celui de la sphère. — On trouve que $H = 4R$, $C = R\sqrt{17}$, $s = \pi R^2\sqrt{17}$, $S = \pi R^2(1+\sqrt{17})$; le rayon de la sphère circonscrite au cône est $R = \frac{17}{8}R$ et $r = \frac{1}{4}R(\sqrt{17}-1)$ est le rayon de la sphère inscrite.

* 36. **Problème V.** On sait que le volume d'un cône s'obtient en multipliant la surface totale par le huitième de la hauteur, calculer, en valeur du rayon de base R, la surface latérale s, la surface totale S et le volume V. — On trouve que $C = \frac{5}{3}R$, $H = \frac{4}{3}R$, $s = \frac{5}{3}\pi R^2$, $S = \frac{8}{3}\pi R^2$, $V = \frac{4}{9}\pi R^3$; le rayon de la sphère circonsrite au cône est $R = \frac{25}{24}R$ et le rayon de la sphère inscrite est la moitié du rayon de base R du cône.

37. **Problème VI.** Les côtés du triangle générateur d'un cône sont entre eux comme les trois nombres entiers consécutifs 3, 4 et 5, calculer, en valeur du rayon de base R, la surface latérale s, la surface totale S et le volume V. — Si l'on suppose que le rayon de base est proportionnel au nombre 3, on obtiendra les mêmes valeurs que dans le problème précédent; s'il est proportionnel au nombre 4, on trouvera que $H = \frac{3}{4}R$, $C = \frac{5}{4}R$, $s = \frac{5}{4}\pi R^2$, $S = \frac{9}{4}\pi R^2$, $V = \frac{1}{4}\pi R^3$.

* 38. **Problème VII.** Dans un rectangle $ABCD$ (fig. 1.) on mène la diagonale AC. A quel point E de cette diagonale faut-il joindre le sommet D du rectangle, pour que les trois triangles ABC, ADE, CDE engendrent des volumes égaux pendant la révolution du rectangle $ABCD$ autour du côté AB. — Le point E divise la diagonale AC en moyenne et extrême raison à partir du point A.

39. **Problème VIII.** Dans une sphère donnée O (fig. 2.) de rayon R, on mène un plan ACB et le diamètre SCD perpendiculaire à ce plan; puis on construit deux cônes ayant pour base commune le cercle de section et pour sommets respectifs les extrémités S et D du diamètre. Calculer les surfaces latérales s, s'; les surfaces totales S, S' et les volumes V, V' de ces deux cônes, sachant que le plan est mené à une distance x du centre de la sphère. — On trouve que

$$s = \pi(R-x)\sqrt{2R(R+x)}, \qquad s' = \pi(R+x)\sqrt{2R(R-x)},$$
$$S = \pi(R-x)[R+x+\sqrt{2R(R+x)}], \quad S' = \pi(R+x)[R-x+\sqrt{2R(R-x)}],$$
$$V = \tfrac{1}{3}\pi(R-x)^2(R+x), \qquad V' = \tfrac{1}{3}\pi(R+x)^2(R-x).$$

40. **Problème IX.** Mener dans une sphère de rang R (fig. 2.) un plan de manière que les surfaces latérales s, s' des deux cônes du problème précédent soient entre elles dans le rapport de m à n. — On trouve que $x = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2} R$. Si $n = 3$ et $m = 1$ le plan sécant devra diviser le diamètre SD dans le rapport de 1 à 9 et l'on aura $x = \frac{4}{5} R$.

41. **Problème X.** La surface latérale d'un cône est égal au cercle qui a pour rayon la distance du sommet au centre de la sphère inscrite; calculer, en valeur du rayon r de cette sphère, le rayon de base R, la hauteur H et le côté C du cône, ainsi que la surface latérale s, la surface totale S et le volume V. — On trouve que

$$R = r\sqrt{1 + \sqrt{2}}, \quad H = r\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}), \quad C = r\sqrt{(1 + \sqrt{2})^3};$$
$$s = \pi r^2 (1 + \sqrt{2})^2, \quad S = \pi r^2 \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^2, \quad V = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^2.$$

La surface latérale et la surface totale sont entre elles comme 1 est à $\sqrt{2}$.

V. Le cône circonscrit à une sphère donnée.

42. **Théorème I.** Lorsqu'un cône est circonscrit à une sphère donnée, le rayon de base R et la hauteur H du cône sont liés avec le rayon r de la sphère par la relation.

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} = \frac{2}{rH}.$$

Si la hauteur H du cône est égal au double diamètre $4r$ de la sphère, le rayon de base R du cône sera égal au côté $r\sqrt{2}$ du carré inscrit dans un grand cercle de la sphère.

En général, si $H = nr$, on aura $R = r\sqrt{\frac{n}{n-2}}$.

43. **Théorème II.** Lorsque le rayon de base d'un cône est égal au diamètre $2r$ de la sphère inscrite, on a

$$H = \tfrac{8}{3} r, \quad C = \tfrac{10}{3} r, \quad s = \tfrac{20}{3}\pi r^2, \quad S = \tfrac{32}{3}\pi r^2, \quad V = \tfrac{32}{9}\pi r^3.$$

* 44. **Théorème III.** Lorsque la hauteur d'un cône, circonscrit à une sphère donnée, est double du diamètre de cette sphère, la surface totale du cône ainsi que son volume sont aussi doubles, l'une de la surface et l'autre du volume de la sphère.

On trouve que $R = r\sqrt{2}$, $C = 3r\sqrt{2}$, $s = 6\pi r^2$, $S = 2.4$[illegible] et $V = 2.\tfrac{4}{3}\pi r^3$.

45. **Problème I.** A une sphère donnée, de rayon r, circonscrire un cône, dont la surface latérale soit égale au cercle ayant pour rayon la distance du centre de la sphère au sommet du cône. — On trouve que $H = r(2+\sqrt{2})$, $R = r\sqrt{1+\sqrt{2}}$, $C = r\sqrt{7+5\sqrt{2}}$, et $s = \pi r^2(1+\sqrt{2})^2$, $S = \pi r^2(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})$, $V = \frac{1}{3}\pi r^3(4+3\sqrt{2})$.

* 46. **Problème II.** Circonscire à une sphère de rayon r un cône dont la surface latérale soit égale à n fois la surface de la sphère. — La distance du sommet du cône au centre de la sphère est $\frac{r}{2}(4n-1 \pm \sqrt{(4n-3)^2-8})$.

Si $n = \frac{3}{2}$, on trouve pour cette distance les deux valeurs $2r$ et $3r$. Ainsi

Les deux cônes circonscrits à une sphère donnée, dont les hauteurs sont l'une triple et l'autre quadruple du rayon de la sphère, ont même surface latérale; et cette surface est à celle de la sphère comme 3 est à 2.

On a pour ces deux cônes

$$H = 3r,\quad R = r\sqrt{3},\quad C = 2r\sqrt{3},\quad s = 6\pi r^2,\quad S = 9\pi r^2,\quad V = 3\pi r^3;$$
$$H = 4r,\quad R = r\sqrt{2},\quad C = 3r\sqrt{3},\quad s = 6\pi r^2,\quad S = 8\pi r^2,\quad V = \tfrac{8}{3}\pi r^3.$$

47. **Cône de surface latérale minima circonscrit à une sphère donnée.** Il se déduit de la question précédente.

De tous les cônes circonscrits à une sphère donnée, celui, qui a la plus petite surface latérale, mesure, du sommet au centre de la sphère, une distance égale au rayon du cercle équivalent à cette surface latérale.

* 48. **Problème III.** Circonscrire à une sphère de rayon r un cône, dont la surface totale soit égale à n fois la surface de la sphère. — Les hauteurs des deux cônes satisfaisant à la question sont $2r(n \pm \sqrt{n(n-2)})$.

49. **Cône de surface totale minima, circonscrit à une sphère donnée.** Ce cône s'obtient par le problème précédent.

De tous les cônes circonscrits à une sphère donnée, celui, qui a la plus petite surface totale, a pour hauteur le double diamètre de la sphère.

Cette surface est aussi double de la surface de la sphère.

50. **Problème IV.** Circonscrire à une sphère de rayon r un cône dont le volume soit égal à n fois le volume de la sphère. — Deux cônes satisfont à la question; ils ont pour hauteur $2r(n \pm \sqrt{n(n-2)})$.

51. Cône de volume minimum, circonscrit à une sphère donnée. Il est évidemment le même que celui, dont la surface totale est minima.

De tous les cônes circonscrits à une sphère, celui, qui a le plus petit volume, a pour hauteur le double diamètre de la sphère.

52. Problème V. A une sphère donnée, de rayon r, circonscrire un cône dont le plan de contact se trouve à une distance x du centre de la sphère. — On trouve que

$$H = \frac{r(r+x)}{x}, \quad R = r\sqrt{\frac{r+x}{r-x}}, \quad C = \frac{r^2}{x}\sqrt{\frac{r+x}{r-x}};$$

$$s = \frac{\pi r^3(r+x)}{x(r-x)}, \quad S = \frac{\pi r^2(r+x)^2}{x(r-x)}, \quad V = \frac{\pi r^3(r+x)^2}{3x(r-x)}$$

Le plan de contact sépare de ce cône un petit cône supérieur, ayant même sommet que le premier et pour base le cercle de contact de celui-ci. Les éléments de ce cône sont

$$H' = \frac{(r+x)(r-x)}{x}, \quad R' = \sqrt{(r+x)(r-x)}, \quad C' = \frac{r}{x}\sqrt{(r+x)(r-x)};$$

$$s' = \frac{\pi r}{x}(r+x)(r-x), \quad S' = \frac{\pi(r+x)^2(r-x)}{x}, \quad V = \frac{\pi(r+x)^2(r-x)^2}{3x}$$

VI. Le cône inscrit dans une sphère donnée.

53. Relation entre le rayon R d'une sphère, le rayon de base R et la hauteur H d'un cône inscrit dans cette sphère:

$$2RH = H^2 + R^2.$$

54. Problème I. Dans une sphère donnée, de rayon R, inscrire le cône dont la surface latérale soit maxima.

La base de ce cône est située à une distance du centre égale au tiers du rayon de la sphère. On a d'ailleurs

$$R = \tfrac{2}{3}R\sqrt{2}, \quad H = \tfrac{4}{3}R, \quad C = \tfrac{2}{3}R\sqrt{6};$$

$$s = \tfrac{8}{9}\pi R^2\sqrt{3}, \quad S = \tfrac{8}{9}\pi R^2(1+\sqrt{3}), \quad V = \tfrac{1}{3}\pi\left(\frac{2R}{3}\right)^3.$$

55. Problème II. Dans une sphère de rayon R inscrire le cône dont la surface totale soit maxima. — Si l'on désigne par x la distance du centre de la sphère au côté du cône, on trouve que la valeur de x, qui correspond au cône de plus grande surface totale, est donnée par l'équation

$$4x^2 - Rx - R^2 = 0$$

d'où on tire $x = \frac{1}{8}R(1 + \sqrt{17})$ pour la valeur de cette distance.

La surface totale du cône étant

$$S = \frac{4\pi x(R-x)(R+x)^2}{R^2} = \frac{1}{16}\pi R(7R + 51x)$$

il vient

$$S = \frac{1}{128}\pi R^2(107 + 51\sqrt{17})$$

pour la surface totale maxima des cônes inscrits dans la sphère.

56. **Problème III.** Dans une sphère de rayon R inscrire le cône de volume maximum. — Le volume de ce cône est équivalent à une sphère, dont le rayon est les deux tiers du rayon de la sphère donnée; sa surface latérale est aussi maxima (54).

VII. Le cône circonscrit à un cylindre donnée.

57. **Problème I.** A un cylindre donné circonscrire le cône dont la surface latérale soit minima. — La question conduit à une équation du troisième degré.

58. **Problème II.** A un cylindre donné, circonscrire le cône dont la surface totale soit minima. — La question mène aussi à une équation du troisième degré.

59. **Problème III.** A un cylindre donné, circonscrire le cône dont le volume soit maximum. — La hauteur du cône est triple de la hauteur du cylindre; et le volume du cône est à celui du cylindre comme 9 est à 4.

VIII. Mesure du tronc de cône convexe.

60. **Théorème I.** La surface latérale s du tronc de cône est égale à la somme des surfaces latérales de deux cônes, qui ont même côté C que le tronc, et qui ont pour bases le premier la base inférieure de rayon R du tronc de cône et le second la base supérieure de rayon r; ou

$$s = \pi RC + \pi rC.$$

* 61. **Théorème II.** La surface totale S du tronc de cône est égale à la somme des surfaces totales de deux cônes, qui ont même côté que le tronc et pour bases, le premier la base inférieure et le second la base supérieure du tronc de cône; ou

$$S = \pi R(C + R) + \pi r(C + r).$$

* 62. Théorème III. Le tronc de cône V est équivalent à la somme d'un cylindre et d'un cône, ayant même hauteur H que le tronc et pour rayons de bases, le cylindre la demi-somme et le cône la demi-différence des deux rayons de bases du tronc de cône; ou

$$V = \pi H\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\pi H\left(\frac{R-r}{2}\right)^2.$$

* 63. Théorème IV. Le tronc de cône est égal à la différence d'un cylindre et d'un cône ayant même hauteur que le tronc, la base du cylindre étant la demi-somme des bases du tronc, et la base du cône étant le demi-cercle qui a pour rayon la différence des rayons de bases du tronc de cône; ou

$$V = H.\frac{\pi(R^2+r^2)}{2} - \tfrac{1}{3}H.\frac{\pi(R-r)^2}{2}.$$

* 64. Théorème V. Le volume du tronc de cône égale la surface latérale multipliée par le tiers de la distance δ du côté C à un point quelconque P de l'axe, plus deux cônes ayant pour bases celles du tronc, et pour hauteurs respectives les distances D et d de ces deux bases au même point P; ou

$$V = s.\tfrac{1}{3}\delta + \tfrac{1}{3}\pi R^2 D + \tfrac{1}{3}\pi r^2 d.$$

Les distances δ, D et d devront être prises positivement ou négativement, suivant la position du point P par rapport aux deux bases et au côté.

La distance δ sera positive ou négative, suivant que cette perpendiculaire rencontrera le côté en-deça ou au-delà du sommet du cône auquel appartient le tronc.

La distance D sera positive ou négative, suivant que le point P sera situé au-dessus ou au-dessous de la base inférieure du tronc.

La distance d sera positive ou négative, suivant que le point P sera situé au-dessus ou au-dessous de la base supérieure.

IX. Mesure du tronc de cône de seconde espèce.

* 65. Théorème I. La surface latérale du tronc de cône étranglé est égale à la somme des bases multipliée par le rapport du côté à la somme des rayons des deux bases; ou

$$s = \pi(R^2+r^2).\frac{C}{R+r}.$$

* 66. **Théorème II.** La surface totale du tronc de cône étranglé est égale à la surface latérale d'un second tronc de cône étranglé, qui a même bases que le premier, et dont le côté est égal au côté du premier tronc de cône augmenté des rayons de ces deux bases; ou

$$S = \pi(R^2 + r^2) \cdot \frac{C + R + r}{R + r}$$

67. **Théorème III.** Le volume du tronc de cône étranglé est égal à l'excès de la somme de deux cônes sur un troisième, qui ont même hauteur que le tronc et pour bases, le premier la base inférieure, le second la base supérieure et le troisième une moyenne proportionnelle entre ces deux bases; ou

$$V = \tfrac{1}{3}\pi H(R^2 - Rr + r^2).$$

X. Questions sur le tronc de cône convexe.

68. **Problème I.** On connait la hauteur H, le rayon R de l'une des bases et le volume V d'un tronc de cône; calculer le rayon x de l'autre base. — On trouve que

$$x = \tfrac{1}{2}R\left[-1 + \sqrt{3\left(\frac{4V}{\pi R^2 H} - 1\right)}\right].$$

Pour $H = 3$, $R = 5$, $V = 39\pi$, on a $r = 2$.

69. **Problème II.** On donne la hauteur H et le volume V d'un tronc de cône, et l'on connait le rapport $\frac{m}{n}$ de la surface latérale à la différence des bases; déterminer les rayons x et y des deux bases, aussi que le côté z. — On obtient

$$x = \frac{nH}{2\sqrt{m^2 - n^2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4V}{\pi H} - \frac{n^2 H^2}{3(m^2 - n^2)}},$$

$$y = \frac{-nH}{2\sqrt{m^2 - n^2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4V}{\pi H} - \frac{n^2 H^2}{3(m^2 - n^2)}},$$

$$z = \frac{mH}{\sqrt{m^2 - n^2}}$$

70. **Problème III.** Les rayons des deux bases d'un tronc de cône sont entre eux comme m est à n; le rayon de la section faite à égales distances des bases est a; calculer le volume V du tronc de cône, sachant que la hauteur est H. — On trouve que

$$V = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{\pi a^2 H}{m + n} \cdot \frac{m^3 - n^3}{m^2 - n^2}$$

Ce volume sera équivalent à la sphère de rayon a, si l'on a

$$\frac{H}{a} = \frac{m^2 + 2mn + n^2}{m^2 + mn + n^2}.$$

71. **Problème IV.** On connaît les rayons R, r des deux bases d'un tronc de cône et la hauteur H du tronc; mener un plan parallèle aux deux bases, qui décompose le solide en deux troncs de cône semblables, dont on demande les volumes V' et V''. — Le rayon de la section est $\sqrt{Rr}$ et l'on a

$$V' = \tfrac{1}{3}\pi H r \sqrt{r} \cdot \frac{R\sqrt{R} - r\sqrt{r}}{R - r} \qquad V'' = \tfrac{1}{3}\pi H R \sqrt{R} \cdot \frac{R\sqrt{R} - r\sqrt{r}}{R - r}$$

72. **Problème V.** Déterminer sur l'axe d'un tronc de cône un point P tel que le volume du tronc soit égal à la surface latérale multipliée par le tiers de la distance de ce point P au côté. — Les distances du point P aux deux bases sont

$$x = \frac{Hr^2}{R^2 - r^2} \qquad y = \frac{HR^2}{R^2 - r^2}.$$

XI. Troncs de cône assujettis à des conditions données.

73. **Théorème I.** Lorsque la hauteur d'un tronc de cône **convexe** est égale à quatre fois la différence des rayons R, r des deux bases, le tronc de cône est égal à la différence des deux sphères construites avec ces rayons.

74. **Théorème II.** Lorsque la hauteur d'un tronc de cône **étranglé** est égale à quatre fois la somme des rayons des deux bases, le tronc de cône est égal à la somme des deux sphères construites avec ces rayons.

75. **Problème I.** Calculer les rayons R et r des deux bases d'un tronc de cône, dont le côté connu C fait un angle de 60^0 avec le plan de la base inférieur, sachant que le tronc est équivalent à la sphère qui a ce côté C pour diamètre. — On trouve que

$$\frac{R}{C} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{12}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}, \quad \frac{r}{C} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}$$

76. **Problème II.** Dans un tronc de cône, le rayon r de la base supérieure, la hauteur H et le rayon R de la base inférieure sont entre eux comme les trois premiers nombres impairs 1, 3, 5; calculer la surface latérale s, la surface totale S et le volume V en fonction du rayon r de la base supérieure. — On trouve que $s = 30\pi r^2$, $S = 56\pi r^2$ et $V = 31\pi r^3$.

77. Problème III. Quel doit être le côté C d'un tronc de cône dont on donne les deux rayons R, r de bases, pour que le volume s'obtienne en multipliant la surface totale par la $n^{\text{ème}}$ partie de la hauteur? On trouve que

$$C = \frac{n-3}{3}(R+r) + \frac{6-n}{3} \cdot \frac{Rr}{R+r}$$

Pour $n = 3$, on a $C = \frac{Rr}{R+r}$; et pour $n = 0$ il vient $C = R+r$.

78. Problème IV. Un cylindre et un tronc de cône ont une base commune πR^2 et même hauteurs H, calculer le rayon x de la seconde base du tronc de cône pour que le volume du cylindre soit à celui du cône dans la rapport de m à n. — On trouve que

$$x = \tfrac{1}{2}R[-1+\sqrt{3(4n-m)}].$$

Pour $m = 12$ et $n = 7$, on $x = \frac{R}{2}$; si l'on a en même temps $H = \frac{16}{7}$, le tronc de cône sera équivalent à la sphère de rayon R.

79. Problème V. Calculer le rayon de base x du cylindre qui a même hauteur H et même volume V que le tronc de cône dont les rayons de base sont R et r. — On trouve que

$$x = \tfrac{1}{3}\sqrt{3(R^2r+Rr+r^2)}.$$

Pour $R = 11$ et $r = 3$ on a $x = 7$.

XII. Le tronc de cône circonscriptible.

* 80. Théorème I. Lorsqu'un tronc de cône est circonscriptible à une sphère;

1⁰ le rayon de cette sphère est moyenne proportionnelle entre les rayons et des deux bases du tronc;

2⁰ la surface latérale du tronc est équivalent au cercle qui a pour rayon le côté du tronc;

3⁰ le volume du tronc s'obtient, en multipliant la surface totale par le sixième de la hauteur.

81. Théorème II. Lorsque la demi-hauteur d'un tronc de cône est moyenne proportionnelle entre les rayons des deux bases, la surface latérale du tronc est égale au cercle qui a le côté pour rayon.

82. **Théorème III.** Lorsque le côté d'uu tronc de cône est égale à la somme des rayons des deux bases, lo volume du tronc est égal à la surface totale multipliée par le sixièmo de la hauteur.

83. **Problème I.** Calculer les rayons x et y des deux bases d'un tronc de cône, qui est circouscrit à une sphère de rayon R, pour qu'il soit égal à n fois cette sphère. — On trouve que

$$x = \frac{R}{2}\sqrt{2n+1} + \frac{R}{2}\sqrt{2n-3}$$

$$y = \frac{R}{2}\sqrt{2n+1} - \frac{R}{2}\sqrt{2n-3}$$

Le volume du tronc sera double de celui de la sphère pour

$$x = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}+1) \quad \text{et} \quad y = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}-1).$$

La surface latérale do ce tronc sera $5\pi R^2$, et $8\pi R^2$ en sera la surface totale.

84. **Problèmo II.** Dans un tronc de cône circonscriptible à la sphère de rayon R, la surface totalo est égale à n fois la surface de cette sphèro, calculer les rayons x et y des deux bases, la surface latérale s et le volumo V du trouc. — On trouve pour x et y les mêmer valeurs que précédemment; de plus on a

$$s = \pi R^2(2n+1), \quad V = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

Pour $n = \frac{21}{8}$, on a $x = 2R$, $y = \frac{R}{2}$, $s = \frac{25}{4}\pi R^2$, $S = \frac{21}{2}\pi R^2$, $V = \frac{7}{2}\pi R^3$.

85. **Problème III.** Un trapèze birectangle $ABCD$ (fig. 3.) est circonscrit à un cercle O do rayon r; on co unait le côté latéral oblique $AD = 2a$. Calculer les deux bases $AB = B$, $CD = b$ du trapèze, puis la surface latérale s, la surface totale S et le volume V du trouc do côue qu'engendre la révolution du trapèze $ABCD$ autour du côté latéral droit BC. — Ou trouve que

$$B = a + r + \sqrt{a^2 - r^2}, \quad b = a + r - \sqrt{a^2 - r^2};$$
$$s = 4\pi a(a+r), \quad S = 8\pi a(a+r), \quad V = \tfrac{4}{3}\pi r(r+a)(r+2a).$$

La surface totale du tronc est double de la surfaco latérale, et le volume s'obtient en multipliant la surface latérale par le le tiors de $\frac{r(r+2a)}{a}$.

86. **Problème IV.** Dans un demi-cercle ACB (fig. 4.) on inscrit un rectaugle $DEFG$ et l'on construit le triauglo isocèle CEF.

On demande que le rectangle soit tel que, si l'on fait tourner la figure autour du diamètre AB, les volumes engendrés par le rectangle soient entre eux comme m est à n. — La hauteur du rectangle sera

$$x = \frac{R}{2(2m+3n)}\left[m + \sqrt{3m(3m+4n)}\right].$$

Pour $m = 3$ et $n = 4$, on trouve $x = \frac{1}{2}R$; si $m = n$, il viendra $x = \frac{1}{10}R(1+\sqrt{21})$.

XIII. La zone et la calotte sphérique.

87. **Théorème I.** La surface de la calotte sphérique (zone à une base) est égale à celle d'un cercle, qui a pour rayon la corde de l'arc générateur de la calotte.

88. **Théorème II.** Lorsque la base d'une calotte sphérique est la $n^{\text{ème}}$ partie de la surface de cette calotte, la hauteur de la calotte est égale a $n-1$ fois la $n^{\text{ème}}$ partie du diamètre de la sphère.

89. **Théorème III.** Si l'on divise une demi-circonférence en trois parties égales et qu'on la fasse tourner autour de son diamètre,

1° la zone engendrée par l'axe du milieu est égale à la somme des deux zones décrites par les arcs extrêmes;

2° la surface engendrée par la corde de l'arc du milieu est aussi égale à la somme des surfaces engendrées par les cordes extrêmes.

90. **Problème I.** Couper une sphère par un plan tel que le cercle de la section soit égal à la différence des deux zones dans lesquelles le plan divise la surface de la sphère. — Le plan sécant divise le diamètre de la sphère en moyenne et extrême raison.

91. **Problème II.** Séparer d'une sphère une calotte, qui soit double de la surface latérale du cône inscrit dans la calotte et ayant même base qu'elle. — L'arc générateur de la calotte est le tiers de la circonférence d'un grand cercle de la sphère, et la surface de la calotte est les trois quarts de la surface de la sphère.

92. **Problème III.** Séparer d'une sphère une calotte, qui soit la moitié de la surface latérale du cône circonscrit à la calotte et ayant même base qu'elle. — La hauteur de la calotte est les deux tiers du rayon de la sphère.

93. **Problème IV.** Séparer d'une sphère une calotte, qui soit égale à la surface latérale du cône, qui a même base que la calotte et pour sommet le centre de la sphère. — La hauteur de la calotte

est le cinquième du diamètre de la sphère, et la surface do la calotte est aussi le ciuquième de la surface de la sphère.

94. Problème V. Séparer d'uue sphèro uno calotto, qui soit égale à la surface latérale du cône, qui a même base que la calotto et pour sommet l'extrémité opposée du diamètre perpeudiculaire à cette base. — La demi-corde de l'arc géuérateur de la calotte est égale au plus grand segmeut du rayou divisé eu moyenne et extrême raison.

95. Problème VI. Séparer d'une sphère uue calotte, qui augmentée de son cercle do base, soit équivalente à la moitié do la surface de la sphère. — La hauteur de la calotte est égale à l'excès du diamètre sur le côté du carré inscrit dans uu grand cercle de la sphère.

XIV. Questions sur la sphère.

96. Théorème I. Pour quo le volumo d'une sphèro soit exprimé par le même nombre que la surface, il faut et il suffit que le rayon soit égal à 3.

97. Théorème II. Le volumo compris entre deux sphères concentriques de rayons R et r est égal à celui d'un tronc de côue, qui a pour bases les grands cercles de ces sphères et pour hauteur la quadruple distance des deux surfaces sphériques, ou

$$V = \pi(R^2 + Rr + r^2) + \tfrac{4}{3}(R - r).$$

* 98. Théorème III. Si l'on divise uue droite $AB = 2R$ (fig. 5.) en deux parties quelconques $AC = 2r$ et $CB = 2r'$, et que l'on décrive sur les trois droites AB, AC et BC comme diamètres, et d'un même côté, trois demi-cercles APB, AMC et CNB, la figure comprise entre ces trois demi-cercles engendre, en tournant autour de AB, un volume qui a pour mesure $4\pi Rrr'$.

* 99. Théorème VI. Sur le diamètre ACB (fig. 6.) d'un demi-cercle ADB on construit un trianglo isocèle SAB, dont le sommet S soit situé au-dessus du demi-cercle et dont les côtés SA et SB rencontreut en E et F la tangente EDF parallèle au diamètre. On forme aiusi le trapèze isocèle $AEFB$ qu'on fait tourner autour du diamètre AB.

1° Si le côté SA du triangle isocèlo SAB est égal au diamètre AB, la ligne briseé $AE + EF + FB$ engendre une surface qui est égale à cello de la sphère ayant AB pour diamètre.

2° Si au coutrairo la hauteur SDC du triaugle isocèle SAB est

égale au diamètre AB, le trapèze $AEFB$ engendre un volume, qui est égal à celui de la sphère ayant AB pour diamètre.

100. Problème I. On construit un cylindre ou un cône sur un grand cercle de la sphère; quelle devra être la hauteur H du cylindre ou du cône, pour que son volume soit égal à celui de la sphère? — On trouve $H = \frac{4}{3}R$ ou $H = 4R$.

101. Problème II. Un cylindre est circonscrit à deux sphères égales de rayon R, dont les centres sont séparés par une distance D; calculer le volume V compris entre les deux sphères, qui est terminé par le cylindre. — On trouve que

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2(3D - 4R).$$

Si les deux sphères sont tangentes, ce volume sera

$$V = \frac{2}{3}\pi R_3.$$

* 102. Théorème VII. Lorsque le volume d'un cône est égal au produit de la surface totale par le huitième de la hauteur, le cône est le tiers de la sphère qui a même rayon que la base du cône.

* 103. Théorème VIII. Lorsque la hauteur d'un cône circonscrit à une sphère est double du diamètre de cette sphère, la surface totale et le volume du cône sont aussi doubles de la surface et du volume de la sphère.

104. Problème III. Un cône a son sommet au centre d'une sphère, de rayon R, et son plan de base tangent à la surface de cette sphère; déterminer le rayon x de la base du cône, pour que la surface totale du cône soit équivalente à la surface de la sphère. — On trouve $x = \frac{4}{3}R$.

105. Problème IV. Etant donnés le rayon $AC = R$ de la base d'un cône et sa hauteur $SD = H$ (fig. 7.), à quelle distance $SD = x$ du sommet faut-il mener un plan DEF parallèle à la base, pour que le volume du tronc de cône résultant $ABFE$ soit égal à n fois celui de la sphère qui a x pour diamètre. — On trouve que

$$x = H\sqrt[3]{\frac{2R^2}{2R^2 + nH^2}}.$$

Pour $n = 2$, on a $x = H\sqrt[3]{\frac{R^2}{C^2}}$.

106. Théorème IX. Sur le diamètre AB (fig. 8.) d'un demi-cercle on construit un rectangle $ABCD$ circonscrit au demi-cercle,

et l'on y mène la diagonale AC. Si l'on fait tourner toute la figure autour du diamètre AB, le triangle ABC, le demi-cercle AMB et le rectangle $ABCD$ engendrent trois volumes, qui sont entre eux comme les trois premiers nombres entiers 1, 2 et 3.

107. Théorème X. Du sommet O d'un carré $OACB$ (fig. 9.), avec le côté OA pour rayon, on décrit le quadrant AMB et l'on mène la diagonale AA. Si l'on fait tourner toute la figure autour du rayon OA comme axe, le triangle rectangle OAB, le segment circulaire $ABMA$ et le triangle mixtiligne $AMBC$ engendrent des volumes égaux.

108. Théorème XI. D'un point A (fig. 10.), pris hors d'un cercle O, on mène les deux tangentes AB et AC, le diamètre de contact BOD de l'une d'elles AB et la perpendiculaire CE abaissée sur ce diamètre du point de contact C de l'autre AC. Si l'on fait tourner toute la figure autour de BD, le triangle mixtiligne $ABMC$ engendre un solide qui est équivalent au cône engendré par le triangle ABE.

109. Problème V. A un demi-cercle $BMCD$ (fig. 10.), de rayon R, on mène deux tangentes AB et AC, dont la première AB est perpendiculaire à l'extrémité B du diamètre BD. Déterminer la tangente AB, de manière que la somme des surfaces engendrées par les deux tangentes dans leur révolution autour du diamètre BD soit égale à n fois la surface sphérique engendrée par la demi-circonférence. — On trouve que

$$AB^2 = R^2(n-1+\sqrt{n^2+1}).$$

Pour $n = \frac{3}{4}$, on a $AB = R$.

108. Problème VI. Couper un demi-cercle, de rayon R, en deux parties par une corde parallèle au diamètre, de manière qu'en tournant autour de ce diamètre elles engendrent des volumes équivalents. — La longueur de la corde est égale à $R\sqrt[3]{4}$.

109. Problème VII. Dans une sphère de rayon R inscrire le parallélépipède rectangle de volume maximum. — On obtient le cube ayant $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$ pour côté.

110. Problème VIII. Dans une sphère donnée inscrire le prisme triangulaire régulier dont le volume soit maximum. — Le plus grand prisme régulier, que l'on puisse inscrire dans une sphère, est égal au cube du rayon de la sphère; la base a pour côté celui du carré inscrit dans un grand cercle de la sphère, et la hauteur du prisme est égale aux deux tiers du triangle équilatéral inscrit dans le même grand cercle.

XV. Segment sphérique.

111. Théorème I. Le segment sphérique à une base est équivalent au cylindre, qui a pour rayon de base la hauteur H du segment et pour hauteur l'excès du rayon R de la sphère sur le tiers de la hauteur du segment; du

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right)$$

112. Problème I. D'une sphère de rayon R on sépare un segment par un plan mené à une distance x du centre; calculer le volume V du segment, le volume V' du cône circonscrit qui touche la sphère suivant le cercle de base du segment et le volume V'' du cône inscrit qui a même base que le segment. — On trouve que

$$\frac{V'}{(R+x)^2} = \frac{V}{(2R+x)x} = \frac{V''}{(R+x)x} = \tfrac{1}{3}\pi . \frac{(R-x)^2}{x}.$$

113. Problème II. Calculer la hauteur d'un cylindre inscrit dans une sphère de rayon R, dont le volume est égal à la somme des deux segments sphériques à une base, qui s'appuient extérieurement sur les deux bases du cylindre. — La hauteur du cylindre, augmenté du rayon de la sphère, est égale au côté du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle de la sphère.

114. Problème III. Séparer d'une sphère un segment à une base, qui soit double du cône inscrit dans le segment et ayant même base que lui. — Le segment n'est autre que la demi-sphère.

115. Problème IV. Séparer d'une sphère un segment, à une base qui soit la moitié du cône circonscrit au segment et ayant même base que lui. — La distance de la base du segment à l'extrémité opposée du diamètre perpendiculaire à cette base est égale au côté du carré inscrit dans un grand cercle de la sphère.

116. Problème V. Séparer d'une sphère un segment à une base, qui soit égal au cône de même base et ayant son sommet au centre de la sphère. — La hauteur du segment est égale à la plus petite partie du rayon de la sphère divisé en moyenne et extrême raison.

117. Problème VI. Séparer d'une sphère un segment à une base, qui soit égal au cône de même base et ayant pour sommet l'extrémité opposée du diamètre perpendiculaire à cette base. — La hauteur du segment est égale à $\frac{1}{4}R(7-\sqrt{17})$.

118. Problème VII. Séparer d'une sphère un segment à

une base, qui soit moyen proportionnel entre les deux cônes, l'un inscrit et l'autre circonscrit, qui ont même base que lui. — La base du segment divise le rayon en moyenne et extrême raison, à partir du centre de la sphère. Le segment est en même temps la différence entre les deux cônes, l'un circonscrit et l'autre inscrit.

119. Théorème II. Lorsque la hauteur d'un segment sphérique à une base est les trois cinquièmes du rayon de la sphère, le segment est équivalent à la sphère ayant cette hauteur pour rayon.

120. Théorème III. De toutes les calottes sphériques de même surface, la demi-sphère enveloppe le plus grand segment sphérique.

* 121. Théorème IV. Le carré du rayon ϱ de la section équidistante des deux bases d'un segment sphérique égale la demi-somme des carrés des rayons r et r' de ces bases, plus le carré de la demi-hauteur $\frac{h}{2}$ du segment; ou

$$\varrho^2 = \frac{r^2 + r'^2}{2} + \frac{h^2}{4}$$

122. Théorème V. Le segment sphérique à deux bases égale le cylindre qui a même hauteur h que le segment et pour base la section $\pi\varrho^2$ équidistante des deux bases, moins la demi-sphère qui a pour diamètre la hauteur du segment, ou

$$V = \pi\varrho^2 h - \tfrac{1}{12}\pi h^3.$$

* 123. Théorème VI. Le segment shérique à deux bases égale le cylindre qui a pour base un grand cercle πR^2 de la sphère et pour hauteur celle H du segment, moins le tronc de cône qui a même hauteur H que le segment et pour rayons de bases les distances d et d' du centre de la sphère aux deux bases du segment; ou

$$V = \pi R^2 H - \tfrac{1}{3}\pi H(d^2 + dd' + d'^2).$$

124. Problème VIII. Calculer le volume du segment sphérique à deux bases, en le considérant comme la différence entre deux segments sphériques à une base.

* 125. Theorème VII. Le segment sphérique à deux bases πR^2 et πr^2, qui s'appuie sur un grand cercle πR^2 de la sphère, est équivalent à la somme de trois cônes, qui ont même hauteur H que le segment et pour bases, l'une la base inférieure πR^2 et les deux autres la base supérieure πr^2 du segment; ou

$$V = \tfrac{1}{3}\pi H(R^2 + 2r^2).$$

126. **Théorème VIII.** Dans un segment sphérique, si la distance d de l'une des bases au centre de la sphère est égale au rayon r' de l'autre base, réciproquement la distance d' de cette seconde base au centre de la sphère est égale au rayon r de la première base.

Dans ce cas la hauteur H du segment est égalo à la somme ou à la différence des rayon r et r' des deux bases du segment, suivant que lo centro de la sphèro est intérieur ou extérieur au segment.

Réciproquement, si la hauteur d'un segment sphérique est égale à la somme ou à la différence des rayons des deux bases du segment, la distance do chaque base au centre de la sphère est égale au rayon de l'autro base.

127. **Théorème IX.** Lorsque la hauteur H d'un segment sphérique est égalo à la somme ou à la différence des rayons r et r' des deux bases du segment, le segment égale la demi-sphère qui a cette hauteur pour rayon, moins ou plus le cylindre qui a même hauteur que le segment et pour rayon de baso la moyenne proportionnello entre les rayons des deux bases du segment; ou

$$V = \tfrac{2}{3}\pi H^3 \mp \pi r r' H,$$

suivant que $H = r \pm r'$.

Le segment, dont les deux bases ont $\tfrac{4}{5}R$ et $\tfrac{3}{5}$ pour rayons est les $\tfrac{217}{250}$ ou les $\tfrac{19}{250}$ de la sphère, suivant que le segment contient ou non le centre do la sphère.

* 128. **Problèmo IX.** Connaissant les rayons $AB = r$, $CD = r'$ (fig. 11.) de deux sections parallèles faites dans une sphère et la distance h do ces deux sections, calculer lo rayon R do cette sphère. — On trouve quo

$$R^2 = \frac{(h^2 + r^2 + r'^2)^2 - 4r^2 r'^2}{4h^2}.$$

129. **Théorème X.** Sur la même sphère, de tous les segments sphériques de mêmo hauteur, le segment symétrique a le plus grand volume.

130. **Problèmo X.** Un côno est circonscrit à deux sphères de rayons R et r, dont les centres sont séparés par une distance D, calculer le volume compris entro les deux sphères, qui est terminé par lo cône. — On trouve quo

$$3DV = \pi(R^2 + Rr + r^2)(D + R - r)(D + r - R) - 2\pi R^3 (D + r - R) - 2\pi r^3 (D + R - r).$$

Si les deux sphères sont tangentes, on aura

$$V = \tfrac{4}{3}\pi \frac{R^2 r^2}{R + r}$$

XVI. Solide engendré par la révolution d'un segment circulaire.

131. Théorème I. Le volume engendré par la révolution d'un segment circulaire autour du diamètre passant par l'une de ces extrémités, a pour mesure la zone qui l'enveloppe multiplié par le sixième de la hauteur de cette zone.

Ce volume est aussi équivalent au cône qui a pour rayon de base la hauteur du segment et pour hauteur le rayon de la sphère.

132. Théorème II. Le volume engendré, par la révolution autour du diamètre AC (fig. 12.), du triangle mixtiligne $ABMC$, formé par le diamètre AB, une corde AC issue de son extrémité et l'arc compris BMC, est équivalent à deux cônes, qui ont pour hauteur le rayon R de la sphère et pour rayons de base, l'un la corde BC qui sous-tend l'arc et l'autre la projection BD de cette corde sur le diamètre AB.

133. Théorème III. Si l'on divise une demi-circonférence $AECB$ (fig. 12.) en trois parties égales en C et E et que l'on mène les cordes AE et AC, le triangle mixtiligne AEC, dans sa révolution autour du diamètre AB, engendre un solide équivalent à la moitié de la sphère.

134. Problème I. Dans un demi-cercle $AMCNB$ (fig. 13.) on mène la corde AC faisant un angle α avec le diamètre AB. On demande de calculer les volumes engendrés par la révolution des deux segments circulaires $AMCA$, $CNBC$ autour du diamètre AB. — On trouve que

$$\text{vol.}AMCA = \tfrac{4}{3}\pi R^3\cos^4\alpha, \quad \text{vol.}BNCB = \tfrac{4}{3}\pi R^3\sin^4\alpha.$$

Pour $\alpha = 60^0$, on a

$$\frac{\text{vol.}AMCA}{1} = \frac{\text{vol.}BNCB}{9} = \frac{\text{sphère}\,AO}{16}$$

135. Problème II. D'un point C pris sur une demi-circonférence ACB (fig. 13.), on mène les cordes CA et CB aux extrémités A et B du diamètre AB et l'on tire la droite CD perpendiculaire à ce diamètre. Quelle doit être la distance $AD = x$, pour qu'en faisant tourner la figure autour du diamètre AB, le segment circulaire $AMCA$ engendre un volume égal à la moitié du cône engendré par le triangle BCD. — On obtient la valeur x en retranchant du diamètre AB le double du côté du décagone regulier inscrit.

136. Problème III. Par l'extrémité B d'un quart de cercle ACB (fig. 14.) on mène la droite BD parallèle et égale à la moitié

du rayon opposeé AO, et l'on tire la droite AD, qui coupe l'arc en C. Calculer les volumes qu'engendrent le segment circulaire $AMCA$ et le triangle mixtiligne BCD, d'abord en tournant autour du rayon $AO = R$, puis autour du rayon BO. — On trouve

$$1^0.\quad \text{vol.}\, AMCA \text{ autour de } AO = \frac{1}{2\varrho}\cdot\tfrac{4}{3}\pi R^3,$$

$$2^0.\quad \text{vol.}\, AMCA \text{ autour de } BO = \frac{2}{2\varrho}\cdot\tfrac{4}{3}\pi R^3,$$

$$3^0.\quad \text{vol.}\, BCD \text{ autour de } AO = \frac{1}{2\varrho}\cdot\tfrac{4}{3}\pi R^3,$$

$$4^0.\quad \text{vol.}\, BOD \text{ autour do } BO = \frac{7}{400}\cdot\tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

XVII. Corps de révolution engendrés par des triangles.

137. Théorème I. Lorsqu'un triangle, tournant successivement autour de ses trois côtés engendre les volumes A, B, C, on a, entre ces six quantités, les relations

$$aA = bB = cC,$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} - \frac{2\cos\alpha}{BC}$$

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} + \frac{c}{C} - \frac{2\ \cos\sqrt{bc}}{\sqrt{BC}},$$

où α exprime l'angle qui, dans le triangle, est opposé au côté a.

Si l'angle α est droit, les deux dernières de ces relations deviennent

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2}.\quad \frac{a}{A} = \frac{b}{B} + \frac{c}{C}.$$

138. Problème I. Déterminer la relation, qui doit exister entre les trois côtés a, b, c pour que le volume A, engendré par la révolution du triangle autour du côté a, soit égal à la somme des volumes B et C qu'engendre le triangle, en tournant autour des deux côtés b et c. — On doit avoir $a = \frac{bc}{b+c}$.

139. Problème II. Calculer les trois côtés a, b, c d'un triangle, connaissant les volumes A, B, C qu'engendre ce triangle, en tournant successivement autour de ces trois côtés. — On trouve que

$$\frac{1}{a^3} = \frac{1}{12}\pi A^3\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right).$$

Si l'anglo opposé au côté a est droit, on aura

$$\pi a^3 A^3 = 3B^2C^2.$$

140. Théorème II. Lorsqn'uu triangle équilatéral, ayaut a pour côté, tourne autour d'un axo extérieur, meué par un sommet et incliné d'un augle α sur la hauteur issue de ce sommet, il engeudre un volume égal à $\frac{1}{4}\pi a^3 \sin\alpha$.

* 141. Théorème III. Lorsquo, dans nn triangle ABC, on mène une parallèle DE à la base BC, à mi-distauce du sommet A, et qu'on fasse tourner le triangle ABC autour de cette baso, le volnme eugendré par le petit triangle ADE est la moitié du volume engeudré par le graud triangle ABC.

142. Théorème IV. Daus uu losauge $ABCD$ circouscrit autour d'un cercle de rayou R, la diagonale BD est égale au côté AB. Si les deux demi-losanges ABC et BAD tournent autour des diagonales respectives AC et BD, ils engendrent les volumes $\frac{16}{9}\pi R^3$ et $\frac{16}{9}\pi R^3\sqrt{3}$.

Si le losange est un carré, les deux volumes eugeudrés serout égaux chacun à $\frac{4}{3}\pi R^3\sqrt{2}$.

143. Théorème V. Un triangle rectangle est inscrit daus uu demi-cercle de rayon R, et l'un des deux augles aigus est égal à α. Si le triangle tourue autour de l'hypoténuse, il engeudre lo volume

$$V = \tfrac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\alpha.$$

Pour $\alpha = 15^0$, on a $V = \frac{1}{6}\pi R^3$,
„ $\alpha = 30^0$, „ $V = \frac{1}{2}\pi R^3$,
„ $\alpha = 45^0$, „ $V = \frac{2}{3}\pi R^3$.

144. Théorème VI. Lorsqu'uu triauglo tourno d'abord autour d'un de ses côtés, puis autour d'uue droite parallèle, meuée extérieurement à uue distance d de ce côté, il eugondre deux volumes dout la différeuce est égale au produit do la surface du triangle par la circonféreuce $2\pi d$.

145. Problème III. Calculer la baso x et le côté y d'un triangle isocèle, connaissaut le côté a du carré équivalent et le rayou r de la sphèro qui a même surface quo le solide engeudré par la révolution du triangle isocèle autour do sa base x. — On trouve quo

$$r^3 x = a^4,\quad 4a^4 r^6 y^2 = 16 r^{12} + a^{12}.$$

146. Théorème VII. Un triangle ABC est inscrit dans un demi-cercle de rayon R; les rayons AO, BO et CO sont inclinés sur le diamètre des angles respectifs α, β et γ; si le demi-cercle tourne autour de son diamètre, le triangle ABC engendre un volume V, qui a pour expression

$$V = \tfrac{1}{3}\pi R^3[\sin(\beta-\gamma)(\sin\beta+\sin\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)(\sin\gamma+\sin\alpha) + \sin(\alpha-\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)].$$

147. Théorème VIII. Dans un demi-cercle de rayon R (fig. 15.) on mène une corde CD parallèle au diamètre AB par le milieu C du quadrant AE et l'on tire les droites AC et AD. Si le triangle ACD tourne autour du diamètre AB, il engendre un solide équivalent à une sphère, qui a CD pour diamètre; ce volume est $\frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{2}$.

XVIII. Corps de révolution engendrés par des quadrilatères.

* 148. Théorème I. A un cercle de rayon r on circonscrit un trapèze birectangle (fig. 3.), dont la droite menée à égales distances des bases est égale à R; si le trapèze tourne autour du côté perpendiculaire aux bases, il engendre le volume

$$\tfrac{4}{3}\pi Rr(2R-r).$$

Ce volume sera égal à n fois la sphère de rayon r pour

$$R = \tfrac{1}{4}r(1+\sqrt{1+8n}).$$

Pour $n=10$, on a $R=\frac{5r}{2}$; les rayons des deux bases du tronc seront

$$\tfrac{1}{2}r(5+\sqrt{5}),\quad \tfrac{1}{2}r(5-\sqrt{5});$$

$9\pi r^2$ sera la surface latérale et $24\pi r^2$ la surface totale du tronc de cône.

Pour $n=15$, on aura $R=3r$; les rayons des deux bases du tronc seront

$$r(3+\sqrt{3}),\quad r(3-\sqrt{3});$$

$16\pi r^2$ sera la surface latérale et $40\pi r^2$ la surface totale.

* 149. Théorème II. Lorsqu'un losange tourne autour d'une droite menée par un sommet parallèlement à la diagonale opposée, les deux triangles isocèles qui s'appuient sur cette diagonale engendrent des solides dont l'un est double de l'autre, et le solide total engendré par le losange a pour mesure $V=\frac{1}{4}\pi a^2 b$, a et b étant les deux diagonales, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à l'axe.

Le volnme engendré par le triangle inférieur, celui décrit par le triangle supérieur et le volume produit par le losauge sont eutre eux comme les nombres 1, 2, 3.

Si la diagouale a, perpendiculaire à l'axe, est égale au côté du losange, on a $a\sqrt{3} = b$, et par suite $V = \frac{1}{6}\pi b^3$. Dans ce cas le volume eugendré est équivalent à la sphère qui a pour diamètre la grande diagonale du losange.

* 150. Problème I. A un demi-cercle AIB (fig. 16.) de rayon R on circonscrit un trapèze isocèle $CEFD$ et l'on fait tourner toute la figure autour du diamètre AB. Quelle doit être la demi-base inférieure CO du trapèze, pour qu'il engendre un volume qui soit dans le rapport de m à n à celui de la sphère engeudrée par le demi-cercle. — On trouve que

$$CO = \frac{2R}{5n}(3m \pm \sqrt{4m^2 - 5n^2});$$

la demi-base supérieure du trapèze sera

$$EI = \frac{R}{5n}(2m \pm \sqrt{4m^2 - 5n^2}).$$

Pour $m = 3$ et $n = 2$, on a $CO = R$, $EI = R$, et $CO = \frac{13}{5}R$, $EI = \frac{1}{5}R$.

* 151. Théorème III. Lorsqn'un carré, coustruit sur le côté a, tourne autour d'nne droite extérieure, menée par un sommet et inclinée d'un angle α sur le côté adjacent, il engeudre un solide qui a pour expression

$$\pi a^3(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Ce valeur se réduit à πa^3, si l'axe est perpeudiculaire à la diagonale aboutissante.

* 152. Théorème IV. Les deux côtés AB et AD d'un rectangle $ABCD$ sout a et b; sa diagonale $AC = c$ fait un angle φ avec une droite menée extérieurement par son extrémité C. Si le rectangle tourne autour de cette droite, il engendre nn solide qui a pour expression $\pi abc \sin\varphi$.

Si l'axe est perpendiculaire sur la diagonale aboutissante, cette valeur se réduit à πabc.

Dans ce cas les volumes engeudrés par les quatre triangles qui s'appuient sur les diagonales du rectangle sont fournis par les égalités

$$\frac{\text{vol.}\,ABC}{b(b^2+c^2)} = \frac{\text{vol.}\,BCD}{ac^2} = \frac{\text{vol.}\,CDA}{b(c^2+a^2)} = \frac{\text{vol.}\,DAB}{(3b-a)c^2} = \frac{\pi a}{3c}.$$

Si au lieu de l'inclinaison φ de la diagonale sur l'axe, on donne l'angle α que fait le côté adjacent b avec cet axe, le volume engendré sera

$$\pi ab(a\cos\alpha + b\sin\alpha).$$

* 153. Théorème V. Lorsqu'un trapèze tourne successivement autour de ses deux bases B et b, il engendre deux solides, dont les volumes sont

$$\tfrac{1}{3}\pi H^2(B+2b), \quad \tfrac{1}{3}\pi H^2(2B+b),$$

où H désigne la hauteur du trapèze.

XIX. Solides engendrés par la révolution des polygones réguliers.

* 154. Théorème I. Lorsqu'un polygone régulier de n côtés fait une révolution entière autour de l'un c de ses côtés, il engendre un solide V équivalent au cylindre, qui a pour base le cercle πr^2 inscrit dans le polygone régulier et pour hauteur le périmètre nc du polygone; ou

$$V = n\pi r^2 c.$$

* 155. Théorème II. Lorsque la moitié d'un polygone régulier, d'un nombre pair $2n$ de côtés, tourne autour du diamètre extrême $2R$ du cercle circonscrit, elle engendre un solide équivalent au cône, qui a pour base le cercle inscrit πr^2 et pour hauteur le double diamètre $4R$ du cercle circonscrit; ou

$$V = \pi r^2 . \tfrac{4}{3}R = \tfrac{4}{3}\pi R r^2.$$

* 156. Théorème III. Lorsque la moitié d'un polygone régulier, d'un nombre pair $2n$ de côtés, tourne autour du diamètre extrême du cercle inscrit, elle engendre un solide V équivalent à la demi-somme des cônes, ayant pour bases les cercles inscrit et circonscrit, et pour hauteur commune le double diamètre du cercle inscrit; ou

$$V = \tfrac{1}{2}\pi(R^2 + r^2) . \tfrac{4}{3}r = \tfrac{2}{3}\pi r(R^2 + r^2).$$

* 157. Théorème IV. Lorsque la moitié d'un polygone régulier, d'un nombre impair $2n+1$ de côtés, tourne autour de la droite qui joint son sommet extrême au milieu du côté opposé, elle engendre un solide V, qui est équivalent au cône dont le rayon de base est la demi-somme des rayons r et R des cercles inscrit et circonscrit, et dont la hauteur est le double diamètre du cercle inscrit; ou

$$V = \pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 . \tfrac{4}{3}r = \tfrac{1}{3}\pi r(R+r)^2.$$

* 158. Théorème V. Lorsqu'on inscrit et que l'ou circouscrive un demi-cercle à uu demi-polygone régulier, d'uu uombre pair de côtés, et que l'ou fasse tourner la figure autour du diamètre commun,

1° la surface S, engendrée par le demi-polygone régulier, est moyenne proportionnelle entre les surfaces des deux sphères, l'une inscrite et l'autre circonscrite; ou

$$S = 4\pi Rr;$$

2° le carré du volume engendré par le demi-polygone régulier est au carré de la sphère inscrite, comme la sphère circonscrite est au corps engendré par le demi-polygone régulier; ou

$$V^2 . V = (\tfrac{4}{3}\pi r^3)^2 . (\tfrac{4}{3}\pi R^3) = (\tfrac{4}{3}\pi r^2 R)^3.$$

Digitized by Google

XXVIII.

Miscellen.

1.

Bemerkung zur mechanischen Quadratur.

Entsprechen den Functionswerten

$$y_0, y_1, y_2, y_3$$

die Argumente

$$x_0 = \frac{h}{2} - \lambda h, \quad x_1 = \frac{h}{2} - \mu h, \quad x_2 = \frac{h}{2} + \lambda h, \quad x_3 = \frac{h}{2} + \mu h$$

so ergiebt sich mit Hülfe der Interpolationsformel von Lagrange:

$$\int_0^h y\,\partial x = \frac{h}{24} \frac{(1-12\mu^2)(y_0+y_3)-(1-12\lambda^2)(y_1+y_2)}{\lambda^2-\mu^2}$$

Zur Lösung setze man $x - \frac{h}{2} = t$.

Das Integral ist genau, wenn

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3$$

ist.

Kiel, Juli 1875. Ligowski.

2.

Auflösung einer symmetrischen Exponentialgleichung.

Bekanntlich haben die Zahlen 2 und 4 die Eigentümlichkeit, dass sie der Gleichung

$$x^y = y^x$$

genügen. Es ist aber leicht den allgemeinen Ausdruck für x und y zu finden. Potenzirt man mit dem Exponenten $\frac{1}{x}$ und dividirt dann durch x, so kommt:

$$x^{\frac{y}{x}-1} = \frac{y}{x}$$

Setzt man jetzt $y = ux$, so erhält man nach Potenzirung mit $\frac{1}{u-1}$ (wofern u nicht $= 1$):

$$x = u^{\frac{1}{u-1}}; \qquad y = u^{\frac{u}{u-1}}$$

wo u willkürlich variabel bleibt. Geht u stetig in 1 über, so wird $x = y = e$, während allgemein $x = y$ genügt.

R. Hoppe.

XXIX.

Beiträge zur Theorie der Reihen.

Von

E. Meissel.

Abdruck aus dem Programm der Realschule in Kiel 1875.

Seit Euler sind in der Behandlung der Reihenlehre bedeutende Fortschritte gemacht, und man pflegt heut nicht mehr unendlichen Reihen Beweiskraft beizulegen, ohne von deren Convergenz sich überzeugt zu haben oder halbconvergente Reihen ohne Eingrenzung ihres Restgliedes bei numerischen Bestimmungen anzuwenden. Nichtsdestoweniger gehört die Lehre von den Reihen immer noch zu denjenigen Teilen der Analysis, welche hinsichtlich des Stoffs und seiner Begründung der Ausdehnung und Vertiefung dringend bedürfen.

Die angenäherte Darstellung einer Grösse durch eine geschlossene Anzahl von Gliedern, wie bei den Interpolations- und Quadraturformeln ist z. B. ohne Fehlereingrenzung ziemlich wertlos, da man hier auf jeden empirischen Anhalt, welche an sich convergente Reihen gewähren, verzichten muss. Diese Bemerkung, welche Lejeune-Dirichlet mir einst gesprächsweise machte, veranlasste mich zur Untersuchung des allgemeinen Restausdrucks der parabolischen Interpolationsformel von Lagrange, den ich in meinem Lehrbuch der Differentialrechnung, pag, 316, Berlin 1854, H. Peters, zuerst mitgeteilt habe. — Ueber die vielfachen Lücken der Lehre von den Reihen und ihren Missbrauch klagt schon Abel *) in einem an Professor Holmboe in

---

*) Cf. Oeuvres complètes, tome second, p. 266.

Christiania gerichteten Schreiben: „Enfin mes yeux sont dessillés d'une manière frappante, car à l'exception des cas les plus simples, par exemple les séries géométriques, il ne se trouve dans les mathématiques presque aucune série infinie dont la somme est déterminée d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire, la partie la plus essentielle des mathématiques est sans fondement. Pour la plus grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant pp."

Je seltener aber die Fälle sind, in denen aus der Anwendung divergenter Reihen falsche Resultate entspringen, um so grösseres Gewicht ist denselben für die Reihenlehre beizulegen, namentlich wenn sie einen hinreichenden Grad von Allgemeinheit besitzen und das wahre Resultat auf exactem Wege gefunden werden kann.

In der folgenden Arbeit werde ich zunächst eine besondere Classe von Reihen behandeln, deren Summe mit Hilfe divergenter Reihen in gewissen Fällen richtig, in andern fehlerhaft dargestellt wird, und die Ursache des Fehlers, sowie seinen Betrag in einem speciellen Falle feststellen.

Es sei für die Folge stets $\Pi n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ und die Reihe gegeben

$$(1)\quad S = fx - a\alpha f'(x+a) + \frac{a^2\alpha(\alpha+2)}{\Pi 2} f''(x+2a) - \frac{a^3(\alpha+3)^2}{\Pi n} f'''(x+3a) + \ldots$$
$$= a\sum_0^\infty \frac{(-a)^n(\alpha+n)^{n-1} f^N(x+na)}{\Pi n}$$

Entwickelt man jedes Glied derselben nach aufsteigenden Potenzen von a, so findet man mit Hülfe der Gleichung

$$(m+1)^{n-1} - \frac{n}{1} m^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(m-1)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(m-2)^{n-1} + \ldots = 0$$

welche der Gleichung der Differenzen-Rechnung

$$\Delta^n (x^{n-1}) = 0$$

entspricht, dass die Entwickelung von S die Form annimmt

$$S = fx - a\alpha f'x + \frac{(a\alpha)^2}{\Pi 2} f''x - \frac{(a\alpha)^3}{\Pi 3} f'''(x) + \ldots$$

welche die Function $f(x - a\alpha)$ nach Potenzen von a entwickelt. Würde

man nun der ersten Entwickelung bindende Beweiskraft beilegen, so müsste man erhalten:

$$(2)\quad f(x-a\alpha) = fx - a\,\alpha f'(x+a) + \frac{a^2\alpha(\alpha+2)^1 f''(x+2a)}{\Pi 2} - \ldots$$
$$= a\sum_0^\infty \frac{(-a)^n(\alpha+n)^{n-1} f^N(x+na)}{\Pi n}$$

Diese Gleichung ist stets richtig, so lange $f(x)$ eine rationale ganze Function von x bedeutet.

In unzähligen anderen Fällen gilt sie gleichfalls innerhalb gewisser Einschränkungen der Grössen x, a und α.

Setzt man z. B.
$$f(x) = e^{-x}$$
und multiplicirt mit e^x, so ergiebt sich

$$(3)\quad e^{a\alpha} = 1 + \alpha\frac{ae^{-a}}{\Pi 1} + \alpha(\alpha+2)^1\frac{a^2e^{-2a}}{\Pi 2} + \frac{\alpha(\alpha+3)^2a^3e^{-3a}}{\Pi 3} + \ldots$$

Die rechte Seite dieser Reihe convergirt zwar für alle reellen Werte von α und für alle reellen Werte von a, welche mit Einschluss der Gleichheit grösser als

$$a = -0.\,2784\,6454\,2761$$

d. i. die Wurzel der Gleichung $1 + ae^{1+a} = 0$ sind; indessen drückt die linke Seite nur so lange die Summe der Reihe aus, als a die Grenze Eins nicht überschreitet. Uebrigens ist es leicht, die Relation (3) aus der Umkehrungsformel von Lagrange herzuleiten.

In einer Menge von Fällen ist die Gleichung (2) allgemein unrichtig. Setzen wir z. B. $fx = \frac{1}{x}$, so würde folgen für $a = 1$

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{(x+1)^2} + \frac{\alpha(\alpha+2)^1}{(x+2)^3} + \frac{\alpha(\alpha+3)^2}{(x+3)^4} + \ldots$$

oder

$$(4)\quad \frac{1}{x(x-a)} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{(\alpha+2)}{(x+2)^3} + \frac{(\alpha+3)^2}{(x+3)^4} + \frac{(\alpha+4)^3}{(x+4)^5} + \ldots$$
$$= \sum_1^\infty \frac{(\alpha+n)^{n-1}}{(x+n)^{n+1}} = S$$

Diese Reihe convergirt für alle reellen Werte von x und α mit Ausnahme der negativen ganzen Zahlen für x. Von der Unrichtigkeit der Summe überzeugt man sich schon, indem man $y = \alpha$ setzt.

Um nun den wahren Summenwert zu bilden, benutze man die Gleichung (3)

$$e^{\alpha z} = 1 + \frac{\alpha z e^{-z}}{\Pi 1} + \frac{\alpha(2+\alpha)z^2 e^{-2z}}{\Pi 2} + \dots = 1 + \alpha \sum_1^\infty \frac{(n+\alpha)^{n-1} z^n e^{-nz}}{\Pi n}$$

und mache

$$z e^{-z} = u e^{-u}$$

so lässt sich für jeden positiven Wert von z immer ein Wert von u innerhalb der Grenzen

$$1 \geqq u \geqq 0$$

auffinden, welcher dieser Gleichung genügt. Die wahre Summe der obigen Reihe ist dann stets

$$S = e^{\alpha u}$$

Die beiden Werte von z und u sind einander gleich, so lange z die Einheit nicht überschreitet, und lassen sich, wenn $z > 1$ ist, mit Hülfe einer dritten Veränderlichen explicirt darstellen.

Es sei nämlich

$$z = u e^p, \quad p \geqq 0$$

so folgt aus der Gleichung $z e^{-z} = u e^{-u}$

$$z = u + p$$

und daher

$$z = \frac{p e^p}{e^p - 1}; \quad u = \frac{p}{e^p - 1}$$

Nach diesen Vorbereitungen multipliciren wir die Gleichung

$$e^{\alpha u} = 1 + \alpha \sum_1^\infty \frac{(n+\alpha)^{n-1} z^n e^{-nz}}{\Pi n}$$

mit $e^{-xz} dz$ und integriren innerhalb der Grenzen $0 \leqq z \leqq \infty$, so ergiebt sich

$$\text{(5a)} \qquad \int_0^\infty e^{\alpha u - xz} dz = \frac{1}{x} + \alpha \sum_1^\infty \frac{(n+\alpha)^{n-1}}{(n+x)^{n+1}}$$

Die linke Seite zerlegt sich in

$$\int_0^1 e^{(\alpha - x)z} dz + \int_1^\infty e^{\alpha u - xz} dz$$

Das erste Integral wird

$$\frac{1-e^{-(x-\alpha)}}{x-\alpha}$$

Das zweite lässt sich durch Anbringung der vorhergehenden Substitution zunächst verwandeln in

$$\int_1^\infty e^{-\alpha p - z(x-\alpha)}dz = -\frac{1}{x-\alpha}\int_1^\infty e^{-\alpha p}\,de^{-z(x-\alpha)}$$

$$= \frac{e^{-(x-\alpha)}}{x-\alpha} - \frac{\alpha}{x-\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha p - \frac{(x-\alpha)p}{1-e^{-p}}}dp$$

und wenn man $p = -\log v$ setzt, in

$$= \frac{e^{-(x-\alpha)}}{x-\alpha} - \frac{\alpha}{x-\alpha}\int_0^1 v^{\alpha-1}\,.\,v^{\frac{x-\alpha}{1-v}}dv$$

Hieraus ergiebt sich für die linke Seite von (5a)

$$\frac{1}{x-\alpha} - \frac{\alpha}{x-\alpha}\int_0^1 v^{\alpha-1}\,.\,v^{\frac{x-\alpha}{1-v}}dv$$

und es wird

$$\frac{1}{x-\alpha} - \frac{\alpha}{x-\alpha}\int_0^1 v^{\alpha-1}\,.\,v^{\frac{x-\alpha}{1-v}}dv = \frac{1}{x} + \alpha\sum_1^\infty \frac{(n+\alpha)^{n-1}}{(n+x)^{n+1}}$$

oder:

$$(5)\quad \sum_1^\infty \frac{(n+\alpha)^{n-1}}{(n+x)^{n+1}} = \frac{1}{x(x-\alpha)} - \frac{1}{x-\alpha}\int_0^1 v^{\alpha-1}\,.\,v^{\frac{x-\alpha}{1-v}}dv$$

$$= \int v^{\alpha-1}\left(\frac{v^{x-\alpha} - v^{\frac{x-\alpha}{1-v}}}{x-\alpha}\right)dv$$

Um den Betrag der Abweichung der unrichtigen Summe (4) von der wahren Summe (5) in Grenzen einzuschliessen, bemerke man, dass für jeden Wert von v innerhalb der Grenzen 0 und 1 die Gleichung stattfindet

$$v^{\frac{1}{1-v}} = e^{-1}\,.\,v^{\frac{1+\omega}{2}}$$

wenn ω inuerhalb der Grenzen 0 und 1 liegt. Daher ist

$$\int_0^1 v^{\alpha-1} . v^{\frac{x-\alpha}{1-v}} dv = e^{-(x-\alpha)} \int_0^1 v^{\alpha-1+\frac{(1+\omega)(x-\alpha)}{2}} . dv$$

$$= \frac{2e^{-(x-\alpha)}}{x+\alpha+\omega(x+\alpha)}$$

nnd

$$\sum_1^\infty \frac{(n+\alpha)^{n-1}}{(n+x)^{n+1}} = \frac{1}{x(x-\alpha)} - \frac{2e^{-(x-\alpha)}}{(x-\alpha)\{x+\alpha+\omega(x-\alpha)\}}$$

wo

$$4 \geqq \omega \geqq 0$$

H i e r a u s e r s i e h t m a n, d a s s d e r F e h l e r d e r S u m m e (4) m i t w a c h s e n d e m $(x-\alpha)$ s e h r b a l d u n m e r k l i c h w i r d.

Dasselbe falsche Resultat wie in (4) würde sich ergeben haben, wenn mau die Snmme

$$e^{\alpha z} = 1 + \alpha \sum_1^\infty \frac{(n+\alpha)^{n-1} z\ e^{-nz}}{\Pi n}$$

für alle Werte von z zwischen Nnll und Unendlich als richtig vorausgesetzt hätte und nach erfolgter Multiplication mit $e^{-xz}.dz$ innerhalb der Grenzen $\infty \geqq z \geqq 0$ die Integration vollzogen haben würde. — Die Fehlerqnelle aber ist das erste Mal in der Anwendnng divergenter Reihen, das zweite Mal in der unbeschränkten Beuutznng eines Summenausdrucks zu suchen, welcher nur innerhalb gewisser Grenzen statthaft bleibt. Ueberraschend bleibt es immer, d a s s b e i d e s o v e r s c h i e d e n a r t i g e F e h l e r q u e l l e n d e n s e l b e n B e t r a g d e s F e h l e r s e r g e b e n.

Aus dem Vorstehenden ist ferner klar, dass man von einer stets convergenten Reihe die Summe auch noch rücksichtlich der Grenzen zu untersuchen hat, innerhalb welcher dieselbe gültig ist. — Die in (5) gegebene Reihe kann nun zur Berechnuug des seltsamen Integrals

$$\int_0^1 x^{\beta-1} x^{\frac{\alpha}{1-x}} dx = \frac{1}{\alpha+\beta} - \alpha \sum_1^\infty \frac{(n+\beta)^{n-1}}{(n+\alpha+\beta)^{n+1}}$$

dienen. Dieselbe mag in dem Falle $\alpha = 2$, $\beta = -1$ durchgeführt werden.

Alsdann hat mau:

(6) $$\int_0^1 x^{\frac{1-x}{2x}}\, dx = 1 - 2\sum_1^\infty \frac{(n-1)^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$$

Der Ausdruck $e^2 \frac{(n-1)^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$ lässt eine Entwickelung nach niedersteigenden Potenzen von n in folgender Form zu

(6a) $$e^2 \frac{(n-1)^{n-1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{\alpha_1}{n^2} + \frac{\alpha_2}{n^4} + \frac{\alpha_3}{n^6} + \frac{\alpha_4}{n^8} + \dots$$

wo:

$$\alpha_1 = 1; \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{3}; \quad \alpha_3 = \frac{7}{45}; \quad \alpha_4 = \frac{247}{2835}; \quad \alpha_5 = \frac{2327}{42525};$$

$$\alpha_6 = \frac{7451}{200475}; \quad \text{etc.}$$

und man kann beweisen, dass für wachsende Zeiger m der Wert von

$$\frac{8m^2\alpha_m}{e^2}$$

bis zur Grenze 1 langsam abnimmt und stets innerhalb der Zahlengrenzen 1,52 und 1 liegt.

Hieraus folgt, dass die Entwickelung (6a) für $n \geqq 1$ stets convergent ist.

Nun bilde man

(6b) $$\sum_1^\infty \frac{(n-1)^{n-1}}{(n+1)^{n+1}} = 0.\,3348\,1598\,4609\,0$$

und verschaffe sich den Summen-Rest mit Hülfe von (6a)

(6c) $$\sum_{21}^\infty \frac{(n-1)^{n-1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{\alpha_1}{e^2}\sum_{21}^\infty \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha_2}{e^2}\sum_{21}^\infty \frac{1}{n^4} + \dots$$

Wegen der häufigen Anwendbarkeit der Summen-Reste auf der rechten Seite habe ich eine Tafel construirt, welche die Werte

$$\sum_{21}^\infty \frac{1}{n^\alpha} = R_\alpha (\alpha > 1)$$

für eine Reihe ganzer und gebrochener α enthält. Aus derselben teile ich hier die gebräuchlichsten Reste auf 25 Decimalen mit, nämlich:

$$R_2 = 0.\,04877\,08229\,35203\,11983\,05363$$
$$R_3 = 0.\,00118\,90612\,01157\,32729\,67131$$

$R_4 = 0.\ 00003\ 86457\ 03556\ 60648\ 57657$

$R_5 = 0.\ 00000\ 14127\ 49071\ 93319\ 45196$

$R_6 = 0.\ 00000\ 00550\ 77218\ 38465\ 19173$

$R_7 = 0.\ 00000\ 00022\ 36260\ 20890\ 90136$

$R_8 = 0.\ 00000\ 00000\ 93373\ 13131\ 30173$

$R_9 = 0.\ 00000\ 00000\ 03979\ 15957\ 10684$

$R_{10} = 0.\ 00000\ 00000\ 00172\ 27739\ 27400$

$R_{11} = 0.\ 00000\ 00000\ 00007\ 54657\ 75325$

Mit Hülfe dieser Tafel gewinnt man aus (6c)

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n+1)^{n+1}} = 0.\ 0066\ 0215\ 7671\ 8$$

und daher aus (6b)

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n+1)^{n+1}} = 0.\ 3414\ 1814\ 2280\ 8$$

Demnach ist

$$\int_0^1 x^{\frac{2x}{1-x}} dx = 0.\ 3171\ 6371\ 5438\ (4)$$

Die gewöhnlichen Quadraturformeln mit Einschluss derer von Gauss geben in diesem Falle nur ungenaue Resultate, weil die Function unter dem Integralzeichen den Voraussetzungen wenig entspricht, welche an die Verwendbarkeit dieser Formeln zu stellen sind.

II.

Insbesondere hat mich die Darstellung von Restausdrücken einer Classe divergenter Reihen beschäftigt, welche aus den Differentialgleichungen

$$y \pm \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^\alpha}$$

hergeleitet werden. Ich unterscheide die beiden Fälle, auf welche sich jeder Fall zurückführen lässt

1) $\alpha = 1$

2) $1 > \alpha > 0.$

Erster Fall.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$(7)\qquad y+\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

ist

$$(8)\qquad \begin{cases} y=e^{-x}\int^{x}\frac{e^{x}dx}{x} \\ \quad =e^{-x}\left[A+\log x+x+\frac{x^2}{2\Pi 2}+\frac{x^3}{3\Pi 3}+\dots\right] \end{cases}$$

wo C und A Constanten bedeuten, welche von einander abhängig sind.

Nimmt man ferner an, dass die Function $\varphi(x)$ der Differentialgleichung (7) genügt, so kann die Function $\varphi(n+x)$, in welcher n eine positive ganze Zahl, $x>0$ ist, folgendermassen entwickelt werden:

$$(9)\qquad \varphi(n+x)=\frac{1}{n+x}+\frac{\Pi 1}{(n+x)^2}+\dots+\frac{\Pi(n-2)}{(n+x)^{n-1}}+R_n.\frac{\Pi(n-1)}{(n+x)^{n+1}}$$

wo R_n von x und n abhängig ist.

Wie sich aus der Gleichung

$$\varphi(n+x)+\varphi'(n+x)=\frac{1}{n+x}$$

ersehen lässt, muss R_n der Differentialgleichung genügen:

$$(10)\qquad 1=\frac{xR_n}{n+x}+\frac{dR_n}{dx}$$

deren Integral sich in geschlossener Form folgendermassen darstellen lässt:

$$(11)\qquad R_n=e^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left[r_n+\int_0^x\frac{e^{x}dx}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right]$$

Die Grösse r_n ist die Integrations-Constante, welche nur von n abhängig ist.

Man setze nun in (9) an die Stelle von n, $n+1$ und mache $x=0$, so wird erhalten:

(12) $$\varphi(n+1) = \frac{1}{n+1} + \frac{\Pi 1}{(n+1)^2} + \frac{\Pi 2}{(n+1)^3} + \cdots + \frac{\Pi(n-1)}{(n+1)^n} + r_{n+1}\frac{\Pi n}{(n+1)^{n+1}}$$

weil nach (11) $R_n = r_n$ wird, wenn man $x = 0$ setzt.

Ferner setze man in (9) $x = 1$, so ergiebt sich

(13) $$\varphi(n+1) = \frac{1}{n+1} + \frac{\Pi 1}{(n+1)^2} + \frac{\Pi 2}{(n+1)^3} + \cdots + \frac{\Pi(n-2)}{(n+1)^{n-1}} + R_n(1)\frac{\Pi(n-1)}{(n+1)^n}$$

wo

$$R_n(1) = e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[r_n + \int_0^1 \frac{e^x dx}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right]$$

derjenige Wert ist, welchen R_n für $x = 1$ annimmt.

Die Vergleichung von (12) und (13) führt jetzt zu der Beziehung zwischen den Constanten r_{n+1} und r_n:

(14) $$1 + \frac{n r_{n+1}}{n+1} = R_n(1) = e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[r_n + \int_0^1 \frac{e^x dx}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right]$$

aus welcher man r_n nach niedersteigenden Potenzen von n entwickeln kann. Man bedient sich hierzu der Gleichung

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x . e^{-\frac{x^2}{2n} + \frac{x^3}{3n^2} - \frac{x^4}{4n^3} + \cdots}$$

und nimmt für r_n eine Reihe von der Form an

(15a) $$r_n = a + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \cdots$$

Sind nun die Entwickelungen und Integrationen in (14) ausgeführt, so erhält man durch Vergleichung der Coefficienten die erforderlichen Bestimmungsgleichungen der Werte „a" und gewinnt so für r_n:

(15) $$r_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{135}\left[\frac{1}{n} + \frac{2}{21n^2} - \frac{4}{63n^3} - \cdots\right]$$

Die auf anderem Wege gefundenen wahren Werte von r_n sind:

$$r_1 = 0.\,697\,174\,8\,(8)$$
$$r_2 = 0.\,681\,930\,8\,(4)$$
$$r_3 = 0.\,676\,781\,4\,(0)$$

Aus (15) würde man mit Benutzung der ersten vier Glieder erhalten haben:

$$r_1 = 0.\,697\,236\,9$$
$$r_2 = 0.\,681\,951\,8$$
$$r_3 = 0.\,676\,787\,1$$

Die Uebereinstimmung ist bei der Kleinheit von n eine sehr überraschende.

Jetzt lässt sich aus (11) R_n gleichfalls nach niedersteigenden Potenzen von n entwickeln; indessen ist es bequemer, sich hierzu der Gleichung (10) zu bedienen.

Setzt man nämlich:

$$\text{(16a)} \qquad R_n = p + \frac{p_1}{n} + \frac{p_2}{n^2} + \ldots$$

wo die „p" nur Functionen von x sind, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{dp}{dx} = 1; \quad \frac{dp_1}{dx} = -px; \quad \frac{dp_2}{dx} = px^2 - p_1 x; \quad \text{etc.}$$

aus denen man in Berücksichtigung des Umstandes, dass für $x = 0$ R_n in ϱ_n übergeht, nach und nach gewinnt:

$$\text{(16)} \qquad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{2}{3} + x \\ p_1 &= \frac{4}{135} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{3} \\ p_2 &= \frac{8}{2835} - \frac{2x^2}{135} + \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{x^5}{15} \end{aligned} \right.$$

etc.

Zu bemerken ist nun noch, dass die Entwickelung (8) von y gleich der in (9) definirten Function $\varphi(x)$ ist, wenn die Constante A gleich der Stirling'schen Constante

$$M = 0.\,5772\,1566\,4901\,5$$

gesetzt wird, wodurch die Constante C den Wert erhält:

$$\mu = 0.\,3725\,0741\,0776\,2$$

Es ergiebt sich dann schliesslich:

$$(17)\qquad e^{-x}\int_{\mu}^{x}\frac{e^x dx}{x} = \varphi(x) = e^{-x}\left[M+\log x + x + \frac{x^2}{2\Pi 2}+\dots\right]$$

Den Beweis habe ich auf die Theorie der Gamma-Functionen gestützt; indessen gestattet der Raum nicht, auf denselben hier näher einzugehen.

Zweiter Fall.

Die Function

$$(18)\quad \varphi(x,\alpha) = e^{-x}\int_0^x \frac{e^x dx}{x^\alpha} = e^{-x}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\Pi 1}+\frac{x^{3-\alpha}}{(3-\alpha)\Pi 2}+\dots\right]$$

genügt der Differentialgleichung

$$(19)\qquad \varphi+\frac{d\varphi}{dx}=\frac{1}{x^\alpha}$$

Ferner lässt sich zeigen, dass folgende Entwickelung stattfindet

$$(20)\quad \Pi(\alpha-1)\,\varphi(n+x,\alpha) = \frac{\Pi(\alpha-1)}{(n+x)^\alpha}+\frac{\Pi\alpha}{(n+x)^{\alpha+1}}+\dots + \frac{\Pi(n+\alpha-2)}{(n+x)^{n+\alpha-1}}+P_n\frac{\Pi(n+\alpha-1)}{(n+x)^{n+\alpha}}$$

wo der Restfactor P_n der Differentialgleichung genügt:

$$(21)\qquad \frac{dP_n}{dx}+\frac{x-\alpha}{n+x}P_n = 1$$

Das Integral derselben lautet:

$$(22)\qquad P_n = e^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+\alpha}\left[\varrho_n+\int_0^x\frac{e^x dx}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+\alpha}}\right]$$

und es drückt die Integrationsconstante ϱ_n eine nur von α und n abhängige Grösse aus.

Wie im ersten Fall gewinnt man hier die Beziehung:

$$(23)\qquad 1+\frac{n+\alpha}{n+1}\varrho_{n+1} = e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\left[\varrho_n+\int_0^1\frac{e^x dx}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+\alpha}}\right]$$

aus welcher sich ϱ_n nach niedersteigenden Potenzen von n entwickeln lässt, nachdem man die Möglichkeit dieser Entwickelung aus (21) bewiesen hat.

Zwischen den beiden Restfactoren P_n und R_n findet ein sonderbarer Zusammenhang statt, der sich auf folgende Weise herleiten lässt.

Die beiden Differentialgleichungen (10) und (11) lassen sich auf einander zurückführen, wenn man in (10) statt n, $n+\alpha$ und statt x, $x-\alpha$ setzt. Dann ergiebt sich

$$1=\frac{dR_{n+\alpha}(x-\alpha)}{dx}+\frac{x-\alpha}{n+x}R_{n+\alpha}(x-\alpha)$$

dieselbe Form, welche (21) besitzt. Deshalb muss sein:

$$(24)\qquad P_n(x)=R_{n+\alpha}(x-\alpha)+f_n(\alpha)e^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+\alpha}$$

wo $f_n(\alpha)$ von x unabhängig ist.

Nun hat man aus der Eigentümlichkeit der Restfactoren

$$R_n(x)=1+\frac{n}{n+x}R_{n+1}(x-1)$$

und allgemeiner

$$R_{n+\alpha}(x-\alpha)=1+\frac{n+\alpha}{n+x}R_{n+\alpha+1}(x-\alpha-1)$$

ferner

$$P_n(x)=1+\frac{n+\alpha}{n+x}P_{n+1}(x-1)$$

Daher durch Subtraction und mit Benutzung von (24)

$$f_n(\alpha)=e(n+\alpha)f_{n+1}(\alpha)\frac{n^{n+\alpha}}{(n+1)^{n+1+\alpha}}\quad\text{oder}$$

$$\frac{e^n f_n(\alpha)\,\Pi(n+\alpha-1)}{n^{n+\alpha}}=e^{n+1}f_{n+1}(\alpha)\frac{\Pi(n+\alpha)}{(n+1)^{n+1+\alpha}}$$

Also:

$$(25)\qquad f_n(\alpha)=\frac{n^{n+\alpha}\vartheta(\alpha)}{e^n\,\Pi(n+\alpha-1)}$$

wo $\vartheta(\alpha)$ nur von α abhängt.

Die Gleichung (24) geht deshalb über in:

$$P_n(x)=R_{n+\alpha}(x-\alpha)+\frac{\vartheta(\alpha)(n+x)^{n+\alpha}}{e^{n+x}\,\Pi(n+\alpha-1)}$$

Da nun für wachsende n $P_n x$ und $R_n x$ gegen endliche Grenzen convergiren und

$$\lim \frac{(n+x)^{n+\alpha-\frac{1}{2}}}{e^{n-x}\Pi(n+\alpha-1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ (n=\infty)$$

so folgt

$$\vartheta\alpha = 0$$

und man erhält

(26a) $$P_n(x) = R_{n+\alpha}(x-\alpha)$$

oder wenn man $x=\alpha$ setzt und die Reihe (15a) berücksichtigt

(26) $$P_n(\alpha) = \varrho_{n+\alpha} = a + \frac{a_1}{n+\alpha} + \frac{a_2}{(n+\alpha)^2} + \dots$$

Durch (26a) wird der allgemeine Restausdruck $P_n(x)$ auf den in (16a) definirten besonderen Restausdruck „R" zurückgeführt.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass die entsprechenden Restfactoren der divergenten Reihen, durch welche die Differentialgleichung $y - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^\alpha}$ integrirt wird, schon auf ziemlich elementarem Wege gefunden werden können.

In ähnlicher Weise lässt sich das allgemeine Integral

$$\varphi(x) = e^x \int_x^\infty f x\, e^{-x} dx$$

behandeln, in welchem $f(x)$ eine Function von x bezeichnet, die nach niedersteigenden Potenzen von x mit ganzen oder gebrochenen Exponenten entwickelbar ist. Die Reihe

$$\varphi(n+x) = f(n+x) + f'(n+x) + f''(n+x) + \dots + f^{M-1}(n+x) + R_m f^M(n+x)$$

ist in den ersten Gliedern convergent und wird später divergent; auch lässt sich, wenn der Zahlwert von $f^M(n+x)$ kleiner als die Zahlwerte von $f^{M-1}(n+x)$ und $f^{M+1}(n+x)$ ist, stets der in der Nähe von $\frac{1}{2}$ liegende Factor R_m mit einem beliebigen Grade von Genauigkeit entwickeln. Zu diesen Untersuchungen gelangte ich durch Behandlung der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2py\frac{dy}{dx} + qy^2 = r$$

in welcher p, q, r Functionen von x sind.

Dieselbe lässt sich auf eine Gleichung von der Form

(27) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 + 2f(x)$$

leicht reduciren, deren Integral folgende Entwickelung gestattet:

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} & y = Ae^x - \frac{z}{Ae^x} - \frac{u}{(Ae^x)^3} \\ & \text{wo } A \text{ die Integrationsconstante ist und} \\ & z = e^{2x}\int_x^\infty f(x)\,e^{-2x}\,dx \\ & u = \frac{z^2}{2} - \frac{e^{4x}}{2}\int_x^\infty f^2(x)\,e^{-4x}\,dx \\ & \qquad \text{u. s. w.} \end{aligned}\right.$$

Vorausgesetzt wird bei dieser Entwickelung, dass für wachsende x der Ausdruck

$$\frac{fx}{e^{2x}}$$

gegen Null convergirt.

Ist der Wert, welchen y für $x = 0$ annimmt, y_0 sehr gross, so kann man aus (28) leicht die Constante A in folgender Form finden:

$$(29)\qquad A^2 = y_0{}^2 + 2\int_0^\infty fx\,e^{-2x}\,dx - \frac{\int_0^\infty f^2(x)\,e^{-4x}\,dx}{y_0{}^2} \cdots$$

Nach Bestimmung des Wertes von A liefert die Reihe (28) für alle Werte von x das Integral y der Differentialgleichung (27).

Handelt es sich z. B. um die Gleichung

$$(30)\qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 + x^2$$

in welcher $y_0 = 3$ gesetzt ist und es sollte y_{10} berechnet werden, so würde nach dem Vorhergehenden zu bilden sein:

$$(31)\qquad y = Ae^x - \frac{x^2 + x + \frac{1}{2}}{4Ae^x} - \frac{x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{5}{32}}{32(Ae^x)^3} \cdots$$

Hieraus würde man gewinnen, wenn $y_0 = a$ gesetzt wird:

$$(32)\qquad A = a + \frac{1}{8a} - \frac{11}{1024a^3} + \frac{3619}{1990656a^5} \cdots$$

Setzt man hier $a = 3$, so ergiebt sich

$$A = 3.041\,276$$

Daher

$$y_{10} = 66988.58$$

Ich will hinzufügen, dass dieses Verfahren der numerischen Integration von Differentialgleichungen auf eine unzählige Menge von allgemeineren Fällen sich ausdehnen lässt.

Zu diesen gehört die Gleichung

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

in welcher φ eine in y und y' homogene Function ist.

Kiel, im Januar 1875.

Digitized by Google

XXX.

Nombres entiers, dont le cube est égal à la somme de trois ou de quatre cubes entiers.

Par

M. **Eugène Rebout,**

Professeur aux Ecoles d'adultes de la ville de Paris.

---

1. Trouver quatre nombres entiers consécutifs tels que le cube de l'un soit égal à la somme des cubes des trois autres.

Représentons par x le plus petit de ces quatre nombres entiers, les trois autres seront $x+1$, $x+2$ et $x+3$, de sorte qu'on a l'équation

$$x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3,$$

qui, après calculs effectués et réductions faites, devient

$$x^3-6x-9=0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$x^3-9x+3x-9=0,$$

ou encore

$$x(x^2-9)+3(x-3)=0;$$

et, comme

$$x(x^2-9)=x(x+3)(x-3)=(x^2+3x)(x-3),$$

on voit qu'elle revient à

$$(x^2+3x+3)(x-3)=0.$$

Celle-ci est satisfaite par les valeurs qui vérifient les deux équations

$$x^2+3x+3=0,\quad x-3=0.$$

Les racines de la première sont imaginaires, par suite la valeur $x=3$ satisfait seule à la question.

Les quatre nombres demandés sont donc 3, 4, 5 et 6.

On a en effet $3^3+4^3+5^3=6^3$, car $27+64+125=216$.

2. On peut même trouver facilement des nombres entiers, dont le cube est égal à la somme de quatre cubes entiers.

En effet, on a identiquement

$$(1)\qquad (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6abc$$
$$+3a^2b+3a^2c+3b^2c+3b^2a+3c^2a+3c^2b;$$

changeant dans cette égalité successivement le signe de a, celui de b, et le signe de c, on en déduit les trois nouvelles identités,

$$(2)\qquad (b+c-a)^3=-a^3+b^3+c^3-6abc$$
$$+3a^2b+3a^2c+3b^2c-3b^2a-3c^2a+3c^2b,$$

$$(3)\qquad (c+a-b)^3=a^3-b^3+c^3-6abc$$
$$-3a^2b+3a^2c+3b^2c+3b^2a+3c^2a-3c^2b,$$

$$(4)\qquad (a+b-c)^3=a^3+b^3-c^3-6abc$$
$$+3a^2b-3a^2c-3b^2c+3b^2a+3c^2a+3c^2b.$$

Si nous ajoutons ces trois dernières égalités, nous trouvons que leur somme est égale à

$$a^3+b^3+c^3-18abc$$
$$+3a^2b+3a^2c+3b^2c+3b^2a+3c^2a+3c^2b;$$

cette somme est par suite égale à $(a+b+c)^3-24abc$.

On est ainsi conduit à l'identité

$$(5)\qquad (a+b+c)^3=(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3+24abc.$$

Si l'on donne aux lettres a, b et c des valeurs entières telles, que le produit $3abc$ soit un cube, on pourra former un cube entier, qui se décompose en quatre cubes entiers.

3. **Exemples.** 1°. Posons $a=3$, $b=4$, $c=6$; nous aurons $24abc=24.3.4.6=2^6.3^3=12^3$ et $a+b+c=13$, $b+c-a=7$, $c+a-b=5$, $a+b-c=1$; donc il vient

$$13^3=7^3+5^3+1^3+12^3.$$

2°. Faisons encore $a=18$, $b=20$, $c=25$; il nous viendra $24abc=24.18.20.25=(2^3.3)(2.3^2)(2^2.5)(5^2)=2^6.3^3.5^3=(2^2.3.5)^3=60^3$; et $a+b+c=63$, $b+c-a=27$, $c+a-b=23$, $a+b-c=13$; de sorte qu'on a

$$63^3=27^3+23^3+13^3+60^3.$$

Si dans cette égalité on remplace 13^3 par la valeur ci-dessus, on verra que

$$63^3 = 1^3 + 5^3 + 7^3 + 12^3 + 23^3 + 27^3 + 60^3.$$

4. L'un des trois cubes peut quelquefois être nul.

Ainsi, pour $a = 1$, $b = 8$, $c = 9$, on a $24abc = 2^3.3.1.2^3.3^2 = (2^2.3)^3 = 12^3$ et $a + b + c = 18$, $b + c - a = 16$, $c + a - b = 2$, $a + b - c = 0$; il vient par suite

$$18^3 = 16^3 + 2^3 + 12^3,$$

ou, en divisant par 2^3,

$$9^3 = 8^3 + 1^3 + 6^3.$$

XXXI.

Construction der Reflexe auf ebenen Spiegelflächen.

Von

Herrn **Karl Köpl,**

ord. Hörer an der k. k. techn. Hochschule in Wien.

In perspectivischen Darstellungen ist bekanntlich das Bild des Reflexes eines Punktes identisch mit dem des Spiegelbildes desselben Punktes, da Reflex und Spiegelbild in einem Sehstrahl liegen *). Diese Eigenschaft ermöglicht eine einfachere Construction der Spiegelbilder als diejenige ist, welche durch Uebertragung der senkrechten Abstände der einzelnen Punkte von der Spiegelebene hinter dieselbe zum Resultate gelangt. (Siehe: Prof. R. Niemtschik, „Neue Constructionen der auf ebenen und krummen Flächen erscheinenden Reflexe etc.“ Sitzungsberichte d. k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien. 1866. 53. Band.)

Diese Eigenschaft benutzt auch die im folgenden zu behandelnde Construction. Sie besteht im Wesentlichen darin, dass man das Spiegelbild eines Punktes mit Hilfe einer Geraden, welche den Punkt enthält und deren Spiegelbild oder Reflex leicht ermittelt werden kann, bestimmt. Die Gerade, welche dieser Bedingung am besten entspricht, ist eine horizontale, welche durch den gegebenen und

---

*) Im folgenden sollen deshalb die Ausdrücke Reflex und Spiegelbild als gleichwertig gebraucht werden.

einen Punkt der Senkrechten aus dem Auge zur Grundebene geht; denn der Reflex des letzteren Punktes kann sehr leicht bestimmt werden, und einen zweiten Punkt des Reflexes der horizontalen hat man in ihrem Durchstosspunke mit der Spiegelebene.

Im folgenden soll nun die Construction bei verschiedenen Lagen der spiegelnden Ebene erläutert werden. Besonders einfach stellt sich die Construction bei zur Grundebene senkrechten Spiegelebenen heraus, auch ist hier das Princip derselben am deutlichsten ersichtlich, weshalb diese Lage des Spiegels zunächst behandelt wird.

I. Die Spiegelebene fällt mit der Bildebene zusammen.

Es sei A das Auge, A'' seine orthogonale Projection auf die Bildebene oder der Augpunkt und A' seine horizontale Projection oder der Fusspunkt (Fig. 1.). Der Punkt a, dessen Spiegelbild zu bestimmen ist, wurde der Einfachheit wegen in der Grundebene angenommen, a_p ist sein perspectivisches Bild.

Verbindet man den gegebenen Punkt a mit dem Fusspunkte A' durch eine Gerade, so entspricht diese der oben aufgestellten Bedingung; denn sie liegt in der Grundebene, ist also horizontal, und geht durch den Fusspunkt A', enthält demnach einen Punkt der Senkrechten vom Auge A zur Grundebene. Das perspectivische Bild dieser Geraden $A'a$ erscheint als eine Senkrechte a_{ps} zur Grundlinie aus dem Bilde a_p, da ihre projicirende Ebene senkrecht zur Grundebene steht.

Der Punkt s, in welchem die Gerade $A'a$ die Spiegelebene trifft, ist sein eigenes Spiegelbild, gehört demnach auch dem Spiegelbilde der Geraden an, als zweiten Punkt desselben bestimmen wir das Spiegelbild des Fusspunktes A' in A'_1, dessen perspectivisches Bild R, wie aus dem Dreiecke $AA'A_1$ — in welchem die Seite $A'A'_1=2A'm$ ist — erhellt, mit dem Halbirungspunkt der senkrechten Entfernung des Augpunktes von der Grundlinie zusammen fällt. Es ist somit das Spiegelbild oder der Reflex der Geraden $A's$. In diesem muss das Spiegelbild α des Punktes a liegen, es muss aber auch dem Spiegelbilde $A''a_p$ des durch a gehenden Sehstrahles Aa_p angehören, somit im Durchschnitte beider, in α, sich ergeben.

Aus dem bisherigen ergibt sich für die Coustruction der Spiegelbilder zunächst von Punkten der Grundebene die Regel:

Man fällt vom gegebenen Punkte a (Fig. 2.) eine Senkrechte zur Grundlinie und verbindet den Punkt s, in

welchem diese Senkrechte die Grundlinie (die Grundflächtrase der Spiegelebene) schneidet, mit dem Halbirungspunkte R der Strecke $A''m$ (dem Reflex des Fusspunktes). Die Gerade $A'a$ (Verbindungslinie des Fluchtpunktes der Normalen zur Spiegelebene mit dem gegebenen Punkte a) trifft die frühere Rs im gesuchten Spiegelbilde α von a.

Hat man (Fig. 2.) das Spiegelbild β eines Punktes b im Raume zu bestimmen, so lässt sich diese Aufgabe einfach auf die vorhergehende zurückführen, wenn man durch den Punkt b im Raume eine horizontale Ebene legt und diese nunmehr als Grundebene betrachtet. Die horizontale Bildflächtraçe G_1G_2 dieser Ebene geht durch die orthogonale Verticalprojection b'' des Punktes b und übernimmt die Function der Grundlinie GG.

Nun wiederholt sich das frühere Verfahren vollständig. Man hat wieder die Strecke m_1A'' zu halbiren um den Reflex R_1 des Fusspunktes in der neuen Grundebene zu erhalten, diesen mit dem Schnittpunkte s_1 der neuen Grundlinie und dem Perpendikel aus b zu verbinden und die so erhaltene Gerade mit der Verbindungslinie des Augpunktes und des gegebenen Punktes im Punkte β zum Schnitte zu bringen; β ist nach dem Vorhergehenden der Reflex von b.

Man kann übrigens β auch in der Weise bestimmen, dass man zuerst das Spiegelbild β' der Grundflächenprojection b' von b ermittelt. Das Spiegelbild des Perpendikels $b'b$ geht durch β' und ist parallel zu $b'b$, da $b'b$ selbst parallel zur Spiegelebene ist. β liegt nun im Spiegelbilde von $b'b$ und in der Normalen zur Spiegelfläche aus dem Punkte b, somit im Durchschnitte der beiden Geraden $\beta\beta'$ und $A''b$.

Ist der Punkt b durch sein Bild b und seine orthogonale Verticalprojection b'' gegeben, so wird man nicht erst seine Grundflächprojection suchen und mit Hilfe dieser das Spiegelbild β ermitteln, sondern gleich das erstere Verfahren in Anwendung bringen; doch kann die eine Construction zur Controlle der anderen dienen, wenn sich ungünstige Schnitte ergeben.

Das Spiegelbild γ einer Geraden g (Fig. 3.) wird am besten dadurch erhalten, dass man ihren Durchstosspunkt d mit der Spiegelebene — hier also mit der Bildebene — und den Reflex φ ihres Fluchtpunktes f ermittelt. φ wird analog dem früheren erhalten, indem man zuerst den Reflex φ' der Grundflächprojection f' des Fluchtpunktes f bestimmt; das Spiegelbild des Perpendikels $f'f$ erscheint dann wieder als eine Senkrechte $\varphi'\varphi$ zur Grundlinie, deren Schnittpunkt φ mit $A''f$ das Spiegelbild des Fluchtpunktes f der

Geraden g liefert. Da nun d, der Durchstosspunkt der Geradeu g mit der Spiegelebene, sein eigener Reflex ist, so ist φd das Spiegelbild der Geraden g.

Zur genaueren Construction ist es nicht unwesentlich zu bemerken, dass die Strecke $A''\varphi'$ gleich sein muss der Entfernung $A''f'$, was sehr einfach aus der Congruenz der rechtwinkeligen Dreiecke Rms und $RA''\varphi'$ hervorgeht, in welchen $A''R = Rm$, die Winkel bei R als Scheitelwinkel und die rechten Winkel einander gleich sind. Ebenso folgt aus der Congruenz der beiden Dreiecke $A''f'f$ und $A''\varphi'\varphi$, in welchen die Seiten $A''f'$ und $A''\varphi'$, die beiden rechten Winkel und die Winkel bei A'' als Scheitelwinkel einander gleich sind, die Gleichheit der Stücke $\varphi'\varphi$ und $f'f$, dann $A''\varphi$ und $A''f$. Man braucht daher, um das Spiegelbild des Fluchtpunktes der Geraden g zu finden, nur die Strecke $A''f'$ in entgegengesetzter Richtung von A'' aus nach φ' aufzutragen, in φ' eine Verticale zu errichten und wieder im entgegengesetzten Sinne zu $f'f$ die Länge $f'f$ von φ' nach φ abzuschneiden; oder einfacher $A''\varphi = A''f$ zu machen.

Es ist einleuchtend, dass es nicht selten vorteilhaft sein wird, das Spiegelbild α eines Punktes a derart zu bestimmen, dass man durch a eine Gerade g legt, deren Reflex γ ermittelt und diesen mit der Geraden $A''a$ im verlangten Punkte α durchschneidet; denn man kann immer die Gerade g so wählen, dass ihr Spiegelbild γ mit $A''a$ einen möglichst günstigen Schnitt liefert.

II. Die Spiegelebene steht senkrecht zur Grundebene und ist geneigt gegen die Bildfläche.

Bei der Annahme dieser Stellung der spiegelnden Ebene ändern sich die Verhältnisse insofern, als das Spiegelbild im Raume nicht mit seinem perspectivischen Bilde indentisch ist, wie dies beim vorhergehenden Falle statt fand.

In Fig. 4. stellt MNO die Spiegelebene vor, welche der oben angenommenen Bedingung entspricht; die Bezeichnung der übrigen in Betracht kommenden Elemente ist dieselbe, wie in Fig. 1.

Man ermittelt wieder zunächst den Reflex r des Fusspunktes A', indem man aus dem letzteren und aus dem Auge A Normale zur Spiegelfläche fällt, welche sie in den Punkten m und n treffen. Macht man nun $nA_1 = nA$ und $A'_1m = mA'$ und verbindet A'_1 mit A und A_1 mit A', so erhält man im Schnitte r dieser beiden Geraden den Reflex des Fusspunktes A'. Der Punkt r muss auch in der Geraden mn liegen, welche die Durchschnittslinie der Ebene des Spiegels mit derjenigen Ebene ist, welche die Punkte A, A', A'_1, A_1 enthält; da

die letztere Ebene senkrecht zur Spiegelebene geführt wurde und wie diese senkrecht zur Grundebene steht, so muss auch mn vertical sein. r ist nun wieder, wie in dem unter I. behandelten Falle, der Halbirungspunkt der Strecke mn, was unmittelbar aus der Figur erhellt; ebenso geschieht die Ermittlung des Spiegelbildes α des Punktes a der Grundebene in derselben Weise, wie wir dies bei Fig. 1. gesehen haben.

Im Raume ändern sich also die Verhältnisse nicht; anders jedoch gestalten sich die Dinge, wenn die perspectivischen Bilder in Betracht kommen.

Das perspectivische Bild n_p von n erscheint als Fluchtpunkt der Normalen zur Spiegelebene, das des Punktes m als Schnittpunkt der Grundflächtrace M_pN (die Perspective von MN) mit dem perspectivischen Bilde n_pm_p der zur Bildebene parallelen Verticalen mn in m_p, also im Schnitte der Grundflächtrace der Spiegelebene mit der Senkrechten aus dem Fluchtpunkte der Normalen zur Spiegelebene auf die Grundlinie. Die Perspective R von r liegt in der Geraden n_pm_p, dem Bilde von nm. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke n_pAm_p und nAm, in welchen $nm \parallel n_pm_p$ und $mr = rn$ ist, folgt, dass auch $m_pR = Rn_p$ ist, das heisst, dass R der Halbirungspunkt der Strecke m_pn_p ist.

Um das Spiegelbild α des Punktes a der Grundebene zu bestimmen, wurde a mit dem Fusspunkte A' verbunden; diese Gerade trifft die Spiegelebene im Punkte s, es ist somit rs der Reflex von $A's$. Um nicht a_1 bestimmen zu müssen, wurde sr durch die Gerade aA_1 — welche mit a_1A in einer Ebene und symmetrisch in Bezug auf den Spiegel liegt — im Spiegelbilde α durchschnitten.

Das perspectivische Bild der Geraden $A's$ erscheint, wie schon vorhin erörtert wurde, als eine Senkrechte aus a_p, der Perspective von a, zur Grundlinie, folglich s als Schnitt s_p derselben mit der Grundflächtrace M_pN des Spiegels. Die Bilder der Geraden rs und A_1a sind demnach Rs_p und n_pa_p; sie schneiden sich im gesuchten Bilde α_p von α, des Reflexes von a.

Die Construction ist also auch hier sehr einfach. Man hat (Fig. 5.) den Fluchtpunkt n der Normalen zur Spiegelebene MNO zu bestimmen ($Dn + FD$) und von n eine Senkrechte zur Grundlinie zu fällen, welche die Grundflächtrace MN des Spiegels im Punkte m trifft; der Halbirungspunkt R der Entfernung mn liefert den Reflex des Fusspunktes.

Das Spiegelbild α' des Punktes a' in der Grundebene wird nun erhalten, wenn man a' — das Bild des gegebenen Punktes — mit n

— dem Fluchtpunkte der zum Spiegel Normalen — verbindet und diese Gerade im gesuchten Reflexe α' durch die Gerade sR durchschneidet, welche den Schnittpunkt s der Senkrechten aus a' zur Grundlinie mit dem Reflex R des Fusspunktes verbindet.

Ist a' die Grundflächprojection eines Punktes a im Raume, so liegt das Spiegelbild dieses Punktes einerseits im Spiegelbilde $\alpha'\alpha$ des Perpendikels $a'a$ und andersoits in der Normalen an aus a zur Spiegelebene, also im Schnitte beider in α. Das Spiegelbild $\alpha'\alpha$ von $a'a$ muss parallel sein zu $a'a$, weil das Perpendikel $a'a$ parallel zur Ebene des Spiegels ist, und durch α', den Reflex von a' gehen.

Man gelangt zu demselben Resultate, wenn man durch den Punkt a im Raume eine horizontale Ebene legt, diese als neue Grundebene betrachtet und für diese die neue Grundflächtrace der Spiegelebene und den Reflex R_1 des Fusspunktes in der neuen Grundebene ermittelt und im übrigen genau so verfährt, wie bei der Bestimmung von α'.

Die Bestimmung des Reflexes einer Geraden unterliegt nun weiter keiner Schwierigkeit. Das Spiegelbild φ des Fluchtpunktes f der Geraden g (Fig. 6.) wurde in derselben Weise erhalten, wie α in Fig. 5., indem zunächst φ' der Reflex von f' — eines Punktes der Grundebene — und dann φ als Durchschnittspunkt der Normalen nf aus f zum Spiegel mit dem Reflex $\varphi'\varphi$ von $f'f$ bestimmt wurde. Die Verbindungslinie von φ mit dem Durchstosspunkt d der Geraden g und der Spiegelebene liefert den Reflex γ der Geraden g.

Steht die Spiegelebene senkrecht zur Grund- und Bildebene, so bleibt die Construction mit einiger Modification dieselbe. Bei dieser Lage der spiegelnden Ebene fällt der Fluchtpunkt F der Grundflächtrace des Spiegels mit dem Augpunkt A'' zusammen; demgemäss liegt der Fluchtpunkt der Normalen zum Spiegel, folglich auch der Reflex des Fusspunktes in unendlicher Entfernung. Die Richtung in welcher der Fluchtpunkt der zum Spiegel Normalen liegt, ist horizontal, die des Reflexes des Fusspunktes erhält man, wenn man in irgend einem Punkte des Horizontes eine Senkrechte auf denselben errichtet und das Stück derselben, welches zwischen Horizont und der Grundflächtrace des Spiegels gelegen ist, halbirt; die Verbindungslinie des Halbirungspunktes mit dem Augpunkte gibt die verlangte Richtung an. Aus den bei dieser Bestimmungsart auftretenden Dreiecken kann man auch die sonst für diese Stellung des Spiegels gebräuchliche Construction herleiten.

III. Die Spiegelebene ist geneigt gegen Grund- und Bildebene.

Auch bei dieser Lage des Spiegels kann man die bisher erörterte Constructionsmethode mit Vorteil in Anwendung bringen.

Es handelt sich hier vornehmlich um die Bestimmung des Reflexes des Fusspunktes, welche am bequemsten durch Vermittlung seiner orthogonalen Projection geschieht.

Zu dem Ende zieht man (Fig. 7.) durch N die orthogonale Horizontaltrace M_0N der Spiegelebene MNO parallel zu FD, dem umgelegten Fluchtstrahl der Grundflächtrace, und ermittelt nun orthogonal den Reflex des Fusspunktes, dessen verticale Projection F ist, indem man aus diesem und dem Auge, dessen orthogonale Projectionen A'' und A' ($FA' = A''D$) sind, Senkrechte zur Spiegelebene fällt und auf diesen die Entfernungen der genannten Punkte vom Spiegel hinter demselben aufträgt. Man erhält so die Punkte A_1'' und F_1, welche mit den Punkten A'' und F kreuzweise zu verbinden wären, um im Durchschnitte der beiden so entstandenen Geraden die ortbogonale Verticalprojection r des Reflexes des Fusspunktes zu liefern. Da aber r in der Spiegelebene und in der durch den Fusspunkt und das Auge zu dieser senkrecht geführten Ebene liegen muss, so braucht man nur $A_1''F$, die eine der Geraden, mit der Durchschnittslinie $v''h''$ der beiden eben erwähnten Ebenen zum Schnitte zu bringen um r zu erhalten.

Die horizontalen Projectionen der Punkte A_1'', F_1 und r liegen in der Senkrechten aus A' zur orthogonalen Horizontaltrace M_0N, das perspectivische Bild R des Reflexes von F findet sich also im Schnitte der Verticalen aus v' mit der Geraden $A''r$. Die Gerade $A''r$ muss übrigens durch den (in der Figur nicht eingetragenen) Punkt F_1 — die orthogonale Verticalprojection des Spiegelbildes des Fusspunktes — gehen, was insofern von Wesenheit ist, als man bei Benützung dieses Punktes die Gerade $A''R$ genauer ziehen und somit auch R genauer bestimmen kann.

Den Verschwindungspunkt V der Normalen zur Spiegelebene erhält man als Durchschnittspunkt der Senkrechten aus dem Augpunkt A'' zur Bildflächtrace NO des Spiegels und der Verticalen aus v'.

Der Reflex α des Punktes a in der Grundebene ergibt sich nun ganz so wie in den früher behandelten Fällen als Schnittpunkt der Normalen aus a zum Spiegel mit der Geraden Rs, welche den Schnittpunkt s der verticalen aus a mit der Grundflächtrace MN des Spiegels und den Reflex R des Fusspunktes verbindet.

Handelt es sich (Fig. 8.) um die Bestimmung des Spiegelbildes eines Punktes a im Raume, so führt man diesen Fall auf den eben behandelten zurück, wenn man durch den Punkt a im Raume eine horizontale Ebene legt und diese als neue Grundebene betrachtet. Die neue Grundlinie geht durch die orthogonale Verticalprojection a'' von a und trifft die Bildflächtrace NO des Spiegels in N_1 einem Punkte der neuen Grundflächtrace, welche in F ihren Verschwindungspunkt hat. Die weitere Construction unterscheidet sich durch nichts von der in Fig. 7. zur Anschauung gebrachten.

Man kann auch hier den Reflex eines Punktes a im Raume derart bestimmen, dass man durch den Punkt a eine zur Grundebene senkrechte Gerade führt und den Reflex dieser mit der Normalen aus a zur Spiegelebene durchschneidet.

Das Spiegelbild γ der verticalen Geraden g (Fig. 9.) wird wieder am einfachsten dadurch bestimmt, dass man den Durchstosspunkt d der Geraden mit der Spiegelebene und den Reflex ihres Fluchtpunktes sucht. Um den letzteren zu finden verfahren wir ganz so, wie bei der Bestimmung des Spiegelbildes irgend eines Punktes.

Wir legen also durch den Fluchtpunkt eine horizontale Ebene. Sie liegt im Unendlichen, ihre Bildflächtrace — die neue Grundlinie — wird somit auch die Verticallinie in einem unendlich fernen Punkte — der orthogonalen Verticalprojection F des neuen Fusspunktes — treffen. Man erhält demnach die orthogonale Verticalprojection r des Reflexes des in unendlicher Entfernung gelegenen Fusspunktes in der neuen Grundebene, wenn man die Durchschnittslinie $v''k''$ mit der Geraden zum Schnitte bringt, welche durch A_1'' parallel zur Verticallinie gezogen wird. R ist die Perspective von r, somit das Bild des Reflexes des unendlich fernen Fusspunktes und zugleich der Fluchtpunkt der Spiegelbilder von zur Grundebene senkrechten Geraden.

Rd ist also der Reflex γ der Verticalen g, und daher α der Schnitt der aus dem gegebenen Punkte a zur Spiegelebene gefällten Senkrechten aV mit γ das Spiegelbild des Punktes a.

Es ist klar, dass man das Spiegelbild eines Punktes auch dadurch erhalten kann, dass man durch den Punkt zwei Gerade legt und deren Reflex bestimmt. In Fig. 10. wurde α in der Weise ermittelt, dass man durch den gegebenen Punkt a der Grundebene eine verticale Gerade g und eine horizontale g_1, deren Bild parallel zur Grundflächtrace MN der Spiegelebene ist, führte.

Der Reflex γ der verticalen Geraden g wurde wie in Fig. 9. be-

stimmt; γ_1 — das Spiegelbild der horizontalen Geraden — wurde erhalten, indem das Spiegelbild φ des Fluchtpunktes f von g_1 ermittelt und durch diesen zu g_1 eine Parallele gezogen wurde, denn g_1 trifft, da sie parallel zu MN ist, die Grundflächtrace erst im Unendlichen (im Raume in einem Punkte der Gegen-, Verschwindungs- oder Grenzebene). Die beiden Reflexe γ und γ_1 schneiden sich im verlangten Spiegelbilde α von a. Die Richtigkeit des Resultates dieser Construction kann man durch die Gerade aV — die Normale aus a zum Spiegel, in welcher das Spiegelbild α von a gleichfalls liegen muss, controlliren.

In Fig. 11. wurde schliesslich das Spiegelbild γ einer Geraden g im Raume, welche gegen Grund- und Bildebene geneigt ist, bestimmt. Um den Reflex φ des Fluchtpunktes f der Geraden g zu erhalten, lege man wieder durch den unendlich fernen Punkt der Geraden im Raume eine horizontale Ebene. Ihre Bildflächtrace — die neue Grundlinie — wird die Verticallinie und die Bildflächtrace NO des Spiegels in unendlich fernen Punkten treffen; der letztere mit F, dem Fluchtpunkt der Grundflächtrace, verbunden, liefert die auf die neue Grundebene bezogene Grundflächtrace des Spiegels, sie ist also parallel zu NO und fällt mit der Fluchtlinie der Spiegelebene zusammen. Der Reflex des neuen Fusspunktes wird — wie in Fig. 9. — im Punkte R erhalten. Damit ist die Aufgabe gelöst, denn nun hat man, wie gewöhnlich, aus f eine Senkrechte zur Grundlinie zu fällen, bis sie die neue Grundflächtrace — hier also die Fluchtlinie — der Spiegelebene im Punkte s trifft und diesen mit R zu verbinden. Im Schnitte dieser Geraden mit der Verbindungslinie der Punkte f une V erhält man das Spiegelbild φ des Fluchtpunktes f. Ein zweiter Punkt des Reflexes der Geraden g ist ihr Durchstosspunkt d mit der Spiegelebene, somit $d\varphi$ das Spiegelbild γ der Geraden g im Raume.

Auf dieselbe Weise wie hier hätte man auch in Fig. 10. den Reflex φ des Fluchtpunktes f ermitteln können, so dass man mit dem Punkte R allein sein Auskommen gefunden hätte; überdies würde der Schnitt bei φ ein besserer geworden sein.

Bei Spiegelebenen, welche senkrecht zur Bildebene stehen, kann man ganz dasselbe Verfahren in Anwendung bringen, wie bei beliebig geneigten Spiegelebenen, nur erhält man hier statt des Fluchtpunktes der Normalen zum Spiegel und der Reflexe der jeweiligen Fusspunkte Richtungslinien, da die genannten Punkte sämmtlich ins Unendliche fallen. Aus der Aehnlichkeit der dabei auftretenden Dreiecke resultirt jene gewöhnliche Construction, welche z. B. Guido Schreiber in seiner „Schattenlehre" 1868. Seite 156. und H. Weisshaupt in seiner „Perspective" 1868. Fig. 156. verführen.

Wie man die Construction der Spiegelbilder mit Vorteil zum Zeichnen symmetrisch gelegener Figuren- und Körperteile, besonders der symmetrischen Hälfte der Contour von Rotationsflächen benützen kann, wenn man die Symmetrieebene als Spiegelebene betrachtet, hat Herr Prof. R. Niemtschik in der eingangs citirten und in der Abhandlung: „Directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächen in orthogonalen und perspectivischen Darstellungen" (Sitzungsber. der k. k. Akad. d. Wissenschaften in Wien. 1865. 52. Band) gezeigt.

Wien, im Mai 1875.

Digitized by Google

XXXII.

Méthode simple et rapide pour déterminer les lois du mouvement du pendule à petites oscillations.

Par

Georges Dostor.

---

1. Soient O le point de suspension et $OP = l$ la longueur d'un pendule. Si on l'écarte de la direction verticale OP d'un angle très petit $AOP = \alpha$, il retombe vers la verticale OP, la dépasse d'un angle $A'OP = \alpha$, pour retomber encore, et faire autour du centre fixe O une suite indéfinie d'oscillations, dont l'amplitude est égale, pour la première, à l'arc de cercle AOA'.

Supposons qu'au bout du temps t, le pendule ait décrit l'arc AM, et qu'en ce moment le fil OM fasse avec la verticale OP un angle $MOP = \theta$.

Menons en M la tangente MT à l'arc AMP, ainsi que la perpendiculaire MB sur OP.

Si m désigne la masse du pendule et g l'intensité de la pesanteur, la force motrice, qui est verticale, aura pour expression la quantité mg.

Or cette force motrice fait avec la tangente MT un angle qui est le complément de l'angle θ; la composante tangentielle de la force motrice mg sera donc $mg \sin\theta$, ou encore $mg\theta$, attendu que l'angle θ étant très petit, on peut le substituer à son sinus $\sin\theta$.

Appelons s l'arc MP, qui sépare le pendulo M de sa position verticale P; nous avons $s = l\theta$, d'où $\theta = \frac{s}{l}$.

La composaute taugentielle de la force motrice peut donc être représentée par $-\frac{mgs}{l}$, puisqu'elle tend à diminuer l'arc s. Mais cette composante a pour expression générale le produit de m par la dérivée seconde $\frac{d^2s}{dt^2}$ de l'arc s, prise par rapport au temps t. On a par suite l'égalite

(1) $$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{gs}{l}$$

pour l'équation différentielle du mouvement.

2. Appelons v la vitesse du pendule au bout du temps t, c'est-à-dire en M. Puisque

$$v = -\frac{ds}{dt}$$

il vient

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{d^2s}{dt^2},$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\frac{vdv}{dt} = -\frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{ds\,d^2s}{dt\,dt^2}$$

Multipliant cette égalité par $2dt$, et remplaçant $\frac{d^2s}{dt^2}$ par sa valeur $-\frac{gs}{l}$, on obtient l'équation différentielle

$$2vdv = -\frac{g}{l}.2sds,$$

qui donne par l'intégration

$$v^2 = -\frac{gs^2}{l} + C,$$

puis, en remplaçant s par son équivalent $l\theta$,

$$v^2 = -gl\theta^2 + C.$$

On détermine la valeur de la constante C, en observant quo pour $\theta = \alpha$ on a $v = 0$. Ou a donc pour le carré de la vitesse v,

(2) $$v^2 = gl(\alpha^2 - \theta^2).$$

3. Extrayons la raciue carrée, en remarquant que la vitosse v augmente lorsque l'angle θ diminne; nous obtenons l'égalité

$$\sqrt{gl(\alpha^2-\theta^2)} = v = -\frac{ds}{\partial t} = -\frac{ld\theta}{dt},$$

d'où nous tirons

$$dt = \frac{-ld\theta}{\sqrt{gl(\alpha^2-\theta^2)}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{-d\theta}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{-\frac{d\theta}{\alpha}}{\sqrt{1-\frac{\theta^2}{\alpha^2}}}.$$

Intégrant et se rappelant que pour $\theta = \alpha$ ou a $t = 0$, on trouve que

(3) $$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\cdot \text{arc}\left(\cos = \frac{\theta}{\alpha}\right).$$

Cette formule fournit le temps que met le pendule à se rapprocher de la verticale d'un angle égal à $\theta-\alpha$.

4. Si dans cette expression on remplace θ par $-\alpha$, on aura le temps que met le pendule à parcourir l'amplitude APA'. Puisque le cosinus $\frac{\theta}{\alpha}$ devient dans ce cas égal à -1, le plus petit arc correspondant est π, nous aurons

(4) $$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

pour la durée d'une oscillation entière.

5. Si, dans les formules précédentes (2) et (3), on remplace g par sa valeur $\frac{\pi^2 l}{T^2}$, tirée de cette dernière égalité, ces formules deviendront

(5) $$v = \frac{\pi l}{T}\sqrt{\alpha^2-\theta^2},$$

(6) $$t = \frac{T}{\pi}\text{arc}\left(\cos = \frac{\theta}{\alpha}\right)$$

(7) $$\theta = \alpha\cos\frac{\pi t}{T}.$$

XXXIII.

Propriété trigonométrique du triangle rectangle, avec application en astronomie au calcul de l'anomalie vraie en valeur de l'anomalie excentrique.

Par

Georges Dostor.

1. **Théorème.** Dans tout triangle ABC, rectangle en A, on a

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}C = \frac{a-b}{a+b},$$

où a désigne l'hypoténuse et b la côté de l'angle droit qui est adjacent à l'angle C.

Nous avons évidemment

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}C = \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}C}{2\cos^2 \frac{1}{2}C} = \frac{1-\cos C}{1+\cos C} = \frac{a - a\cos C}{a + a\cos C};$$

or on sait que

$$a \cos C = b;$$

donc il vient

(I) $$\tang^2 \tfrac{1}{2}C = \frac{a-b}{a+b}$$

2. **Corollaire.** Nous pouvons multiplier par $a+b$ les deux termes de la fraction précédente, ce qui donne

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}C = \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} = \frac{c^2}{(a+b)^2};$$

donc on a aussi

(II) $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \frac{c}{a+b}.$$

3. Soient maintement AA' le grande axe, C le centre et O le foyer de droite d'une ellipse planétaire. Supposons que le centre du soleil occupe le foyer O.

Prenons ce point O pour pôle et pour axe polaire une droite OX, qui fait avec le grand axe de l'ellipse et au-dessous du sommet de droite A un angle égal à ω.

Admettons que la planète, au bout d'un temps t, occupe la position M sur son orbite elliptique. Du point M abaissons sur le grand axe AA' la perpendiculaire MP, qui rencontre cet axe en P et coupe en N la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.

Si nous tirons les deux droites OM et CN, l'angle MOA sera l'anomalie vraie de la planète, et l'angle NCA sera l'anomalie excentrique de la position M, anomalie que nous représenterons par u.

Posons le rayon vecteur $OM = r$, l'angle polaire $MOX = \theta$, l'abscisse $CP = x$, le grand axo $AA' = 2a$ et l'excentricité $\frac{CO}{CA} = e$, de sorte que $CO = e.\ CA = ae$.

Il s'agit de calculer $\theta - \omega$ en valeur de l'anomalie excentrique u.

Les deux triangles rectangles CNP et OMP nous donnent

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}NCA = \frac{CN-CP}{CN+CP} = \frac{a-x}{a+x}$$

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}MOA = \frac{MO-OP}{MO+OP} = \frac{r-x+ae}{r+x-ae}$$

Mais on sait que

$$r = a - ex;$$

par conséquent on a

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}u = \frac{a-x}{a+x}$$

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(\theta-\omega) = \frac{a-ex-x+ae}{a-ex+x-ae} = \frac{(a-x)(1+e)}{(a+x)(1-e)}\ .$$

donc il vient

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(\theta-\omega) = \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}u,$$

et par suite

(III) $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\theta-\omega) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega,$$

ce qu'il fallait établir.

Paris 27 Février 1877.

XXXIV.

Ueber Punktlinien auf krummen Flächen.

Von

F. Hoza
in Königgräz.

Dupin untersuchte die Gestalt jener Schnittcurve, welche entsteht, wenn man eine krumme Fläche durch eine zur Berührungsebene parallele und ihr unendlich nahe Ebene schneidet, und nannte sie „Indicatrice." Unter diesem Namen wird noch eine andere Curve verstanden, welche auf einer Kugelfläche liegt, die mit dem Radius 1 aus dem Coordinatencentrum beschrieben wird. Indicatrix einer auf gegebener Fläche liegenden Curve heisst nämlich jene Linie der Kugelfläche, deren Radien parallel sind zu den entsprechenden Flächennormalen der gegebenen Curve. (Siehe d. Zeitschr. 59. Teil. 3. Heft. Seite 238 ff. Hoppe „Principien der Flächentheorie"). Um nun jeden Doppelsinn zu vermeiden soll die zuerst genannte Schnittcurve „Punktlinie" heissen, um anzudeuten, dass dieselbe wenigstens in allen Fällen, wo sie geschlossen erscheint, unendlich klein gedacht werden muss.

Es sei eine Fläche gegeben in rechtwinkligen Coordinaten x, y, z als Functionen zweier unabhängiger Parameter u, v. Jedem Punkte m der Fläche entsprechen bestimmte Werte von u, v, und jeder durch diesen Punkt gezogenen Curve entspricht ein bestimmter Wert des Verhältnisses

$$k = \frac{\partial v}{\partial u}.$$

Seien k_1, k_2 solche Werte dieses Verhältnisses, welche den Hauptschnitten zukommen, in denen ein Maximum und Minimum der Krümmung stattfindet. Ferner seien ϱ, ϱ_1, ϱ_2 die entsprechenden Werte der Krümmungsradien eines Normalschnittes und beider Hauptschnitte.

Bezeichnet nun ϑ den Winkel zwischen den Richtungen k, k_1, so lautet der Euler'sche Satz

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\vartheta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{\varrho_2} \tag{1}$$

Wenn ∂s das in der Richtung k genommene Bogenelement mm' des Normalschnittes s bedeutet, so muss

$$\partial s^2 = e\partial u^2 + 2f\partial u\,\partial v + g\partial v^2, \tag{2}$$

wo e, f, g Fundamentalgrössen 1. Ordnung sind.

Nehmen wir die Tangenten der Hauptschnitte k_1, k_2 zu Coordinateuaxen, und heissen ξ, η Abscisse und Ordinate von m', so muss

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \partial s^2 \cos^2\vartheta, \\ \eta^2 &= \partial s^2 \sin^2\vartheta. \end{aligned} \tag{3}$$

Auch ist bekanntlich

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{E\partial u^2 + 2F\partial u\,\partial v + G\partial v^2}{e\partial u + 2f\partial u\,\partial v + g\partial v^2}, \tag{4}$$

wo E, F, G Fundamentalgrössen 2. Ordnung bedeuten. Durch Substitution der Werte aus den Gl. (2), (3) und (4) in die Gl. (1) kommt

$$\frac{\xi^2}{\varrho_1} + \frac{\eta^2}{\varrho_2} = \delta, \tag{5}$$

wo

$$\delta = E\partial u^2 + 2F\partial u\partial v + G\partial v^2. \tag{6}$$

Bedeutet $\partial\tau$ den Convergenzwinkel des Bogenelementes ∂s, so bekommen wir aus den Gl. (2), (4) und (6)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\delta}{\partial s^2}, \tag{7}$$

und weil

$$\varrho = \frac{\partial s}{\partial \tau},$$

so muss

$$\delta = \partial s\,\partial\tau. \tag{8}$$

Das Product st stellt die doppelte Länge eines Kreisevolventenbogens dar, welcher durch Abwickelung des Bogens s, dem ein Centriwinkel t zugehört, entsteht. Daher bedeutet δ zu Folge der Gl. (8) die doppelte Entfernung des Punktes m' von der Berührungsebene in m. Setzen wir δ constant, so liegen alle Punkte m' in einer ebenen Curve P, die erhalten wird, wenn man die gegebene Fläche parallel zur Berührungsebene in der Entfernung $\frac{\delta}{2}$ schneidet. Folglich stellt die Gl. (5) die gesuchte Punktlinie dar, und es gilt der Satz: **Die Punktlinie ist eine Linie vom 2. Grade.**

Zu demselben Resultate gelangte Dupin auf einem wesentlich verschiedenen Wege. Während Dupin die Gleichung seiner Indicatrice aus der Taylor'schen Reihe ableitete, betrachten wir die Punktlinie, wie sie die Gl. (5) darstellt, als blosse Interpretation des Euler'schen Satzes.

Wir wollen noch untersuchen, wann diese Linie ein Kreis, eine Ellipse, Hyperbel oder ein System von 2 Geraden ist.

Vor allem bemerkt man, dass sie niemals eine Parabel sein kann, d. h. die Punktlinie hat stets ein Centrum und das ist der Berührungspunkt m.

Ihre Axen sind

$$a = \sqrt{\delta \varrho_1}, \quad b = \sqrt{\delta \varrho_2},$$

woraus

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}. \tag{9}$$

Die Quadrate ihrer Axen verhalten sich wie die entsprechenden Hauptkrümmungsradien.

Die Excentricität c ist bestimmt durch

$$c^2 = \delta(\varrho_1 - \varrho_2).$$

a) Soll die Punktlinie ein Kreis sein, so muss

$$c = 0,$$

daher entweder

$$\delta = 0 \quad \text{oder}$$

$$\varrho_1 = \varrho_2.$$

Erstere Bedingung gibt nach Gl. (4)

$$\frac{1}{\varrho} = 0,$$

d. h. m ist der gemeinsame Inflexionspunkt aller Normalschnitte.

Diese Bedingung ist für jeden Punkt einer Ebene erfüllt, daher hat jede Ebene nur Kreispunkte.

Der zweiten Bedingung entspricht jeder Nabelpunkt, daher ist jeder Nabelpunkt einer Fläche ein Kreispunkt. Damit m ein Nabelpunkt sei, muss bekanntlich $\frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g} = \frac{1}{\varrho}$

b) Soll die Punktlinie eine Ellipse sein, so müssen ϱ_1, ϱ_2, δ dasselbe Vorzeichen haben. Nun lehrt aber die Gl. (7), dass δ stets im

Vorzeichen mit ϱ übereinstimmt. Folglich müssen ϱ_1, ϱ_2, ϱ dasselbe Vorzeichen haben, was jedenfalls Statt findet, wenn es bei ϱ_1 und ϱ_2 Statt findet. Da $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ die Krümmung der Fläche im Punkte m darstellt, so gilt der Satz:

Die Punktlinie ist eine Ellipse, wenn in dem betreffenden Punkte die Fläche positiv gekrümmt ist.

c) Betrachten wir nun den Fall einer negativen Krümmung der Fläche, wenn nämlich ϱ_1, ϱ_2 verschiedene Vorzeichen besitzen. Es sei z. B. ϱ_1 positiv und ϱ_2 negativ. Bezeichnen wir der besseren Deutlichkeit wegen letzteren mit $-\varrho_2$, so lautet die Gl. (5)

$$\frac{\xi^2}{\varrho_1} - \frac{\eta^2}{\varrho_2} = \delta.$$

Nun kann δ positiv oder negativ sein, d. h. man kann die Schnittebene entweder auf der einen oder auf der andern Seite der Berührungsebene führen.

Ist δ positiv, so muss ϱ ebenfalls positiv sein. Dann enthält die Curve Π nur solche Punkte m', deren Krümmung auf dem entsprechenden Normalschnitte positiv ist.

Setzen wir jedoch δ negativ, so nimmt Gl. (5) die Form an

$$\frac{\eta^2}{\varrho_2} - \frac{\xi^2}{\varrho_1} = \delta,$$

welche nur solche Punkte m' repräsentirt, die auf ihrem Normalschnitte eine negative Krümmung haben.

Bei negativer Krümmung der Fläche sind also 2 Punktlinien möglich; beide sind Hyperbeln mit gemeinschaftlichen Asymptoten und Axen, liegen jedoch in verschiedenen Winkeln dieser Asymptoten.

Heissen ϑ_1 und ϑ_2 die Neigungswinkel dieser Asymptoten zur Abscissenaxe, so muss

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_2 = -\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}},$$

woraus

$$\cos^2\vartheta_1 = \cos^2\vartheta_2 = \frac{\varrho_1}{\varrho_1 + \varrho_2} \quad \text{und}$$

$$\sin^2\vartheta_1 = \sin^2\vartheta_2 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}.$$

Substituirt man diese Werte in die Gl. (1)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\vartheta}{\varrho_1} - \frac{\sin^2\vartheta}{\varrho_2},$$

so kommt

$$\frac{1}{\varrho} = 0, \quad \varrho = \infty, \quad \text{d. h.}$$

Die Asymptoten beider Punktlinien bezeichnen die Richtungen, in denen der Krümmungsradius unendlich gross ist.

Die Asymptotenrichtungen trennen die Punkte mit positiver Normalschnittkrümmung von jenen negativer Krümmung.

Zu Folge der Gl. (6) und (7) muss für die Asymptotenrichtungen

$$E\partial u^2 + 2F\partial u\,\partial v + G\partial v^2 = 0.$$

d) Die Punktlinie geht über in ein System von 2 sich schneidenden Geraden, wenn $\delta = 0$; ihre Gleichungen sind hernach

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}\,\xi,$$

also übereinstimmend mit den Asymptotenrichtungen.

Die Schnittebene ist nun identisch mit der Berührungsebene und enthält in 2 Richtungen, deren Winkel ϑ_1, ϑ_2 früher bestimmt wurden, 2 Gerade, welche die Fläche osculiren.

Enthält eine Fläche 2 durch m gehende Gerade, so bilden diese die Punktlinie von m.

e) Endlich kann die Punktlinie aus 2 parallelen Geraden bestehen. Dieser Fall tritt ein, wenn entweder

$$\varrho_1 = \infty, \text{ wo dann } \eta = \pm\sqrt{\delta\varrho_2}, \quad \text{oder}$$

$$\varrho_2 = \infty, \text{ „ „ } \eta = \pm\sqrt{\delta\varrho_1}$$

die beiden Geraden darstellt.

Wenn also einer der Hauptschnitte im Punkte m einen Inflexionspunkt besitzt, so geht die Punktlinie über in 2 mit der Tangente dieses Hauptschnittes parallele Gerade.

Dasselbe findet Statt in jedem Punkte einer in der Fläche liegenden Geraden.

Königgräz, am 18. März 1877.

Digitized by Google

XXXV.

Nachträge zur Curven- und Flächentheorie.

Von

R. Hoppe.

A.

Bewegung der drei begleitenden Ebenen und der Spiraleubasisebene.

In meiner Curventheorie (T. LVI. p. 45.) habe ich die Bewegung der Normalebene zur Herleitung der Bestimmungsstücke der Curven, dann besonders (p. 68.) die der Binormale und Hauptnormale berechnet, die der übrigen begleitenden Ebenen hingegen übergangen, weil die Methode hinreichend erörtert war, und nur anderweit bekannte Elemente daraus gefunden werden. Um einiger Beobachtungen willen gehe ich noch einmal auf die Bewegung jener 3 Ebenen ein und nehme überdies eine vierte hinzu, durch deren Betrachtung ein gewisses geschlossenes System erst ergänzt wird.

Durch τ, ϑ, σ, λ, s waren, wie auch hier geschehen soll, der Krümmungs- und Torsionswinkel, der Torsionsbogen, die Krümmungsbreite und der Bogen, und es war die Differentiation nach τ durch Striche bezeichnet; ferner bedeuteten

$f,\ g,\ h,$	die Richtungscosinus	der	Tangente,
$f',\ g',\ h'$	„	„	„ Hauptnormale,
$l,\ m,\ n$	„	„	„ Binormale

gegen die Axen der x, y, z, in dem Sinne, wo die Determinante des so geordneten Systems $= +1$ ist. Von den auf die 3 Axen bezüg-

lichen Grössen war und ist es meist nur nötig eine anzugeben, so dass eine auf die x Axe bezügliche Gleichung immer 3 Gleichungen vertritt. Statt der in Anwendung kommenden Formeln kann die Berechnung der Bewegung der Normalebene vorausgeschickt werden, in welcher man die eingeführten Buchstaben zu weiterer Anwendung nur als allgemeine Grössenzeichen zu betrachten braucht, die in jedem neuen Falle ihre neue Bedeutung erhalten.

1. Bewegung der Normalebene.

Man suche zuerst den Drehungswinkel

$$\tau = \int \sqrt{\partial f^2 + \partial g^2 + \partial h^2} \tag{1}$$

dann die Richtungscosinus der Coincidenzlinie oder momentanen Rotationsaxe

$$l = \begin{vmatrix} g & \frac{\partial g}{\partial \tau} \\ h & \frac{\partial h}{\partial \tau} \end{vmatrix} \tag{2}$$

und die Coordinaten ihres Ausgangspunkts

$$x_0 = x + \frac{\partial s}{\partial \tau}\frac{\partial f}{\partial \tau}\left(f\frac{\partial x}{\partial s} + g\frac{\partial y}{\partial s} + h\frac{\partial z}{\partial s}\right) \tag{3}$$

dann den Drehungswinkel der Coincidenzlinie

$$\vartheta = -\int \frac{\partial l\,\partial \tau}{\partial f} \tag{4}$$

und ihren Drehpunktsabstand vom Punkte $(x_0 y_0 z_0)$

$$\left.\begin{aligned} r &= -\frac{\partial l\,\partial x_0 + \partial m\,\partial y_0 + \partial n\,\partial z_0}{\partial \vartheta^2} \\ &= \frac{\partial f\,\partial x_0 + \partial g\,\partial y_0 + \partial h\,\partial z_0}{\partial \tau\,\partial \vartheta} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Coordinaten des Coincidenzpunkts werden

$$x_1 = x_0 + rl \tag{6}$$

Dieser ist zugleich Ausgangspunkt der momentanen Rotationsaxe der Coincidenzlinie, deren Richtungscosinus f, g, h sind.

Hiermit sind die Formeln für die Bewegung jeder Ebene aufgestellt. Bei der Normalebene treten f, g, h, l, m, n, τ, ϑ in ihre bekannte Bedeutung, und man hat:

$$x_0 = x + s'f'; \quad r = \frac{\partial s'}{\partial \vartheta} \tag{7}$$

$$x_1 = x + s'f + \frac{\partial s'}{\partial \vartheta} l \tag{8}$$

Die Normalebene rotirt also momentan um die Krümmungsaxe, und deren Coincidenzpunkt begrenzt auf ihr vom Krümmungsmittelpunkt aus eine Strecke gleich der Derivation des Krümmungsradius nach dem Torsionswinkel.

2. Bewegung der Schmiegungsebene.

Ihre Richtungscosinus sind l, m, n, deren Differentiale

$$\partial l = -f'\partial\vartheta$$

daher ϑ ihr Drehungswinkel,

$$-\begin{vmatrix} m & g' \\ n & h' \end{vmatrix} = f$$

die Richtungscosinus der Coincidenzlinie,

$$x + \frac{\partial s}{\partial \vartheta}\frac{\partial l}{\partial \vartheta}(lf + mg + nh) = x$$

die Coordinaten ihres Ausgangspunkts, also die Tangente selbst Coincidenzlinie. Hiermit sind die weiteren Fragen erledigt.

Die Schmiegungsebene rotirt momentan um die Tangente, deren Coincidenzpunkt der laufende Punkt der Curve ist.

3. Bewegung der rectificirenden Ebene.

Ihre Richtungscosinus sind f', g', h', deren Differentiale

$$\partial f' = (l\sin\lambda - f\cos\lambda)\partial\sigma \tag{9}$$

daher ist σ ihr Drehungswinkel,

$$\begin{vmatrix} g' & m\sin\lambda - g\cos\lambda \\ h' & n\sin\lambda - h\cos\lambda \end{vmatrix} = f\sin\lambda + b\cos\lambda \tag{10}$$

die Richtungscosinus der Coincidenzlinie,

$$x + \frac{\partial s}{\partial \sigma}\frac{\partial f'}{\partial \sigma}(f'f + g'g + h'h) = x$$

die Coordinaten ihres Ausgangspunkts. Die Differentiale jener Richtungscosinus sind:

$$\partial(f\sin\lambda + l\cos\lambda) = (f\cos\lambda - l\sin\lambda)\partial\lambda \tag{11}$$

daher ist λ der Drehungswinkel der Coincidenzlinie. Ihr Drehpunktsabstand vom Ausgangspunkte ist

$$\frac{\partial f'\partial x+\partial g'\partial y+\partial h'\partial z}{\partial\sigma\,\partial\lambda}=-\frac{\partial s}{\partial\lambda} \tag{12}$$

also die Coordinaten des Drehpunkts

$$x_1=x-\frac{\partial s}{\partial\lambda}\cos\lambda\,(f\sin\lambda+l\cos\lambda) \tag{13}$$

Demnach rotirt die rectificirende Ebene momentan um eine Gerade, die durch den laufenden Punkt der Curve geht und mit der Binormale nach der Tangente hin einen Winkel gleich der Krümmungsbreite bildet, und deren Coincidenzpunkt begrenzt auf ihr eine Strecke gleich dem negativen Differentialquotienten des Bogens nach der Krümmungsbreite multiplicirt mit deren Cosinus.

Die so bestimmte momentane Rotationsaxe der rectificirenden Ebene heisst die rectificirende Gerade. Sie hat gleiche Richtung mit der Spiralenaxe. Es kommen ihr Eigenschaften zu, die sie den 3 begleitenden Axen als coordinirt erscheinen lassen. Ebenso wollen wir nun die auf ihr normal durch den Punkt (xyz) gehende Spiralenbasisebene als coordinirt den 3 begleitenden Ebenen betrachten.

4. Bewegung der Spiralenbasisebene.

Ihre Richtungscosinus (10) und deren Differentiale (11) sind aus dem Vorigen bekannt, es folgt, dass λ ihr Drehungswinkel ist. Die Richtungscosinus der Coincidenzlinie sind

$$\begin{vmatrix} g\sin\lambda+m\cos\lambda & g\cos\lambda-m\sin\lambda \\ h\sin\lambda+n\cos\lambda & h\cos\lambda-n\sin\lambda \end{vmatrix}=f'$$

die Coordinaten ihres Ausgangspunkts

$$x+\frac{\partial s}{\partial\lambda}(f\cos\lambda-l\sin\lambda)\{(f\sin\lambda+l\cos\lambda)f+(g\sin\lambda+m\cos\lambda)g$$
$$+(h\sin\lambda+n\cos\lambda)h\}=x+\frac{\partial s}{\partial\lambda}\sin\lambda\,(f\cos\lambda-l\sin\lambda) \tag{14}$$

Die Differentiale ihrer Richtungscosinus sind aus (9) bekannt, demzufolge σ ihr Drehungswinkel ist. Die Differentiale der Coordinaten des Ausgangspunkts sind

$$f\partial\left(s+\frac{\partial s}{\partial\lambda}\sin\lambda\cos\lambda\right)-l\partial\left(\frac{\partial s}{\partial\lambda}\sin^2\lambda\right)+f'\frac{\partial s}{\partial\lambda}\sin\lambda$$

daher wird der Drehpunktsabstand vom Ausgangspunkte

$$= 2\frac{\partial s}{\partial \sigma}\cos\lambda + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda}\right)\sin\lambda$$

$$= \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}\left(2\frac{\partial s}{\partial \lambda}\cos\lambda + \frac{\partial^2 s}{\partial \lambda^2}\sin\lambda\right) = \frac{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda}\sin^2\lambda\right)}{\partial \vartheta} \tag{15}$$

und die Coordinaten des Coincidenzpunkts

$$x_1 = x + \frac{\partial s}{\partial \lambda}\sin\lambda(f\cos\lambda - l\sin\lambda) + \frac{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda}\sin^2\lambda\right)}{\partial \vartheta} f' \tag{16}$$

Die Spiralenbasisebene rotirt also momentan um eine Gerade, die in der Richtung der Hauptnormale durch den Punkt (14) geht. Von diesem aus schneidet deren Coincidenzpunkt die Strecke (15) ab.

Es hat sich ergeben, dass τ, ϑ, σ, λ in ihrer Reihenfolge die Drehungswinkel der 4 betrachteten Ebenen, ϑ, τ, λ, σ die ihrer Coincidenzlinien darstellen. Dieser Umstand zeigt eine Reciprocität, die zwischen der rectificirenden und Spiralenbasisebene ebenso stattfindet, wie zwischen der Normal- und Schmiegungsebene, eine Reciprocität jedoch, die mit der Beziehung der bewegten Ebenen zur Curve nichts zu tun hat, vielmehr aus der allgemeinen Kinematik der Ebene hervorgeht, wie aus den unter 1. aufgeführten Formeln ersichtlich ist, die zeigen, dass die momentane Rotationsaxe der momentanen Rotationsaxe die Richtung der Normale der ursprünglichen Ebene, folglich auch gleichen Drehungswinkel hat. Die Beobachtungen, auf die es hier ankam, sind: 1) dass die genannten 4 Grössen, der Krümmungs- und Torsionswinkel, der Torsionsbogen und die Krümmungsbreite, Grössen auf welche die Untersuchung der allgemeinen Natur der Curven notwendig gleich anfangs geführt wird, die aber anfänglich in verschiedener Weise auftreten, eine cooordinirt entsprechende geometrische Bedeutung, sämmtlich als Drehungswinkel, haben; 2) dass die 3 Hauptrichtungen, der Tangente, Binormale und Hauptnormale, durch eine vierte, die der Spiralenaxe oder rectificirenden Geraden, zu einem geschlossenen System ergänzt werden.

B.

Begleitende Curven.

Auch die in §. 11. der Curventheorie behandelte Aufgabe finde ich Anlass noch einmal aufzunehmen, teils um eine grössere Uebersichtlichkeit in dem mannichfaltigen Stoffe herzustellen, teils um einige neue Betrachtungen damit zu verbinden.

Eine die Curve s begleitende Curve s_1 wird erzeugt durch einen Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ bestimmt durch

$$x_1 = x + pf + ql + rf' \tag{1}$$

wo p, q, r von der Stellung der Coordinatenaxen unabhängig sind. Die gleichnamigen Bestimmungsgrössen beider Curven sollen mit denselben Buchstaben bezeichnet und die der Curve s_1 durch den Index 1 unterschieden werden.

Wir knüpfen die Betrachtung an die Stellung der Tangente der Begleitenden an, der wir nur die im Vorigen ermittelten 4 Hauptrichtungen erteilen. Um ihre Lage ganz zu bestimmen, seien ϱ, μ die Polarcoordinaten ihres Ausgangspunkts $(x_0 y_0 z_0)$ in der normal zu ihr durch den Punkt (xyz) gelegten Ebene, letztern als Centrum, die Binormale der Begleitenden als Anfangsrichtung der μ betrachtet, so dass

$$x_0 = x + \varrho(l_1 \cos\mu + f_1' \sin\mu) \tag{2}$$

wird. Dieser Ausgangspunkt hat dann die Bedingung zu erfüllen, dass die durch ihn bestimmte Gerade einen Coincidenzpunkt hat, ausgedrückt durch

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_1' & \partial x_0 \\ g_1 & g_1' & \partial y_0 \\ h_1 & h_1' & \partial z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Differentiirt man Gl. (2), so kommt:

$$\partial x_0 = f\partial s - f_1 \varrho \sin\mu\, \partial\tau_1 + l_1\{\partial(\varrho\cos\mu) + \varrho\sin\mu\,\partial\vartheta_1\} \\ + f_1'\{\partial(\varrho\sin\mu) - \varrho\cos\mu\,\partial\vartheta_1\}$$

Führt man diesen Wert ein und bezeichnet durch ν den Winkel zwischen der Tangente der Urcurve und der Binormale der Begleitenden, so dass

$$\cos\nu = fl_1 + gm_1 + hn_1 \tag{3}$$

wird, so erhält man:

$$\cos\nu\,\partial s + \{\partial(\varrho\cos\mu) + \varrho\sin\mu\,\partial\vartheta_1\} = 0 \tag{4}$$

und nach Integration:

$$\varrho = -e^{f \operatorname{tg}\mu \partial(\mu - \vartheta_1)} \int \cos\nu\,\partial s\, e^{f \operatorname{tg}\mu \partial(\vartheta_1 - \mu)} \tag{5}$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Demnach kann die Bedingung der Einhüllbarkeit der bewegten Geraden immer durch den Radiusvector ϱ erfüllt werden, dessen Wert überdies eine willkürliche Constante enthält.

Der Abstand des Coincidenzpunkts $(x_1 y_1 z_1)$ vom Ausgangspunkt $(x_0 y_0 z_0)$ ist

Digitized by Google

$$\pi = -\frac{\partial f_1 \partial x_0 + \partial g_1 \partial y_0 + \partial h_1 \partial z_0}{\partial \tau_1^2}$$

$$= -\frac{\partial s}{\partial \tau_1}\cos\varkappa + \frac{\varrho\cos\mu\,\partial\vartheta_1 - \partial(\varrho\sin\mu)}{\partial\tau_1} \tag{6}$$

wo

$$\cos\varkappa = ff_1' + gg_1' + hh_1' \tag{7}$$

gesetzt ist. Multiplicirt man die Gl. (4) mit $\frac{\operatorname{tg}\mu}{\partial\tau_1}$ und addirt sie zu (6), so kommt:

$$\pi = \frac{\partial s}{\partial \tau_1}(\cos\nu\operatorname{tg}\mu - \cos\varkappa) + \frac{\varrho}{\cos\mu}\frac{\partial(\vartheta_1 - \mu)}{\partial\tau_1} \tag{8}$$

und der laufende Punkt der Begleitenden s_1 hat nun die Coordinaten:

$$x_1 = x + \pi f_1 + \varrho(l_1\cos\mu + f_1'\sin\mu) \tag{9}$$

Die Identificirung derselben mit (1) lässt sich leichter in jedem Falle einzeln vollziehen. Um der häufigen Anwendung willen notiren wir noch die durch Differentiation von (1) hervorgehende Gleichung:

$$f_1\partial s_1 = f(\partial s + \partial p - r\partial\tau) + l(\partial q + r\partial\vartheta) + f'(\partial r + p\partial\tau - q\partial\vartheta) \tag{10}$$

Wird nachher f_1 linear in f, l, f' dargestellt, so müssen die Coefficienten der 3 Grössen auf beiden Seiten gleich sein. Da alsdann zwischen p, q, r, s, nur 3 Relationen bestehen, so bleibt eine der 4 Grössen unbestimmt. Ist dies p, q oder r, so vertritt sie die Stelle der disponibeln Grösse μ. Statt dessen kann man auch s_1 als disponibel betrachten, und es zeigt sich, dass die Wahl der Dimensionen der Begleitenden einerseits, und die Wahl der Richtung, nach welcher man ihre Tangente verschiebt, andrerseits einander vertreten können.

1. Tangential begleitende Curven.

Hat die Tangente der Begleitenden die Richtung der Tangente der Urcurve, so sind die Grössen τ, ϑ, σ, λ, f, f', l, überhaupt alle dimensionslosen Stücke, beiden Curven gemeinsam, mithin nur die durch ∂s repräsentirten Dimensionen abweichend.

Hier verschwinden $\cos\nu$ und $\cos\varkappa$, der Integral-Factor von ϱ geht in eine Constante c über, und man findet:

$$\varrho = ce^{\int\operatorname{tg}\mu\,\partial(\mu-\vartheta)}, \quad \pi = \frac{\varrho}{\cos\mu}\frac{\partial(\vartheta-\mu)}{\partial\tau} \tag{11}$$

Die Gleichung der Begleitenden, die wir für diesen Fall tangential begleitend nennen, ist also:

$$x_1 = x + \varrho\left\{\frac{f}{\cos\mu}\frac{\partial(\vartheta-\mu)}{\partial\tau} + l\cos\mu + f'\sin\mu\right\} \tag{12}$$

Ihre Differentialgleichung (10) wird erfüllt durch

$$\left.\begin{aligned}\partial s_1 &= \partial s + \partial p - r\partial\tau \\ 0 &= \partial q + r\partial\vartheta \\ 0 &= \partial r + p\partial\tau - q\partial\vartheta\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

woraus:

$$r = -\frac{\partial q}{\partial\vartheta};\quad p = \vartheta'\left(q + \frac{\partial^2 q}{\partial\vartheta^2}\right) \tag{14}$$

$$s_1 = s + \vartheta'\left(q + \frac{\partial^2 q}{\partial\vartheta^2}\right) + \int\frac{\partial q\,\partial\tau}{\partial\vartheta} \tag{15}$$

$$x_1 = x + f\vartheta'\left(q + \frac{\partial^2 q}{\partial\vartheta^2}\right) + lq - f'\frac{\partial q}{\partial\vartheta} \tag{16}$$

und in Vergleichung mit (12):

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\partial\log q}{\partial\vartheta};\quad \varrho = \frac{q}{\cos\mu} \tag{17}$$

$$p = \pi;\quad q = \varrho\cos\mu;\quad r = \varrho\sin\mu \tag{18}$$

daher

$$s_1 = s + \frac{\varrho}{\cos\mu}\frac{\partial(\vartheta-\mu)}{\partial\tau} - \int\varrho\sin\mu\,\partial\tau \tag{19}$$

Zwei Fälle bieten sich der Specialbetrachtung dar: wo μ proportional ϑ, und wo q ganze Function von ϑ ist. Sei zuerst

$$\mu = a\vartheta \tag{20}$$

dann wird

$$\varrho = c(\cos a\vartheta)^{1-a};\quad \pi = c(1-a)(\cos a\vartheta)^{-a}\vartheta' \tag{21}$$

also

$$\left.\begin{aligned}s_1 &= s + c(1-a)\vartheta'(\cos a\vartheta)^{-a} - c\int(\cos a\vartheta)^{1-a}\sin a\vartheta\,\partial\tau \\ x_1 &= x + c\frac{f\vartheta'(1-a) + \cos^2 a\vartheta(l + f'\operatorname{tg}a\vartheta)}{(\cos a\vartheta)^a}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Sei ferner

$$q = \varphi(\vartheta) \text{ ganze Function } k\text{ten Grades.} \tag{23}$$

Dann wird

$$\left.\begin{aligned}s_1 &= s + \vartheta'\{\varphi(\vartheta) + \varphi''(\vartheta)\} + \int\varphi'(\vartheta)\partial\tau \\ x_1 &= x + f\vartheta'\{\varphi(\vartheta) + \varphi''(\vartheta)\} + l\varphi(\vartheta) - f'\varphi'(\vartheta)\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Da nun ϑ einen willkürlichen Anfang hat, mithin $\vartheta + \alpha$ dafür geschrieben werden kann, so stellen die Gleichungen eine stetige Schar

Begleitender von s dar. Durch Substitution von $\vartheta+\alpha$ für ϑ gehe die Curve s_1 in die Curve s_2 über. Setzt man dann

$$\varphi_0(\vartheta) = \varphi(\vartheta+\alpha) - \varphi(\vartheta) \tag{25}$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} s_2 &= s_1 + \vartheta'\{\varphi_0(\vartheta)+\varphi_0''(\vartheta)\} + \int \varphi_0'(\vartheta)\,\partial\tau \\ x_2 &= x_1 + f'\vartheta'\{\varphi_0(\vartheta)+\varphi_0''(\vartheta)\} + l\varphi_0(\vartheta) - f'\varphi_0'(\vartheta) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

und zwar ist $\varphi_0(\vartheta)$ $(k-1)$ten Grades. Nennt man also die Curve für $q = \varphi(\vartheta)$ eine tangential begleitende $k$ter Ordnung, so ergiebt sich, dass die zur selben Schar $k$ter Ordnung gehörigen Curven unter sich tangential begleitende $(k-1)$ter Ordnung sind.

Einfachste Fälle.

a) Parallele Curven.

Der einfachste Fall der Annahme (20) ist $a = 1$; hier wird

$$\mu = \vartheta; \quad \varrho = c; \quad \pi = 0 \tag{27}$$

$$s_1 = s - c\int \sin\vartheta\,\partial\tau \tag{28}$$

$$x_1 = x + c(l\cos\vartheta + f'\sin\vartheta) \tag{29}$$

Wegen $\pi = 0$ ist die Ebene der $\varrho\mu$ zugleich Normalebene beider Curven, folglich ϱ ihr normaler Abstand. Sofern dieser constant ist, heissen die Curven parallel.

b) Tangential-begleitende 0. Ordnung.

Sei $q = b$ constant; dann gehen die Gl. (15) (16) über in

$$s_1 = s + b\vartheta' \tag{30}$$

$$x_1 = x + b(l + f\vartheta') = x + b\frac{l\cos\lambda + f\sin\lambda)}{\cos\lambda} \tag{31}$$

Der laufende Punkt der Begleitenden liegt also auf der rectificirenden Geraden, und zwar ist er deren Durchschnitt mit einer Parallele der Tangente im Abstand b von letzterer. Nach (17) ist hier $\mu = 0$; $\varrho = b$.

c) Tangential-begleitende 1. Ordnung.

Sei $q = b\vartheta$; dann wird

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= s + b(\tau + \vartheta\vartheta') \\ x_1 &= x + b\vartheta(f\vartheta' + l) - bf' \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Die Curven, welche hieraus bei variirendem Anfang der ϑ hervorgehen, stehen unter sich in der Relation b).

Die tangential begleitenden Curven bieten offenbar keine Frage der Inversion dar, da ihre Beziehung zur Urcurve eine gegenseitige ist.

2. Binormal begleitende Curven.

Hat die Tangente der Begleitenden die Richtung der Binormale der Urcurve, so sind die inneren Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1 = -\vartheta; \quad \vartheta_1 = \tau; \quad \sigma_1 = \sigma; \quad \lambda_1 = \lambda + \mathrm{R} \\ f_1 = l; \quad l_1 = -f; \quad f_1' = f' \end{array}\right\} \tag{33}$$

Demnach wird hier nach (3) (7)

$$\cos\nu = 1; \quad \cos\varkappa = 0$$

und man findet:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho = -\dfrac{e^{-\int \operatorname{tg}\mu\,\partial\tau}}{\cos\mu}\int \partial s \cos\mu\, e^{\int \operatorname{tg}\mu\,\partial\tau} \\ \pi = -\dfrac{\partial s}{\partial\vartheta}\operatorname{tg}\mu + \dfrac{\varrho}{\cos\mu}\dfrac{\partial(\mu-\tau)}{\partial\vartheta} \end{array}\right\} \tag{34}$$

Der laufende Punkt der Begleitenden hat die Coordinaten:

$$x_1 = x - f\varrho\cos\mu + l\pi + f'\varrho\sin\mu \tag{35}$$

Dies verglichen mit (1) giebt:

$$p = -\varrho\cos\mu; \quad q = \pi; \quad r = \varrho\sin\mu \tag{36}$$

Die Differentialgleichung (10) wird erfüllt durch

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \partial s + \partial p - r\partial\tau \\ \partial s_1 = \partial q + r\partial\vartheta \\ 0 = \partial r + p\partial\tau + q\partial\vartheta \end{array}\right\} \tag{37}$$

woraus:

$$r = \frac{\partial(s+p)}{\partial\tau}; \qquad q = \frac{1}{\vartheta'}\left\{\frac{\partial^2(s+p)}{\partial\tau^2} + p\right\} \tag{38}$$

$$s_1 = \frac{1}{\vartheta'}\left\{\frac{\partial^2(s+p)}{\partial\tau^2} + p\right\} + \int \vartheta'\partial(s+p) \tag{39}$$

$$x_1 = x + fp + \frac{l}{\vartheta'}\left\{\frac{\partial^2(s+p)}{\partial\tau^2} + p\right\} + f'\frac{\partial(s+p)}{\partial\tau} \tag{40}$$

und um den Bogen auch in μ darzustellen:

$$s_1 = \pi + \int \varrho\sin\mu\,\partial\vartheta \tag{41}$$

Die Inversion ist bei den innern Beziehungen (33) unmittelbar vorliegend; abgesehen von den Vorzeichen sind sie reciprok. In Betreff der Dimensionen hängt sie davon ab, ob und wie s in p enthalten ist. Betrachten wir nur die Fälle, wo p und wo $s+p$ Function von τ ist, so ist im ersten die Gl. (39) in der Form

$$\frac{\partial s'}{\partial \vartheta} + \int s' \partial \vartheta = s_1 - \frac{1}{\vartheta'} \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - \frac{p}{\vartheta'} - \int \vartheta' \partial p$$

oder, nach $\vartheta = -\tau_1$ differentiirt, in der Form

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial \vartheta^2} + s' = -s_1' - \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{p}{\vartheta'} - \frac{\partial p}{\partial \tau}$$

zu integriren. Dies giebt:

$$s' = c \cos(\gamma - \vartheta) - \frac{\partial p}{\partial \tau} + \cos \vartheta \int (s_1' \sin \vartheta \, \partial \vartheta - p \cos \vartheta \, \partial \tau) \\ - \sin \vartheta \int (s_1' \cos \vartheta \, \partial \vartheta + p \sin \vartheta \, \partial \tau) \qquad (42)$$

oder, ganz auf s_1 bezogen:

$$s' = c \cos(\tau_1 + \gamma) - \frac{\partial p}{\partial \vartheta_1} + \cos \tau_1 \int (s_1' \sin \tau_1 \, \partial \tau_1 - p \cos \tau_1 \, \partial \vartheta_1) \\ - \sin \tau_1 \int (s_1' \cos \tau_1 \, \partial \tau_1 + p \sin \tau_1 \, \partial \vartheta_1) \qquad (43)$$

und die Gleichung der inversen Curve lautet:

$$x = x_1 + f_1 \left\{ \frac{\partial s'}{\partial \tau_1} + \vartheta_1' \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \vartheta_1^2} + p \right) \right\} + l_1 p - f_1' \left(s' + \frac{\partial p}{\partial \vartheta_1} \right) \qquad (44)$$

Im zweiten Falle hat man unmittelbar:

$$s = -s_1 \vartheta' + \frac{\partial^2 (s+p)}{\partial \tau^2} + s + p + \int \vartheta' \partial (s+p)$$

oder

$$s = \frac{s_1}{\vartheta_1'} + \frac{\partial^2 (s+p)}{\partial \vartheta_1^2} + s + p + \frac{1}{\vartheta_1'} \int \frac{\partial (s+p)}{\vartheta_1'} \qquad (45)$$

und nach Einsetzung in (40):

$$x = x_1 - f_1 \left(s_1 + \int \frac{\partial (s+p)}{\vartheta_1'} \right) - l_1 \left\{ \frac{s_1}{\vartheta_1'} + \frac{\partial^2 (s+p)}{\partial \vartheta_1^2} + \frac{1}{\vartheta_1'} \int \frac{\partial (s+p)}{\vartheta_1'} \right\} \\ - f_1' \frac{\partial (s+p)}{\partial \vartheta_1} \qquad (46)$$

Im ersten Falle enthält s' zwei willkürliche Constante c, γ. Betrachtet man eine Curve s_0, für welche $c = c_0$, $\gamma = 0$ ist, als Begleitende von s, so ergiebt sich:

$$s_0' = s' + c_0 \cos\vartheta - c\cos(\gamma - \vartheta)$$
$$x_0 = x + l\{c_0 \sin\vartheta + c\sin(\gamma - \vartheta)\} + f'\{c\cos(\gamma - \vartheta) - c_0\cos\vartheta\}$$

Setzt man

$$c_0 - c\cos\gamma = a\sin\alpha; \quad c\sin\gamma = a\cos\alpha$$

so wird

$$x_0 = x + al\cos(\vartheta - \alpha) + af'\sin(\vartheta - \alpha)$$

und es zeigt sich nach (29), dass die Curven s uud s_0 einander parallel sind. Dies Resultat ist allein dadurch bedingt, dass p unabhängig von s ist. Da nun p den Abstand des Punkts (xyz) von der Schmiegungsebene der Curve s_1 ausdrückt, so lässt sich der Satz aufstellen:

Alle Curveu, welche dieselbe Binormal-begleiteude habeu, sind einander parallel, wenn der Abstand ihres laufeudeu Punkts von der Schmiegungsebene jener Begleitenden von den Dimensiouen unabhängig ist.

Einfachste Fälle.

a) Einhüllende der Krümmungsaxe.

Sei $p = 0$; dann wird

$$s_1 = \frac{\partial s'}{\partial\vartheta} + \int s'\partial\vartheta \tag{47}$$

$$x_1 = x + l\frac{\partial s'}{\partial\vartheta} + f's' \tag{48}$$

$$\mu = R; \quad \varrho = s'$$

Der Ausgangspunkt der eingehüllten Geraden ist hier der Krümmungsmittelpunkt, sie selbst also die Krümmungsaxe. Die Inversion ergiebt:

$$s' = c\cos(\tau_1 + \gamma) + \cos\tau_1 \int s_1'\sin\tau_1\partial\tau_1 - \sin\tau_1\int s_1'\cos\tau_1\partial\tau_1$$
$$x = x_1 + f_1\frac{\partial s'}{\partial\tau_1} - f_1's' \tag{49}$$

das ist eine doppelt unendliche Schar paralleler Curveu, binormal begleitende von s_1.

b) Reciproke Binormal-begleitende 0. Ordnung.

Sei $p + s = 0$; dann wird

$$s_1 = -\frac{s}{\vartheta'} \tag{50}$$

$$x_1 = x - \left(f + \frac{l}{\vartheta'}\right)s = x - (f\sin\lambda + l\cos\lambda)\frac{s}{\sin\lambda} \tag{51}$$

und umgekehrt nach (45) (46)

$$s = \frac{s_1}{\vartheta_1'} \tag{52}$$

$$x = x_1 - \left(f_1 + \frac{l_1}{\vartheta_1'}\right) s_1 \tag{53}$$

Die Beziehung beider Curven ist also, abgesehen von gewissen Vorzeichen, reciprok. Diese Begleitende ist leicht zu construiren. Man schneide auf der negativen Seite der Tangente vom Berührungspunkt aus den Bogen ab und errichte im Endpunkt ein Lot auf der Tangente, welches dann die rectificirende Gerade im laufenden Punkte der Begleitenden schneidet.

Da der Bogen einen willkürlichen Anfang hat, so stellt die Gleichung der Begleitenden eine stetige Schar von Curven dar. Ist dann s_2 eine zweite aus der Schar, die man durch Substitution von $s + a$ für s erhält, so ist

$$x_2 = x_1 - a\left(f + \frac{l}{\vartheta'}\right) = x_1 + a(l_1 + f_1\vartheta_1')$$

Dies verglichen mit (31) zeigt, dass die verschiedenen reciproken Binormal-begleitenden 0. Ordnung unter sich Tangential-begleitende 0. Ordnung sind.

c) Reciproke Binormal-begleitende 1. Ordnung.

Sei $p + s = c\tau$; dann wird

$$s_1 = c\frac{\tau\partial\tau + \vartheta\partial\vartheta}{\partial\vartheta} - \frac{s}{\vartheta'} \tag{54}$$

$$x_1 = x + (c\tau - s)\left(f + \frac{l}{\vartheta'}\right) + cf' \tag{55}$$

und umgekehrt

$$s = c\frac{\tau_1\partial\tau_1 + \vartheta_1\partial\vartheta_1}{\partial\vartheta_1} + \frac{s_1}{\vartheta_1'} \tag{56}$$

$$x = x_1 - (c\tau_1 + s_1)\left(f_1 + \frac{l_1}{\vartheta_1'}\right) - cf_1' \tag{57}$$

Die Beziehung ist reciprok. Die 2 willkürlichen Constanten in s und τ verschmelzen zu einer, bei deren Variation Curven entstehen, unter sich in derselben Beziehung wie beim vorigen Falle.

Die Reciprocität würde anhören, wenn $p + s$ höhere Potenzen von τ enthielte.

d) **Parallele mit der Einhüllenden der Krümmungsaxe.**

Sei $p = c\cos\tau$; dann wird

$$s_1 = \frac{\partial s'}{\partial\vartheta} - c\int \sin\tau\,\partial\vartheta + \int s'\partial\vartheta \tag{58}$$

$$x_1 = x + cf\cos\tau + l\frac{\partial s'}{\partial\vartheta} + f'(s' - c\sin\tau) \tag{59}$$

und umgekehrt

$$s' = c\cos(\tau_1 + \gamma) + \cos\tau_1 \int (s_1' + c\sin\vartheta_1)\sin\tau_1\,\partial\tau_1$$
$$- \sin\tau_1 \int (s_1' + c\sin\vartheta_1)\cos\tau_1\,\partial\tau_1 \tag{60}$$

$$x = x_1 + f_1\frac{\partial s'}{\partial\tau_1} + cl_1\cos\vartheta_1 - f_1'(s' - c\sin\vartheta_1) \tag{61}$$

Schreibt man Gl. (59) wie folgt

$$x_1 = x_2 + c(f\cos\tau - f'\sin\tau)$$
$$x_2 = x + l\frac{\partial s'}{\partial\vartheta} + f's'$$

so ist die Curve s_2 die Einhüllende der Krümmungsaxe von s, daher

$$f = -l_2;\quad f' = f_2';\quad \tau = \vartheta_2$$

so dass

$$x_1 = x_2 - c(l_2\cos\vartheta_2 + f_2'\sin\vartheta_2)$$

eine Parallele mit s_2 darstellt. Demnach ist s_1 eine Parallele mit der Einhüllenden der Krümmungsaxe von s.

e) **Parallele mit der Binormal-begleitenden 0. Ordnung.**

Sei $p + s = c\cos\tau$; dann wird

$$s_1 = -\frac{s}{\vartheta'} - c\int \sin\tau\,\partial\vartheta \tag{62}$$

$$x_1 = x + f(c\cos\tau - s) - \frac{ls}{\vartheta'} - cf'\sin\tau \tag{63}$$

und umgekehrt

$$s = \frac{s_1 - c\int \sin\vartheta\,\partial\tau_1}{\vartheta_1'} \tag{64}$$

$$x = x_1 + f_1(c\int \sin\vartheta_1\partial\tau_1 - s_1) + l_1\left(\frac{c\int\sin\vartheta_1\partial\tau_1 - s_1}{\vartheta_1'} + c\cos\vartheta_1\right)$$
$$+ cf_1'\sin\vartheta_1 \tag{65}$$

Schreibt man Gl. (63) wie folgt

$$x_1 = x_2 + c(f\cos\tau - f'\sin\tau)$$
$$x_2 = x - \left(f + \frac{l}{\vartheta'}\right)s$$

so zeigt sich, dass s_1 eine Parallele mit der reciproken Binormalbegleitenden 0. Ordnung s_2 von s ist.

3. Hauptnormal begleitende Curven.

Hat die Tangente der Begleitenden die Richtung der Hauptnormale der Urcurve, so sind die inneren Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &\tau_1 = \sigma; \quad \vartheta_1 = \lambda; \quad \partial\sigma_1 = \sqrt{\partial\sigma^2 + \partial\lambda^2}; \quad \operatorname{tg}\lambda_1 = \frac{\partial\lambda}{\partial\sigma} \\ &f_1 = f'; \quad l_1 = l\cos\lambda + f\sin\lambda; \quad f_1' = l\sin\lambda - f\cos\lambda \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

und umgekehrt:

$$\left.\begin{aligned} &\partial\tau = \partial\tau_1\cos\vartheta_1; \quad \partial\vartheta = \partial\tau_1\sin\vartheta_1; \quad \sigma = \tau_1; \quad \lambda = \vartheta_1 \\ &f = l_1\sin\vartheta_1 - f_1'\cos\vartheta_1; \quad l = l_1\cos\vartheta_1 + f_1'\sin\vartheta_1; \quad f' = f_1 \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Die Binormale der Begleitenden hat also die Richtung der Spiralenaxe der Urcurve, ihre Hauptnormale ist das Lot auf dieser in der rectificirenden Ebene, ihr Krümmungs- und Torsionswinkel sind Torsionsbogen und Krümmungsbreite der Urcurve.

Da hier nach (3) (7)

$$\cos\nu = \sin\lambda; \quad \cos\varkappa = -\cos\lambda$$

ist, so gehen die Gl. (5) (8) über in

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= -\frac{e^{-\int \operatorname{tg}\mu\,\partial\lambda}}{\cos\mu}\int \sin\lambda\cos\mu\,\partial s \,.\, e^{\int \operatorname{tg}\mu\,\partial\lambda} \\ \pi &= \frac{\partial s}{\partial\sigma}\,\frac{\cos(\lambda-\mu)}{\cos\mu} + \frac{\varrho}{\cos\mu}\,\frac{\partial(\lambda-\mu)}{\partial\sigma} \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Die Gleichung der Begleitenden wird

$$x_1 = x + \varrho\{f\sin(\lambda-\mu) + l\cos(\lambda-\mu)\} + \pi f' \tag{69}$$

Dies verglichen mit (1) giebt:

$$p = \varrho\sin(\lambda-\mu); \quad q = \varrho\cos(\lambda-\mu); \quad r = \pi \tag{70}$$

Die Differentialgleichung (10) wird erfüllt durch

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \partial s + \partial p - r\partial\tau \\ 0 &= \partial q + r\partial\vartheta \\ \partial s_1 &= \partial r + p\partial\tau - q\partial\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

woraus:

$$r = -\frac{\partial q}{\partial \vartheta}; \quad p = -s - \int \frac{\partial q \, \partial \tau}{\partial \vartheta} \tag{72}$$

$$\partial s_1 = -\left(q + \frac{\partial^2 q}{\partial \vartheta^2}\right)\partial\vartheta - \left(s + \int \frac{\partial q \, \partial \tau}{\partial \vartheta}\right)\partial\tau \tag{73}$$

$$x_1 = x - \left(s + \int \frac{\partial q}{\vartheta'}\right)f + ql - \frac{\partial q}{\partial \vartheta}f' \tag{74}$$

und in μ, ϱ, π dargestellt

$$s_1 = \pi - \int \varrho \sin\mu \, \partial\sigma \tag{75}$$

Die Inversion ergiebt, wofern q unabhängig von s ist:

$$\left.\begin{aligned} s &= -\frac{s_1'}{\cos\vartheta_1} - \left(q + \frac{\partial^2 q}{\partial \vartheta^2}\right)\operatorname{tg}\vartheta_1 - \int \cot\vartheta_1 \, \partial q \\ x &= x_1 + \frac{f_1}{\sin\vartheta_1}\frac{\partial q}{\partial \tau_1} + l_1\{(s + \int \cot\vartheta_1 \, \partial q)\sin\vartheta_1 - q\cos\vartheta_1\} \\ &\quad - f_1'\{(s + \int \cot\vartheta_1 \, \partial q)\cos\vartheta_1 + q\sin\vartheta_1\} \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Einfachste Fälle.

a) **Evolvente.**

Sei $q = 0$; dann wird

$$s_1 = -\int s \, \partial\tau \tag{77}$$

$$x_1 = x - sf \tag{78}$$

$$\mu = \lambda + \mathrm{R}; \quad \varrho = s; \quad \pi = 0$$

und umgekehrt

$$s = -\frac{s_1'}{\cos\vartheta_1} \tag{79}$$

$$x = x_1 + s_1'(-l_1 \operatorname{tg}\vartheta_1 + f_1') \tag{80}$$

Der laufende Punkt der Begleitenden begrenzt auf dem negativen Arme der Tangente eine Strecke gleich dem Bogen, erzeugt daher die Evolvente der Urcurve. Die inverse Begleitende (80) ist dann die Evolute.

Wegen des willkürlichen Anfangs von s repräsentirt (78) eine stetige Schar von Evolventen. Ist s_2 eine zweite Evolvente entsprechend der Substitution von $s + a$ für s, so ist

$$x_2 = x_1 - af = x_1 - a(l_1 \sin\vartheta_1 - f_1' \cos\vartheta_1)$$

das ist die Gleichung einer Parallele mit s_1; alle Evolventen derselben Curve sind also einander parallel.

Einfachste Fälle.

a) Einhüllende der rectificirenden Geraden.

Sei $r = 0$; dann wird zunächst $\varrho \cos \mu = 0$, also nach (4) auch $\varrho \sin \mu = 0$, folglich $\varrho = 0$, μ bedeutungslos. Jetzt ist nach (96)

$$\pi = -\frac{\partial s}{\partial \lambda} \cos \lambda \tag{97}$$

daher

$$p = -\frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin \lambda \cos \lambda; \quad q = -\frac{\partial s}{\partial \lambda} \cos^2 \lambda \tag{98}$$

und die Gleichnngen der Begleitenden sind:

$$s_1 = -\frac{\partial s}{\partial \lambda} \cos \lambda + \int \sin \lambda \, \partial s \tag{99}$$

$$x_1 = x - \frac{\partial s}{\partial \lambda} \cos \lambda \, (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \tag{100}$$

Znr Inversion ist erst Gl. (99) zu integriren. Differentiirt man sie vorher so kommt:

$$\frac{\partial s_1}{\partial \lambda} = -\frac{\partial^2 s}{\partial \lambda^2} \cos \lambda + 2 \frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin \lambda$$

$$= -\frac{1}{\cos \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \cos^2 \lambda \right)$$

woraus:

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda} \cos^2 \lambda = -\int \cos \lambda \, \partial s_1 \quad \text{oder}$$

$$\partial s = -\frac{\partial \tau_1}{\cos^2 \tau_1} \int \cos \tau_1 \, \partial s_1 \tag{101}$$

und die Gleichung der inversen Curve wird:

$$x = x_1 - \frac{f_1}{\cos \tau_1} \int \cos \tau_1 \, \partial s_1 \tag{102}$$

Da $\varrho = 0$, so geht die Tangente von s_1 durch den Punkt (xyz), folglich ist s_1 die Einhüllende der rectificirenden Geraden.

Die Gleichung der Inversen (102) stellt, rücksichtlich des Integrals eine stetige Schar von Curven dar. Ist s_0 eine Curve ans dieser Schar, in welcher das Integral das constante Increment a hat, so ist

$$x_0 = x - \frac{a f_1}{\cos \tau_1} = x - a (f \operatorname{tg} \lambda + l) \tag{103}$$

Hiernach sind die verschiedenen Urcurven zu derselben Einhüllenden der rectificirenden Geraden unter sich tangential-begleitende 0. Ordnung, wie die Vergleichung mit (31) zeigt.

4. Rectificirend begleitende Curven.

Hat die Tangente der Begleitenden die Richtung der Spiralenaxe der Urcurve, so sind die inneren Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1 = \lambda;\quad \vartheta_1 = \sigma;\quad \partial\sigma_1 = \sqrt{\partial\sigma^2+\partial\lambda^2};\quad \operatorname{tg}\lambda_1 = \frac{\partial\sigma}{\partial\lambda} \\ f_1 = f\sin\lambda + l\cos\lambda;\quad l_1 = f';\quad f_1' = f\cos\lambda - l\sin\lambda \end{array}\right\} \tag{87}$$

und umgekehrt

$$\left.\begin{array}{l} \partial\tau = \partial\vartheta_1\cos\tau_1;\quad \partial\vartheta = \partial\vartheta_1\sin\tau_1;\quad \sigma = \vartheta_1;\quad \lambda = \tau_1 \\ f = f_1\sin\tau_1 + f_1'\cos\tau_1;\quad l = f_1\cos\tau_1 - f_1'\sin\tau_1;\quad f' = l_1 \end{array}\right\} \tag{88}$$

Die Binormale der Begleitenden hat also die Richtung der Hauptnormale der Urcurve. Vergleicht man diese Curven mit den hauptnormal begleitenden, so zeigt sich, dass die Tangente mit der Binormale, der Krümmungswinkel mit dem Torsionswinkel vertauscht, die Hauptnormalen entgegengesetzt gerichtet, und die Krümmungsbreiten Complemente sind. Man kann daher jede der 2 Arten Begleitender als Binormal-begleitende der andern betrachten, indem man zugleich die positive Richtung der Hauptnormale umgekehrt wählt.

Hier wird

$$\cos\nu = 0;\quad \cos\varkappa = \cos\lambda$$

daher

$$\varrho = -\frac{c}{\cos\mu}e^{-\int\operatorname{tg}\mu\partial\sigma};\qquad \pi = \frac{\varrho}{\cos\mu}\frac{\partial(\sigma-\mu)}{\partial\lambda} - \frac{\partial s}{\partial\lambda}\cos\lambda \tag{89}$$

und die Gleichung der Begleitenden s_1 lautet:

$$x_1 = x + f(\pi\sin\lambda + \varrho\sin\mu\cos\lambda) + l(\pi\cos\lambda - \varrho\sin\mu\sin\lambda) + f'\varrho\cos\mu \tag{90}$$

Dies verglichen mit (1) giebt:

$$p = \pi\sin\lambda + \varrho\sin\mu\cos\lambda;\quad q = \pi\cos\lambda - \varrho\sin\mu\sin\lambda;\quad r = \varrho\cos\mu \tag{91}$$

Die Differentialgleichung (10) wird erfüllt durch

$$\begin{array}{l} \sin\lambda\partial s_1 = \partial s + \partial p - r\partial\sigma\cos\lambda \\ \cos\lambda\partial s_1 = \partial q + r\partial\sigma\sin\lambda \\ 0 = \partial r + (p\cos\lambda - q\sin\lambda)\partial\sigma \end{array} \tag{92}$$

woraus:

$$\partial s_1 = \sin\lambda\partial(s+p) + \cos\lambda\partial q \tag{93}$$

$$0 = \cos\lambda\partial(s+p) - \sin\lambda\partial q - r\partial\sigma \tag{94}$$

oder, nach Substitution der Werte (91):

$$s_1 = \pi + \int\sin\lambda\partial s - \int\varrho\sin\mu\partial\lambda \tag{95}$$

$$0 = \cos\lambda\partial s + \pi\partial\lambda + \sin\mu\partial\varrho + \varrho\cos\mu\partial(\mu-\sigma) \tag{96}$$

Die verschiedenen Urcurven zu einer Begleitenden, welche constanten Incrementen des Integrals entsprechen, stehen unter sich in derselben Beziehnng (103) wie im Falle a).

Zerlegt man Gl. (106) in

$$x_1 = x_2 + c\left\{\frac{\partial s}{\partial \lambda}(f\sin\lambda + l\cos\lambda) + f'\right\}$$

$$x_2 = x - \frac{\partial s}{\partial \lambda}\cos\lambda(f\sin\lambda + l\cos\lambda)$$

so zeigt sich, dass s_2 die Einhüllende der rectificirenden Geraden von s ist. Jetzt kann man demzufolge die erste Gleichung auch schreiben

$$x_1 = x_2 + c(f_2 \operatorname{tg}\lambda_2 + l_2)$$

wodurch sich s_1 als Tangential-begleitende 0. Ordnung von s_2 erweist.

5. Verdreht begleitende Curven.

Es bleibt übrig der Tangente der Begleitenden eine beliebige der rectificirenden Ebene parallele Richtung unter constanter Neigung α gegen die Tangente der Urcurve zu geben. Die inneren Beziehungen sind dann:

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta_1 = \vartheta\cos\alpha + \tau\sin\alpha;\quad \tau_1 = -\vartheta\sin\alpha + \tau\cos\alpha;\quad \sigma_1 = \sigma;\quad \lambda_1 = \lambda + \alpha \\ f_1 = f\cos\alpha + l\sin\alpha;\quad l_1 = -f\sin\alpha + l\cos\alpha;\quad f_1' = f'\end{array}\right\}\quad(111)$$

Die Inversion macht nur $-\alpha$ aus α.

Die Differentialgleichung (10) wird erfüllt durch

$$\left.\begin{array}{rl}\partial s_1\cos\alpha &= \partial s + \partial p - r\,\partial\tau \\ \partial s_1\sin\alpha &= \partial q - r\,\partial\vartheta \\ 0 &= \partial r + (p\cos\lambda - q\sin\lambda)\,\partial\sigma\end{array}\right\}\quad(112)$$

Mitevolute.

Der einfachste Fall ist $r = 0$. Hier ergeben sich leicht die Werte:

$$p = \frac{s\sin\alpha\sin\lambda}{\cos(\lambda+\alpha)};\qquad q = \frac{s\sin\alpha\cos\lambda}{\cos(\lambda+\alpha)}$$

$$s_1 = \frac{s\cos\lambda}{\cos(\lambda+\alpha)}\quad(113)$$

und die Gleichung der Begleitenden lautet:

$$x_1 = x + s\sin\alpha\frac{f\sin\lambda + l\cos\lambda}{\cos(\lambda+\alpha)} \tag{114}$$

Ihr laufender Punkt liegt also auf der rectificirenden Geraden der Urcurve. Drückt man f, l in f_1, l_1 aus, so geht die Gleichnng über in

$$x_1 = x + s\sin\alpha\{f_1\operatorname{tg}(\lambda+\alpha) + l_1\} \tag{115}$$

Dies verglichen mit (9) zeigt, dass

$$\mu = 0; \quad \varrho = s\sin\alpha; \quad \pi = s\sin\alpha\operatorname{tg}(\lambda+\alpha)$$

ist. Demnach liegt der Ausgangspunkt der von s_1 eingehüllten Geraden in der Binormale von s_1, und schneidet auf dieser eine Strecke $= s\sin\alpha$ ab.

Die Curvenrelation (114) ist diejenige, welche nach (81) zwischen den verschiedenen Evolnten derselben Curve statt findet. Man kann daher die Verdreht-hegleitende für den Fall (114) die Mitevolnte nennen. Die Mitevoluten zeichnen sich durch die einfache Relation (113) aus, nach welcher das Product des Bogens und des Cosinus der Krümmungsbreite für alle Mitevoluten dieselbe Grösse ist.

Auch bei unverändertem Verdrehungswinkel α variirt die Mitevolute noch mit dem Anfang des Bogens s. Geht, bei Substitution von $s+a$ für s, s_1 in s_2 über, so ist infolge von (113) (115)

$$s_2 = s_1 + a(\cos\alpha + \sin\alpha\operatorname{tg}\lambda_1)$$
$$x_2 = x_1 + a\sin\alpha(f_1\operatorname{tg}\lambda_1 + l_1)$$

und s_2 erweist sich als Tangential-begleitende 0. Ordnung von s_1.

Bemerkung.

Durch die Inversion haben ausser den 4 Hauptrichtungen noch 2 andere Bedeutung gewonnen, die jedoch nur bis auf eine willkürliche Constante bestimmt sind. Die Inverse der Hauptnormal-begleitenden hat ihre Tangentialrichtung in der Normalebene in einer Neigung gleich dem Torsionswinkel gegen die negative Hauptnormale (oder wenn man will gegen die Binormale, sofern beide Neigungen um die Constante R differiren). Die Inverse der Rectificirend-hegleitenden hat ihre Tangentialrichtung in der Schmiegungsebene in einer Neigung gleich dem Krümmungswinkel gegen die Hauptnormale (oder gegen die Tangente). Man könnte daher auch die Begleitenden untersuchen, deren Tangenten diese Richtungen haben. Die einfachsten Fälle sind dann bzhw. die Evolute und die Inverse der Einhüllenden der rectificirenden Geraden.

C.

Asymptoten.

Asymptote heisst eine feste Gerade, der die Tangente einer Curve unendlich nahe kommt, wenn der Berührungspunkt einen unendlich langen Bogen durchläuft.

Es sollen die Bedingungen der Existenz einer Asymptote einer vorliegenden Curve und ihre Gleichungen aufgestellt werden.

Den Ausgangspunkt der Tangente wollen wir so wählen, dass er nicht mit dem Berührungspunkt in unendliche Ferne rückt. Wir legen ihn deshalb in den Durchschnitt der Tangente mit einer durch den Anfangspunkt der xyz gehenden normalen Ebene. Sind f, g, h die Richtungscosinus der Tangente, so ist die Gleichung dieser Ebene:

$$fx_0 + gy_0 + hz_0 = 0 \tag{1}$$

und die Coordinaten ihres Durchschnitts mit der Tangente im Punkte (xyz)

$$x_0 = x - pf; \quad y_0 = y - pg; \quad z_0 = z - ph \tag{2}$$

wo

$$p = fx + gy + hz$$

gesetzt ist. Bezeichnet man durch r den Radiusvector des Berührungspunkts und setzt

$$x = ur; \quad y = vr; \quad z = wr$$

so wird

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1; \quad p = r\frac{\partial r}{\partial s} \tag{3}$$

$$f = u\frac{\partial r}{\partial s} + r\frac{\partial u}{\partial s}; \quad \text{etc.} \tag{4}$$

woraus:

$$1 = f^2 + g^2 + h^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + r^2\frac{\partial u^2 + \partial v^2 + \partial w^2}{\partial s^2}$$

oder, wenn

$$q^2 = \frac{\partial u^2 + \partial v^2 + \partial w^2}{\partial s^2}$$

gesetzt wird:

$$1 - \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 = q^2 r^2 \tag{5}$$

Nach Einführung der Werte (3) (4) gehen die Gl. (2) über in

$$x_0 = x - r\frac{\partial r}{\partial s}f = ur\left\{1 - \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right\} - r^2\frac{\partial r\,\partial u}{\partial s^2}$$

das ist nach (5)

$$x_0 = ur^3 q^2 - r^2 \frac{\partial r \partial u}{\partial s^2} \tag{6}$$

woraus:

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 = r^3 q^2 \tag{7}$$

Die Gleichungen der Tangente sind

$$\xi = x_0 + ft; \quad \eta = y_0 + gt; \quad \zeta = z_0 + ht$$

Diese ist einer festen Geraden

$$\xi_0 = \alpha + at; \quad \eta_0 = \beta + bt; \quad \zeta_0 = \gamma + ct \tag{8}$$

unendlich nahe, wenn für jedes t die Differenzen $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, $\zeta - \zeta_0$ unendlich klein sind, was aber immer und nur dann stattfindet, wenn $x_0 - \alpha$, $y_0 - \beta$, $z_0 - \gamma$, $f - a$, $g - b$, $h - c$ unendlich klein sind. Folglich ist jene Gerade (8) Asymptote der Curve s, wenn für $s = \infty$

$$\lim x_0 = \alpha; \quad \lim y_0 = \beta; \quad \lim z_0 = \gamma \tag{9}$$

$$\lim f = a; \quad \lim g = b; \quad \lim h = c \tag{10}$$

ist. Umgekehrt, soll eine Asymptote existiren, so muss entsprechend jedem Punkte der Tangente ($\xi\eta\zeta$), d. i. für jedes t, auf einer festen Geraden (8) ein Punkt

$$\xi_1 = \alpha + a(t + t_1) = (\alpha + at_1) + at; \quad \text{etc.}$$

liegen, der jenem unendlich nahe ist. Es folgt dann wie oben, dass die 6 Grenzwerte (9) (10) existiren müssen, die wir ohne Rücksicht auf die eingeführten Coordinaten des Ausgangspunkts mit α, β, γ etc. bezeichnen können. Demnach ist die Existenz der 6 Grenzwerte ausreichende und notwendige Bedingung der Existenz einer Asymptote.

Wegen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ können nicht a, b, c zugleich 0, also nicht f, g, h sämmtlich unendlich klein sein. Sofern letztere Grenzwerte haben, ist daher mindestens eins von ihnen endlich. Folglich wächst die entsprechende der 3 Grössen

$$x = \int f \partial s, \quad y = \int g \partial s, \quad z = \int h \partial s$$

mit s ins unendliche, mithin ist unter allen Umständen $r = \infty$ für $s = \infty$.

Nun sind u, v, w wegen (3), und x_0, y_0, z_0 nach Voraussetzung, sofern sie Grenzwerte haben, nicht unendlich, folglich ist nach Gl. (7) auch $r^3 q^2$ nicht unendlich. Da aber $r = \infty$, so folgt, dass

$$\lim (r^2 q^2) = \lim \left\{ \left(\frac{r \partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{r \partial v}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{r \partial w}{\partial s}\right)^2 \right\} = 0$$

und da die 3 Terme positiv sind, dass

$$\lim \frac{r\,\partial u}{\partial s} = 0; \quad \lim \frac{r\,\partial v}{\partial s} = 0; \quad \lim \frac{r\,\partial w}{\partial s} = 0$$

ist. Dies auf die Gl. (4) angewandt giebt:

$$a = \lim \frac{u\,\partial r}{\partial s}; \quad b = \lim \frac{v\,\partial r}{\partial s}; \quad c = \lim \frac{w\,\partial r}{\partial s}$$

und nach Bildung der Quadratsumme:

$$\lim \frac{\partial r}{\partial s} = 1 \tag{11}$$

so dass die vorigen Gleichnngen übergehen in

$$a = \lim u; \quad b = \lim v; \quad c = \lim w$$

Setzt man diese Grenzwerte und die hypothetischen (9) in Gl. (7) ein, so wird

$$\lim (r^3 q^2) = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

Letztere Grösse ist der Grenzwert von $fx_0 + gy_0 + hz_0$, daher nach (1) $= 0$. Demnach verschwindet der erste Term in den Ausdrücken (6), und man erhält nach Uebergang zur Grenze:

$$\lim x_0 = -\lim \left(r^2 \frac{\partial r\,\partial u}{\partial s^2} \right); \quad \text{etc.}$$

oder, zufolge (11):

$$\alpha = -\lim \frac{r^2\,\partial u}{\partial r}; \quad \beta = -\lim \frac{r^2\,\partial u}{\partial r}; \quad \gamma = -\lim \frac{r^2\,\partial w}{\partial r}$$

Die Gleichungen der Asymptote lauten jetzt:

$$\frac{\xi + \lim \frac{r^2\,\partial u}{\partial r}}{\lim u} = \frac{\eta + \lim \frac{r^2\,\partial v}{\partial r}}{\lim v} = \frac{\zeta + \lim \frac{r^2\,\partial w}{\partial r}}{\lim w} \tag{12}$$

und die Existenz dieser neuen 6 Grenzwerte ist ausreichende und notwendige Bedingung.

Bemerkung.

Man könnte fragen, warum bei Behandlung von Curven ausser den Asymptoten nicht auch andre finale Raumgebilde untersucht zu werden pflegen. Zunächst geht aus einer leichten Betrachtung hervor, dass es keine finale Gerade oder Ebene geben kann, wo die variirende Gerade oder Ebene mit der Tangente einen endlichen Winkel bilden. Es bleiben daher nur die Schmiegungs- und recti-

ficirende Ebene, überhaupt solche Ebenen, die durch die Tangente gehen, übrig. Hier lässt sich unmittelbar die Gleichung der finalen Ebene aufstellen:

$$\xi \lim l + \eta \lim m + \zeta \lim n = \lim (lx + my + nz)$$
$$\xi \lim f' + \eta \lim g' + \zeta \lim h' = \lim (f'x + g'y + h'z)$$

Da hier r nicht mit s ins unendliche zu wachsen braucht, so ist eine Reduction ähnlich der obigen nicht möglich.

D.

Asymptotische Linien auf Flächen zweiten Grades.

In meiner Flächentheorie §. 54. T. LIX. p. 311. ergaben sich die asymptotischen Linien auf Flächen 2. Grades mittelst des Additionstheorems der elliptischen Functionen. Es wird nicht überflüssig sein, dieselben in einfacherer Weise aufzusuchen.

Die Gleichung des Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{1}$$

lässt sich zerlegen in

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} + 1 &= u\left(\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right) \\ \left(\frac{x}{a} - 1\right)u &= \frac{z}{c} - \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dies sind die Gleichungen einer mit u variirenden Geraden. Dieselbe mag gekreuzt werden von einer Geraden auf der Fläche

$$\frac{y}{b} = \beta\frac{x}{a} + B; \quad \frac{z}{c} = \gamma\frac{x}{a} + C \tag{3}$$

wo β, γ, B, C Functionen eines zweiten Parameters v seien. Führt man die Werte in (2) ein, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}\{1 - u(\beta + \gamma)\} &= u(B + C) - 1 \\ \frac{x}{a}\{u + \beta - \gamma\} &= u - B + C \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und nach Elimination von x:

$$\{1 - u(\beta + \gamma)\}(u - B + C) = (u + \beta - \gamma)\{u(B + C) - 1\}$$

eine Gleichung die unabhängig von u zu erfüllen ist. Die Coefficienten sind:

$$-B+C+\beta-\gamma=0$$
$$2+(\beta+\gamma)(B-C)-(\beta-\gamma)(B+C)=0$$
$$\beta+\gamma+B+C=0$$

woraus durch Verbindung:

$$B=-\gamma;\quad C=-\beta;\quad 1+\beta^2-\gamma^2=0$$

Die letzte Gleichung kann man zerlegen in

$$\beta=\alpha(\gamma+1)=\frac{\gamma-1}{\alpha}$$

woraus:

$$\beta=\frac{2\alpha}{1-\alpha^2};\quad \gamma=\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

Hiermit sind alle Functionen von v auf α reducirt; setzt man

$$\alpha=\frac{1-v}{1+v};\quad v=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

so kommt:

$$\beta=\frac{1-v^2}{2v};\quad \gamma=\frac{1+v^2}{2v}$$

Dies in (4) eingeführt giebt:

$$\frac{x}{a}\left(1-\frac{u}{v}\right)=-1-\frac{u}{v}$$

und in Verbindung mit (3) findet man:

$$\frac{x}{a}=\frac{u+v}{u-v};\quad \frac{y}{b}=\frac{1-uv}{u-v},\quad \frac{z}{c}=\frac{1+uv}{u-v} \tag{5}$$

Durch Erfüllung aller Bedingungen ist die anfängliche Annahme gerechtfertigt, dass zwei einander kreuzende Scharen von Geraden auf der Fläche existiren. Diese Geraden sind als Linien von Nullkrümmung die asymptotischen Linien der Fläche. Sie werden in (5) dargestellt, indem man einzeln v und u constant setzt. Demnach sind die Gl. (5) der Ausdruck des Hyperboloids (1) in asymptotischen Parametern u, v.

Ebenso kann man die Gleichung des Paraboloids

$$\frac{2x}{a}=\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2} \tag{6}$$

zerlegen in

$$2=u\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right);\quad u\frac{x}{a}=\frac{z}{c}-\frac{y}{b}$$

Die kreuzende Gerade sei wieder dargestellt durch (3). Nach Einführung der Werte von y und z findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}u(\beta+\gamma) &= 2-u(B+C) \\ \frac{x}{a}(u+\beta-\gamma) &= C-B \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und nach Elimination von x:

$$u(\beta+\gamma)(C-B) = (u+\beta-\gamma)\{2-u(B+C)\}$$

Die Coefficientenvergleichung giebt:

$$2(\beta-\gamma)=0; \quad (C-B)(\beta+\gamma)+(C+B)(\beta-\gamma)=2; \quad B+C=0$$

woraus:

$$\gamma=\beta; \quad C=-B; \quad 2B\beta=-1$$

Setzt man noch $\beta=\frac{1}{2v}$ und $\frac{1}{u}$ für u, so erhält man:

$$\gamma=\beta=\frac{1}{2v}; \quad B=-C=v$$

und nach Einführung in (7) und dann in (3):

$$\frac{x}{a}=2uv; \quad \frac{y}{b}=u-v; \quad \frac{z}{c}=u+v$$

als Ausdruck des Paraboloids (6) in asymptotischen Parametern u, v.

XXXVI.

Ueber Doppelverhältnisse.

Von

Emil Hain.

I.

Gegeben sind die Punkte:

$$X \equiv x_a, \quad Y \equiv y_a, \quad Z \equiv z_a$$

und die Beziehung:

$$(XYZT) = \frac{XZ}{ZY} : \frac{XT}{TY} = \lambda$$

Es soll der Punkt $T \equiv t_a$ bestimmt werden, wenn man die Coordinaten den Abständen von den Seiten eines Dreiecks ABC proportional annimmt.

Setzen wir:

$$XZ : ZY = m, \quad XT : TY = n$$

dann ist:

$$(z_a) = \frac{(x_a) + m\,(y_a)}{1+m}, \quad (t_a) = \frac{(x_a) + n\,(y_a)}{1+n}$$

wo (x_a) die Seitennormalen sind. Hieraus ergibt sich:

$$\lambda = \frac{(xz)}{(zy)} : \frac{(xt)}{(ty)}$$

wenn

$$(xz) = (x_a) - (z_a).$$

Wir haben dann ferner:

$$\frac{(xt)}{(ty)} = \frac{(xz)}{\lambda(zy)}$$

$$\frac{(xt)}{(ty)+(xt)} = \frac{(xz)}{(xz)+\lambda(zy)}$$

$$(xt) = \frac{(xz)(xy)}{(xz)+\lambda(zy)}$$

$$(t_a) = \frac{\lambda(x_a)(zy)+(y_a)(xz)}{\lambda(zy)+(xz)}$$

Nun ist:

$$(x_a) = 2F.\frac{x_a}{\xi}, \quad \xi = \Sigma a x_a$$

$$(zy) = 2F.\frac{z_a\eta - y_a\zeta}{\zeta\eta}$$

Also:

$$T \equiv \frac{\lambda x_a(z_a\eta - y_a\zeta) + y_a(x_a\zeta - z_a\xi)}{\lambda\xi(z_a\eta - y_a\zeta) + \eta(x_a\zeta - z_a\xi)}$$

II.

$P \equiv p_a$ sei ein Punkt in der Ebene eines Dreiecks ABC. PA treffe BC in P_a. Der Punkt P_a' genüge der Relation:

$$(BCP_aP_a') = \lambda$$

Dann gibt uns die allgemeine Formel:

$$\begin{array}{l} X \equiv B \equiv 0 \quad 1 \quad 0 \\ Y \equiv C \equiv 0 \quad 0 \quad 1 \\ Z \equiv P_a \equiv 0 \quad p_b \quad p_c \\ \xi = b, \quad \eta = c, \quad \zeta = bp_b + cp_c \\ P_a' \equiv 0 \quad \lambda p_b \quad p_c \end{array}$$

Die P_a' bilden dann eine Gerade, wenn:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda p_b & p_c \\ p_a & 0 & \lambda p_c \\ \lambda p_a & p_b & 0 \end{vmatrix} = (\lambda^3 + 1)\,\Pi p_a = 0$$

Ist $\lambda = -1$, so erhalten wir die zu P_a bezüglich BC harmonisch zugeordneten Punkte $\Pi_a \equiv 0 \quad p_b \quad -p_c$, welche in der Geraden $p_b p_c$ liegen.

P_a'' liege auf BC so, dass

$$(CBP_aP_a'') = \lambda$$

d. i.

$$(BCP_aP_a'') = 1:\lambda$$

Der Punkt P_a'' ist der Punkt P_a' nach dem Doppelverhältniss $1:\lambda$. Es ist sonach $P_a'' \equiv 0\ p_b\ \lambda p_c$. Für $\lambda = -1$ fallen P_a und P_a'' zusammen.

Es sei S_a die Mitte von BC, ferner

$$(BCS_aL_1) = \lambda = (CBS_aL_2)$$

Dann ist:

$$L_1 \equiv 0\ \ \lambda c\ \ b,\quad L_2 \equiv 0\ \ c\ \ \lambda b.$$

Die Seitennormalen von L_1, L_2 sind:

$$L_1 \equiv 0\ \ \frac{\lambda F}{b}\ \frac{F}{c} \qquad L_2 \equiv 0\ \ \frac{F}{b}\ \frac{\lambda F}{c}$$

Ihre Mitte ist $S_a \equiv 0\ \ c\ \ b$. Wir haben den Satz:

Construirt man die zur Mitte einer geradlinigen Strecke bezüglich derselben zugehörigen Punkte nach zwei zu einander reciproken Doppelverhältnissen, so halbirt die Mitte der beiden so erhaltenen Punkte die Strecke selbst.

III.

Nehmen wir an, der Kegelschnitt

$$\Sigma g_{aa}x_a^2 + 2\Sigma g_{bb}x_bx_c = 0$$

gehe durch die 6 Punkte:

$$(0\ \ \lambda p_b\ \ p_c),\quad (0\ \ p_b\ \ \lambda p_c)$$

Dann ist:

$$\lambda^2 p_b^2 g_{bb} + p_c^2 . g_{cc} + 2\lambda p_b p_c g_{bc} = 0$$
$$p_b^2 g_{bb} + \lambda^2 p_c^2 g_{cc} + 2\lambda p_b p_c g_{bc} = 0$$

Die Elimination gibt:

$$\frac{g_{bb}}{2g_{bc}} = -\frac{\lambda p_a^2 p_c^2}{(\lambda^2+1)p_a^2 p_b p_c}$$

$$\frac{g_{cc}}{2g_{bc}} = -\frac{\lambda p_a^2 p_b^2}{(\lambda^2+1)p_a^2 p_b p_c}$$

Die Gleichung des Kegelschnittes ist also:

$$\lambda\Sigma p_b^2 p_c^2 x_a^2 - (\lambda^2+1)p_a p_b p_c \Sigma p_a x_b x_c = 0$$

wie sich durch Einsetzung der Coordinatenwerte der übrigen vier Punkte $P_b'P_b''$ $P_c'P_c''$ bestätigt. Setzen wir

$$\Sigma p_b^2 p_c^2 x_a^2 = A, \quad p_a p_b p_c \Sigma p_a x_b x_c = B$$

so können wir die Kegelschnittgleichnng noch schreiben:

$$\lambda(A - \lambda B) = B$$

Differentiiren wir nach λ, so erhalten wir:

$$A - \lambda B = \lambda B, \quad \lambda^2 B = B, \quad \lambda = \pm 1$$

Die Gleichung der Einhüllenden aller Kegelschnitte λ ist:

$$A \pm 2B = 0$$

Die einhüllende Curve ist also das System der Linien:

$$A + 2B = 0 = A - 2B$$

Die $A + 2B$ ist die Gerade $p_b p_c$, die Harmonikale des Punktes p_a. Die $A - 2B$ ist ein Kegelschnitt, welcher die Seiten BC in den Punkten P_a berührt.

IV.

Setzen wir

$$(BC P_a P_a') = \alpha = (CB P_a P_a'')$$
$$(CA P_b P_b') = \beta = (AC P_b P_b'')$$
$$(AB P_c P_c') = \gamma = (BA P_c P_c'')$$

so liegen die P_a' oder P_a'' in einer Geraden, wenn:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & \beta \\ \gamma & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ \beta & 0 & 1 \\ 1 & \gamma & 0 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma + 1 = 0$$

Setzen wir z. B. $-\alpha = b : c$, so wird $P_a' = 0 \quad bp_b \quad -cp_c$. P_a' ist dem Punkte $Q_a (Q \equiv ap_a)$ bezüglich BC harmonisch zugeordnet. $Q \equiv ap_a$ wird demnach auf folgende Weise construirt:

Man bestimmt auf der Geraden $AP (P \equiv p_a)$ einen für AP_a inneren Punkt A_b und äusseren A_c, so dass $P_a A_b = b$, $P_a A_c = c$. Die Geraden BA_b, CA_c schneiden sich in A_a. Die Parallele durch A_a zu AP trifft BC in P_a'. Q_a trennt BC von P_a' harmonisch. Dio AQ_a treffen sich in $Q \equiv ap_a$.

Setzen wir $-\alpha = c : b$, so erhalten wir:

$$P_a'' \equiv 0 \quad cp_b \quad -bp_c \equiv 0 \quad acp_b \quad -abp_c$$

Die P_a'' liegen dann in der Geraden $ap_b p_c$, der Harmonikalen des Punktes bcp. Für $-\alpha = q_b : q_c$ ist $P_a A_b = q_b$, $P_a A_c = q_c$ zu setzen;

die P_a' liegen in der Harmonikalen des Punktes $p_a q_a$. Hiermit ist die Construction des Punktes $p_a q_a r_a$ gegeben, wenn $P \equiv p_a$, $Q \equiv q_a$, $R \equiv r_a$, und zwar auf mehrfache Weise. Mittelst Wiederholung derselben Zeichnung gelangt man auch zur Construction des Punktes $p_a{}^n$, wenn n eine ganze Zal bedeutet.

V.

PA treffe BC in P_a. Beiderseits dieses Punktes werden auf PA zwei solche Punkte $A_b A_c$ bestimmt, dass $P_a A_b = b'$, $P_a A_c = c'$, wo A_b ein innerer Punkt von AP_a und a' symmetrisch nach b, c sei. Schreiben wir ferner a_1 statt AP_a, so gibt die Figur:

$$A_b \equiv \quad b'(bp_c + cp_c) \quad ap_b(a_1 - b') \quad ap_c(a_1 - b')$$
$$A_c \equiv -c'(bp_b + cp_c) \quad ap_b(a_1 + c') \quad ap_c(a_1 + c')$$

Verbinden wir nun A_b mit B, A_c mit C, so erhalten wir:

$$BA_b \equiv -ap_c(a_1 - b') \qquad 0 \qquad b'(bp_b + cp_c)$$
$$CA_c \equiv \quad ap_b(a_1 + c') \qquad c'(bp_b + cp_c) \qquad 0$$

Diese beiden Geraden treffen sich in

$$A_r \equiv b'c'(bp_b + cp_c) \quad -ab'p_b(a_1 + c') \quad +ac'p_c(a_1 - b')$$

Der unendlich entfernte Punkt von AP hat die Form:

$$bp + cp_c \quad -ap_b \quad -ap_c$$

Verbinden wir diesen mit A_a, so erhalten wir die Gerade:

$$ap_b p_c(b' + c') \quad c'p_c(bp_b + cp_c) \quad b'p_b(bp_b + cp_c)$$

Diese trifft die BC im Punkte $0 \; b'p_b \; -c'p_c$. Denselben trennt von BC harmonisch der Punkt $R_a \equiv 0 \; b'p_b \; c'p_c$. Die AR_a schneiden sich im Punkte $a'p_a$. Derselbe wird also auf folgende Weise construirt:

PA trifft BC in P_a. A_b sei ein innerer, A_c ein äusserer Punkt von AP_a. Es sei $P_a A_b = b'$, $P_a A_c = c'$. Die BA_b, CA_c schneiden sich in A_a. Die Parallelen durch A_a zu PA treffen die BC in Punkten einer Geraden, deren harmonischer Pol in Bezug auf das Urdreieck der Punkt $R \equiv a'p_a$ ist.

VI.

Sind $X \equiv \varphi a + b + c$, $Y \equiv \psi a + b + c$ Symmetriepunkte erster Ordnung, so ist auch der Punkt T von der Form $\chi a + b + c$, wenn

$$\frac{XJ}{JY}:\frac{XT}{TY}=\lambda$$

wo J das Inkreiscentrum des Urdreiecks bezeichnet.

Die Formel in I. gibt:

$$\xi=\varphi\Sigma a^2+2\Sigma bc,\quad \eta=\psi\Sigma a^2+2\Sigma bc,\quad \zeta=\Sigma a$$
$$z_a\eta-y_a\zeta=(b^2+c^2-ab-ac)(\psi-1)$$
$$x_a\zeta-z_a\xi=-(b^2+c^2-ab-ac)(\varphi-1)$$
$$T\equiv\lambda(\psi-1)(\varphi a+b+c)-(\varphi-1)(\psi a+b+c)$$

Sonach ist T von der Form $\chi a+b+c$, wo

$$\chi=\frac{\lambda\varphi(\psi-1)-\psi(\varphi-1)}{\lambda(\psi-1)-(\varphi-1)}$$

Für $\lambda=-1$ wird:

$$\chi=\frac{2\varphi\psi-\varphi-\psi}{\varphi+\psi-2}$$

Ist ferner $\varphi\psi=1$, so wird $\chi=-1$ d. h.:

Auf der Geraden $b-c$ bilden die Punkte $\varphi a+b+c$, $a+\varphi(b+c)$ eine **Involution**, deren Doppelpunkte das Inkreiscentrum und der Punkt $b+c-a$ sind.

Ausserdem ergibt sich z. B.

$$\lambda=\varphi:\psi,\quad \chi=\varphi+\psi-\varphi\psi$$
$$\lambda=(\varphi^2-1):(\psi^2-1),\quad \chi=1+\varphi+\psi$$
$$\lambda=(\varphi-1):(\psi-1),\quad T\equiv a$$

Wien, Februar 1877.

XXXVII.

Zur Tangirung der Kegelschnitte.

Nach einem Entwurfe des Herrn Oberlehrer Dr. Ad. Hochheim in Magdeburg.

Vom

Ingenieur-Major **von Wasserschleben.**

Aufgabe: An einen Kegelschnitt seien von einem Punkte ausserhalb Tangenten gezogen. Gesucht wird die Gleichung des geometrischen Orts der Berührungspunkte für gegebene Variationen des Kegelschnitts.

Die Achsenrichtungen seien unveränderlich, desgleichen der Scheitel der Parabel und der Mittelpunkt der Ellipse und Hyperbel. Bei der Parabel variirt also nur der Parameter, bei der Ellipse und Hyperbel können beide Achsen variiren; wir betrachten folgende 5 Fälle für die Ellipse: a) wo die kleine Achse, b) wo die grosse Achse, c) wo ihre Differenz, d) wo die Differenz ihrer Quadrate, e) wo ihr Quotient constant ist, nebst den entsprechenden Fällen für die Hyperbel.

Die Gleichung der Tangente ist stets

$$(x-l)\frac{\partial y}{\partial x} = y - m$$

Hier sind l, m die Coordinaten eines beliebigen Punkts auf der Tangente; sie seien daher die des festen Punkts 0. Die Gleichung des geometrischen Orts der Berührungspunkte resultirt dann aus der Elimination der einzig variirenden Grösse zwischen der Curven- und Tangentengleichung.

I. Die Parabel.

Für die Parabel sind beide Gleichungen:

$$y^2 = px; \quad (x-m)\frac{p}{2y} = y - l$$

woraus nach Elimination von p:

$$xy + my - 2lx = 0$$

Der gesuchte Ort ist also im allgemeinen eine gleichseitige Hyperbel. Liegt aber 0 auf der x Achse, so geht er in die Gerade $x + m = 0$ parallel der Scheiteltangente, liegt er auf der y Achse, in die Gerade $y = 2l$ parallel der Achse über.

II. Die Ellipse und Hyperbel.

Die Gleichungen der Ellipse und ihrer Tangente sind:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2; \quad mb^2x + la^2y = a^2b^2 \tag{I}$$

a) Sei b constant; eliminirt man a, so kommt:

$$my^2 - lxy = (m-x)b^2 \tag{II}$$

Der gesuchte Ort ist also im allgemeinen eine Hyperbel. Einige Eigenschaften derselben mögen Erwähnung finden. Durch $x = 0$, $y = \pm b$ wird ihre Gleichung erfüllt; daher geht sie durch die Endpunkte der kleinen Axe. Ihre Asymptoten haben der linken Seite zufolge die Gleichungen

$$y - y_0 = 0; \quad m(y - y_0) - l(x - x_0) = 0$$

wo x_0, y_0 die Coordinaten ihres Mittelpunkts bezeichnen. Demnach ist die eine Asymptote parallel der x Achse. Ferner hat sie ein Maximum und ein Minimum der x. Da nämlich

$$\frac{\partial x}{\partial y} = m\frac{l(b^2+y^2) - 2b^2y}{(b^2 - ly)^2}$$

ist, so entsprechen die fraglichen Werte dem Zähler $= 0$ gesetzt; die Wurzeln sind:

$$y = b\frac{b \pm \sqrt{b^2 - l^2}}{l}$$

Ist ferner $l = b$, so lässt sich die Gl. (II) schreiben

$$(y-b)\{m(y+b) - bx\} = 0$$

Der Wert $y = b$ entspricht nur einem Punkte. Der zweite Berührungspunkt beschreibt eine gerade Linie.

Ist $b > l$, so wird von der Hyperbel nur je ein isolirtes Stück der beiden Aeste in Anspruch genommen, und zwar soweit die Achsen innerhalb der Parallelen mit der x Achse fallen, welche man sich von den Scheitelpunkten der kleinen Achse gezogen denken kann.

Für $l = 0$ wird der gesuchte Ort eine Parabel, für $m = 0$ die Gerade $y = \frac{b^2}{l}$

b) Variirt die Ellipse bei constantem a, so sind alle Resultate analog. Wir brauchen nur a, x, m zu vertauschen mit b, y, l; dann wird der gesuchte Ort

$$lx^2 - mxy = (l-y)a^2$$

Um die Resultate auf die Hyperbel anzuwenden, hat man nur $-b^2$ für b^2 substituiren. Hierbei bleibt die letzte Gleichung ungeändert, der in Rede stehende Ort ist also für Ellipse und Hyperbel derselbe.

c) Ist die Differenz der Achsen constant, so gehen wir von den Gl. (I) aus und eliminiren zuerst b^2, dann a^2; beziehungsweise kommt:

$$a^2 = x\frac{my - lx}{y - l}; \quad b^2 = -y\frac{my - lx}{x - m}$$

Ist nun die constante Differenz

$$a - b = c$$

so giebt die letzte Gleichung:

$$c^2 - 2ac + a^2 = -y\frac{my - lx}{x - m}$$

woraus nach Einsetzung des Wertes von a^2:

$$c^2 + x\frac{my - lx}{y - l} + y\frac{my - lx}{x - m} = 2ac$$

Dies in 2. Potenz:

$$\left(c^2 + x\frac{my - lx}{y - l} + y\frac{my - lx}{x - m}\right)^2 = 4c^2x\frac{my - lx}{y - l}$$

Das Resultat lässt sich leicht symmetrisch umgestalten:

$$\{c^2(x-m)(y-l) + [y(y-l) - x(x-m)](my - lx)\}^2 = \\ -4xy(x-m)(y-l)(my - lx)^2$$

Der gesuchte Ort ist demnach eine Curve 6. Grades.

Die Anwendung auf die Hyperbel ist leicht, weil b nur im Quadrat vorkommt.

d) Ist die Differenz der Quadrate der Achsen constant, also das System von Kegelschnitten confocal; dann sei für die Ellipse

$$a^2 - b^2 = e^2$$

Die Gl. (I) ergeben die Werte:

$$a^2 = \frac{e^2 x(x-m)}{x(x-m)+y(y-l)}; \quad b^2 = -\frac{e^2 y(y-l)}{x(x-m)+y(y-l)}$$

Führt man sie in eine derselben ein, so kommt:

$$(my - lx)\{x(x-m)+y(y-l)\} = e^2(x-m)(y-l)$$

Der gesuchte Ort ist demnach im allgemeinen eine Curve 3. Grades. Für $l = 0$ erhält man:

$$x(x-m) + y^2 = e^2 \frac{x-m}{m}$$

Hier wird die Curve ein Kreis. Ebenso ergiebt der Fall $m = 0$ einen Kreis

$$x^2 + y(y-l) = -e^2 \frac{y-l}{l}$$

Mittelpunkte und Radien beider Kreise geben sich zu erkennen, wenn man die Gleichungen schreibt:

$$\left(x - \frac{m^2+e^2}{2m}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{m^2-e^2}{2m}\right)^2$$

$$x^2 + \left(y^2 + \frac{e^2-l^2}{2l}\right)^2 = \left(\frac{e^2+l^2}{2l}\right)^2$$

Für die Hyperbel sind die Resultate dieselben, nur ist hier die Summe der Quadrate der Halbachsen (statt der Differenz) constant $= e^2$ anzunehmen.

e) Das Verhältniss beider Achsen sei constant, mithin die zum System gehörigen Kegelschnitte einander ähnlich. Setzt man $b = ta$, so werden die Gl. (I) für Ellipse:

$$b^2 = t^2x^2 + y^2; \quad b^2 = t^2mx + ly$$

woraus:

$$t^2x^2 + y^2 = t^2mx + ly$$

oder:

$$t^2\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2 = \frac{t^2m^2 + l^2}{4}$$

Der gesuchte Ort ist also eine dem System ähnliche Ellipse, deren

Mittelpunkt den Radiusvector des festen Punkts halbirt, und deren Halbachsen gleich

$$\frac{\sqrt{t^2m^2+l}}{2t}, \qquad \frac{\sqrt{t^2m^2+l}}{2}$$

sind.

Bei der Hyperbel tritt eine wesentliche Aenderung ein, die sich jedoch, wie leicht zu sehen, auf einen blossen Vorzeichenwechsel von t^2 reducirt. Der gesuchte Ort ist demnach eine ähnliche Hyperbel, die für $l = \pm tm$ in 2 Gerade übergeht, und für $l^2 >$ und $< t^2m$ beziehungsweise eine Hauptachse in der Richtung der Haupt- und Nebenachse der Hyperbeln des Systems hat.

XXXVIII.

Ein Beitrag zur Theorie des Maximum und Minimum.

Von

Herrn **Josef Gruber,**
Lehrer an der k. k. Oberrealschule zu Laibach in Krain.

§. 1.

Die Bestimmung des Maximum und Minimum von Functionen geschieht im allgemeinen mit Hilfe der Taylor'schen Reihe. Diese Bestimmung ist nun nur so lange möglich, als alle Differentialquotienten, welche in derselben vorkommen, endlich bleiben. Es können auch Fälle eintreten, in welchen für gewisse Werte der Veränderlichen diese Reihe nicht mehr brauchbar ist, weil die früheren oder späteren Differentialquotienten für diese Werte Null im Nenner bekommen, sie selbst also unendlich gross werden.

Es kann sein, dass für diese speciellen Werte der Veränderlichen die Function selbst unendlich gross wird. Z. B. in

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)\log(x-a) \text{ wird für } x = a \;\; f(a) = -\infty,$$

wenn man $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x = a$ endlich und von 0 verschieden voraussetzt.

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{(x-a)^m} \text{ geht für } x = a \text{ über in } f(a) = \infty,$$

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{e^x - e^{-x}} \text{ verwandelt sich für } x = 0 \text{ in } f(0) = \infty.$$

Ebenso wird

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{1 + \cos \pi x} \text{ für } x = 1 \text{ unendlich gross,}$$

wobei in allen Fällen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für diese Werte von x endlich

und von Null verschieden vorausgesetzt werden. Diese Fälle wollen wir nicht weiter untersuchen. Nur jene Functionen sollen Gegenstand unserer Betrachtung sein, welche für bestimmte Werte von x endlich bleiben, deren Differentialquotienten aber unendlich gross werden.

Solche Fälle treten ein, wenn man die Werte, welche die Function zu einem Maximum oder Minimum machen sollen, aus der Gleichung $\frac{df(x)}{dx} = \infty$ zieht, indem der Nenner in $\frac{df(x)}{dx}$ Null wird. Dieser Nenner erscheint dann auch in den höheren Differentialquotienten, welche für diese bestimmten Werte dann ebenfalls gleich ∞ werden, und es lässt sich dann nach den gewöhnlichen Methoden keine Entscheidung für das Vorhandensein eines Maximum oder Minimum fällen.

Aus diesen Fällen können wir wieder einen ausscheiden, nämlich den, wenn die Function die Form

$$y = f(x) = \psi(x)\sqrt[m]{(ax-b)^n}$$

hat. $\psi(x)$ sei für $x = \frac{b}{a}$ stetig, endlich und von Null verschieden. In diesem Falle braucht man nur zu bedenken, dass, wenn y ein Maximum oder Minimum ist, auch y^m ein Maximum oder Minimum ist, vorausgesetzt, dass m positiv ist. Wir können daher unsere Function für die Untersuchung folgendermassen umformen:

$$y^m = (\psi(x))^m (ax-b)^m$$

und auf die gewöhnliche Weise behandeln.

Beispiel.

$$y = e^{-x}\sqrt[3]{(ax-b)^2}$$

$$y' = y^3 = e^{-3x}(ax-b)^2$$

$$\frac{dy'}{dx} = e^{-3x}(ax-b)\{2a-3(ax-b)\}.$$

Dieser Ausdruck wird für $x = \frac{b}{a}$ Null. Es ist

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = e^{-3x}\{2a^2-2a(ax-b)+9(ax-b)^2-6a(ax-b)\}$$

Für $x = \frac{b}{a}$ wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a^2e^{-3\frac{b}{a}}$. Dieser Ausdruck ist immer positiv, also ist für $x = \frac{b}{a}$ immer ein Minimum vorhanden.

Die so genannten Ausnahmsfälle der Taylor'schen Reihe lassen

sich in vier Gruppen zusammenfassen, in Functionen, in welchen Wurzelgrössen vorkommen

1) $$y = \varphi(x) + \psi(x) \sqrt[m]{(ax^r - b)^n}$$

in Functionen, in welchen Logarithmen vorkommen und unter dem Logarithmenzeichen eine Wurzel

2) $$y = \varphi(x) + \psi(x) \log \{a \pm \sqrt[m]{(bx^r - c)^n}\}$$

in Functionen, in welchen die cyklometrischen Functionen arc sin, arc cos, arc sec, arc cosec, arc sinvers und arc cosvers enthalten sind.

3) $$y = \varphi(x) + \psi(x) \operatorname{arc}(\sin = (ax^r - b)^s)$$

wo s auch ein Bruch sein kann; endlich in Functionen, in welchen diese drei Fälle combinirt vorkommen.

4) $$y = \varphi(x) + \psi(x) \operatorname{arc}(\sin = \sqrt[m]{(ax^r + b)^n}) + \sqrt[m]{(ax - b)^n}$$

oder etwa

$$y = \varphi(x) + \psi_1(x) \log \{C + \sqrt[m]{(ax - b)^n}\} \operatorname{arc} \{\cos = \sqrt[m]{(ax + b)^n}\}$$
$$+ \psi_2(x) \operatorname{arc} \{\sec = \sqrt[m]{(ax + b)^n}\}$$

u. s. w.

Dabei sind $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ endlich und stetig und die Functionen ψ auch noch von Null verschieden.

Algebraische Functionen.

§. 2.

Es ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen

$$y = f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \sqrt[m]{(ax^r - b)^n}$$

zu einem Maximum oder Minimum wird.

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) + \psi'(x) \sqrt[m]{(ax^r - b)^n} + \frac{n}{m} rax^{r-1} (ax^r - b)^{\frac{n}{m} - 1}$$

Wenn $\frac{n}{m} < 1$ ist, so wird $\frac{dy}{dx} = \infty$ für $ax^r - b = 0$ oder

$$x = \sqrt[r]{\frac{b}{a}}$$

und ebenso die höheren Differentialquotienten, wenn wir voraussetzen, dass $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für diesen Wert von x endlich und stetig und $\psi(x)$ ausserdem noch von Null verschieden sei, damit wir die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ nicht in Betracht zu ziehen haben. Setzen wir in unserer Function $x = \sqrt[r]{\frac{b}{a}} = \alpha$, so kann man auf dem gewöhnlichen Wege nicht mehr entscheiden, ob $f(x)$ für $x = \alpha$ ein Maximum oder Minimum wird. Wir verfahren daher auf folgende Weise: wir setzen in die ursprüngliche Function statt x die Grösse $\alpha + h$, wo h eine sehr kleine Aenderung ist, und erhalten:

$$f(\alpha+h) = \varphi(\alpha+h) + \psi(\alpha+h)\sqrt[m]{\{a(\alpha+h)^r - b\}^n}.$$

$\varphi(\alpha+h)$ und $\psi(\alpha+h)$ lassen sich zufolge unserer Voraussetzung nach dem Taylor'schen Satze in Reihen nach Potenzen von h entwickeln, so dass wir folgendes bekommen:

$$f(\alpha+h) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)h + \varphi''(\alpha)\frac{h^2}{2!} + \dots$$

$$+ [\psi(\alpha) + \psi'(\alpha)h + \dots]\sqrt[m]{\{a(\alpha+h)^r - b\}^n}$$

Nun ist

$$a(\alpha+h)^r - b = a\alpha^r + ra\alpha^{r-1}h + \binom{r}{2}a\alpha^{r-2}h^2 + \dots - b$$

Es ist

$$a\alpha^r - b = 0$$

daher

$$a(\alpha+h)^r - b = ra\alpha^{r-1}h + \binom{r}{2}a\alpha^{r-2}h^2 + \dots$$

h kann aber so klein gewählt werden, dass

$$ra\alpha^{r-1}h > \binom{r}{2}a\alpha^{r-2}h^2 + \binom{r}{3}a\alpha^{r-3}h^3 + \dots \qquad \text{(I)}$$

daher

$$a(\alpha+h)^r - b = ra\alpha^{r-1}h$$

Für $x = \alpha$ ist ferner $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$.

Berücksichtigen wir dies alles, so ist:

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = \varphi'(\alpha) + \varphi''(\alpha)\frac{h^2}{2!} + \dots + [\psi(\alpha) + \psi'(\alpha)h + \dots]\sqrt[m]{(ra\alpha^{r-1}h)^n}$$

h kann so klein gewählt werden, dass auch noch folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\psi(\alpha) > \psi'(\alpha)h + \psi''(\alpha)\frac{h^2}{2!} + \dots \qquad \text{(II)}$$

Wir erhalten dann:

$$f(a+h)-f(a) = \psi(a)\sqrt[m]{(raa^{r-1}h)^n}+\varphi'(a)h+\varphi''(a)\frac{h^2}{2!}+\ldots$$

Wenn diese Differenz $f(a+h)-f(a)$ constant negativ ist, so ist ein Maximum vorhanden, wenn sie aber constant positiv ist, ein Minimum.

Ist $m > n$, so kann h so klein gewählt werden, dass schon das erste Glied $\psi(a)\sqrt[m]{(raa^{r-1}h)^n}$ den Ausschlag gibt. Ist aber $m < n$, so muss $\varphi'(a)h$ noch berücksichtigt werden.

Ist aber $\varphi(x)$ constant, so fallen $\varphi'(a)$ und alle übrigen Glieder weg.

In diesem Falle und für $m > n$ erhalten wir dann:

$$f(a+h)-f(a) = \psi(a)\sqrt[m]{(raa^{r-1}h)^n}$$

Wir können folgende Fälle unterscheiden:

1) Ist m ungerade, n gerade, so ist $\sqrt[m]{(raa^{r-1}h)^n}$ immer positiv. Ist dann $\psi(a)$ negativ, so ist ein Maximum vorhanden, ist $\psi(a)$ positiv, so ist $f(a)$ ein Minimum.

2) Ist m ungerade und ebenso n, so kann die Wurzelgrösse durch die Wahl von h sowohl positiv als auch negativ gemacht werden; es kann daher $\psi(a)\sqrt[m]{(raa^{r-1}h)^n}$ sowohl positiv als auch negativ gemacht werden, daher ist $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

3) Ist m gerade, n ungerade, so muss h mit jenem Zeichen gewählt werden, welches die Grösse unter dem Wurzelzeichen positiv macht, weil wir nur reelle Werte brauchen können.

Die Wurzelgrösse hat dann zwei Zeichen. Nun kann die Natur der Aufgabe in einem gegebenen Falle entscheiden, ob die Wurzelgrösse nur positiv oder nur negativ genommen werden darf, und es ergiebt sich dann für $\psi(a)\sqrt[m]{(raa^{r-1}h)^n}$ ein bestimmtes Zeichen, welches entweder ein Maximum oder ein Minimum anzeigt.

Lässt sich über das Zeichen der Wurzelgrösse keine bestimmte Entscheidung treffen, so kann man folgendes sagen: Legt man der Wurzelgrösse ein solches Zeichen bei, dass $\psi(a)\sqrt[m]{(raa^{r-1}h)^n}$ positiv wird, so ist $f(a)$ von $x = a$ an im Wachsen begriffen, also $f(a)$ ein Minimum, wobei bemerkt werden muss, dass bei negativen Grössen jene die kleinere ist, deren absoluter Wert weiter von Null entfernt ist.

Legt man aber der Wurzelgrösse ein Zeichen bei, dass dadurch $\psi(\alpha)\sqrt[m]{(ra\alpha^{r-1}h)^n}$ negativ wird, so nimmt $f(\alpha)$ von $x=\alpha$ an ab, und $f(\alpha)$ selbst ist ein Maximum.

4) Sind m und n gerade, dann ist die Wurzelgrösse immer reell, aber mit zwei Zeichen behaftet. Es wird dann für das eine Zeichen ein Maximum, für das andere ein Minimum vorhanden sein, weil $\psi(\alpha)\sqrt[m]{(ra\alpha^{r-1}h)^n}$ für das eine Zeichen, mag h positiv oder negativ sein, constant positiv, für das andere aber constant negativ ist.

Beispiele: Es sei $y=f(x)=c+bx\sqrt[5]{(a-4x)^2}$, dabei ist

$$\varphi(x)=c \text{ und } \psi(x)=bx$$

Für $x=\frac{a}{4}$ wird $\frac{d^2y}{dx^2}=\infty$. Wir haben zur Entscheidung, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden ist, folgende Formel:

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=\psi(\alpha)\sqrt[m]{(ra\alpha^{r-1}h)^n}$$

worin $r=1$, $a=-4$, $m=5$ und $n=2$ zu setzen ist, so dass

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=\frac{ab}{4}\sqrt[5]{(-4h)^2}$$

Nun ist $\sqrt[5]{(-4h)^2}$ immer positiv. Es ist daher $f\left(\frac{a}{4}\right)=c$ ein Maximum, wenn ab negativ, ein Minimum, wenn ab positiv ist.

Es sei $y=2x\pm\sqrt{(x-a)^3}$. Für $x=a$ wird $y=2a$ und $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^3y}{dx^3}=\ldots=\infty$. Es ist

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=\psi(\alpha)\sqrt[m]{(ah)^n}+\varphi'(\alpha)h+\ldots \text{ oder}$$

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=\sqrt[m]{h^n}\{\psi(\alpha)\sqrt[m]{a^n}+\varphi'(\alpha)h^{\frac{m-n}{m}}+\ldots\}$$

$$\varphi'(\alpha)=2,\quad \varphi''(\alpha)=\varphi'''(\alpha)=\ldots=0.$$

Daher ist:

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=\pm\sqrt{h^3}\{1+2h^{-\frac{1}{2}}\}$$

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=\pm\sqrt{h^3}\left\{1+\frac{2}{\sqrt{h}}\right\}$$

Für ein negatives h wird $\sqrt{h^3}$ imaginär, die Curve erstreckt sich also nur bis zum Punkte $x=a$, $y=2a$. Es ist in diesem Falle immer ein Minimum vorhanden, denn nimmt man das obere Zeichen, so ist

$$f(a+h)-f(a) = +\sqrt{h^3}\left\{1+\frac{2}{\sqrt{h}}\right\}$$

also immer positiv. Nimmt man das untere Zeichen, so ist

$$f(a+h)-f(a) = -\sqrt{h^3}\left\{1-\frac{2}{\sqrt{h}}\right\}$$

h kann so klein gewählt werden, dass $\frac{2}{\sqrt{h}} > 1$ wird, also $-\sqrt{h^3}\left\{1-\frac{2}{\sqrt{h}}\right\}$ unter allen Umständen positiv wird.

Es sei $f(x) = \frac{1}{x^{10}} + 3\sqrt{x-\frac{1}{100}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^{10}}$, $\psi(x) = 3$.

Wir erhalten $\psi'(a) = \psi''(a) = \ldots = 0$ und $\varphi'(x) = -\frac{10}{x^{11}}$. Es ist

$$f(a+h)-f(a) = \sqrt{h}\,\{3-10.100^{11}\sqrt{h}\}$$

Es ist hier für ein sehr kleines h $3 < 10.100^{11}hi$, daher $f(a+h)-f(a)$ negativ, für ein verschwindendes h aber positiv, also $f(a)$ ein Minimum.

Functionen, in welchen Logarithmen vorkommen.

§. 3.

$$y = f(x) = \varphi(x) + \varphi(x)\log\{a \pm \sqrt[m]{(bx^r-c)^n}\}$$

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) + \psi'(x)\log\{a \pm \sqrt[m]{(bx^r-c)^n}\} \pm \frac{\frac{n}{m} rbx^{r-1}\psi(x)(bx^r-c)^{\frac{n}{m}-1}}{a \pm \sqrt[m]{(bx^r-c)^n}}$$

Ist $\frac{n}{m} < 1$, so wird für $x = \sqrt[r]{\frac{c}{b}} = \alpha$ $\frac{dy}{dx} = \infty$.

Wenn aber $\frac{n}{m} > 1$ ist, so wird erst ein späterer Differentialquotient unendlich gross.

Wir setzen jetzt wieder in die ursprüngliche Function statt x die Grösse $a+h$ und erhalten:

$$f(a+h) = \varphi(a+h) + \psi(a+h)\log\{a \pm \sqrt[m]{[b(a+h)^r-c]^n}\}$$

$f(a+h) = \varphi(a) + \varphi'(a)h + \ldots + [\varphi(a) + \psi'(a)h + \ldots]\log\{a$

$$b(\alpha+h)^r - c = b\alpha^r + rb\alpha^{r-1}h + \binom{r}{2} b\alpha^{r-2}h^2 + \ldots - c$$

$$b\alpha^r - c = 0$$

Wir wählen h so, dass $rb\alpha^{r-1}h > \binom{r}{2} b\alpha^{r-2}h^2 + \ldots -$, dann können wir

$$b(\alpha+h)^r - c = rb\alpha^{r-1}h$$

setzen. Ferner kann man h auch noch der Bedingung unterwerfen, dass $\psi(\alpha) > \psi'(\alpha)h + \psi''(\alpha)\frac{h^2}{2!} + \ldots$ Dann wird

$$f(\alpha+h) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)h + \ldots + \psi(\alpha)\log\{a \pm \sqrt[m]{(rb\alpha^{r-1}h)^n}\}$$

Für $x = \alpha$ wird $f(\alpha) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)\log a$; daher

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha) - \psi(\alpha)\log a$$

und es ist

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = \psi(\alpha)[\log\{a \pm \sqrt[m]{(rb\alpha^{r-1}h)^n}\} - \log a] + \varphi'(\alpha)h + \varphi''(\alpha)\frac{h^2}{2!} + \ldots$$

$$= \psi(\alpha)\log\{1 \pm \frac{1}{a}\sqrt[m]{(rb\alpha^{r-1}h)^n}\} + \varphi'(\alpha)h + \ldots$$

$$\log\{1 \pm \frac{1}{a}\sqrt[m]{(rb\alpha^{r-1}h)^n}\} = \pm \frac{1}{a}\sqrt[m]{(rb\alpha^{r-1}h)^n} - \frac{1}{2a^2}\{\sqrt[m]{(rb\alpha^{r-1}h)^n}\}^2 \pm \ldots$$

Wir unterwerfen jetzt h einer dritten Bedingung, dass nämlich:

$$\pm \frac{1}{a}\sqrt[m]{(rb\alpha^{r-1}h)^n} > -\frac{1}{2a^2}\{\sqrt[m]{(rb\alpha^{r-1}h)^n}\}^2 \pm \ldots$$

Dann können wir

$$\log\{1 \pm \sqrt[m]{(rb\alpha^{r-1}h)^n}\} = \pm \frac{1}{a}\sqrt[m]{(rb\alpha^{r-1}h)^n}$$

setzen, und wir erhalten:

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = \pm \frac{\psi(\alpha)}{a}\sqrt[m]{(rb\alpha^{r-1}h)^n} + \varphi'(\alpha)h + \varphi''(\alpha)\frac{h^2}{2!} + \ldots \text{*)}$$

Ist $m > n$ oder $\varphi(x) =$ constans, so gibt das erste Glied den Ausschlag für ein verschwindendes h. Ist aber $n > m$, so müssen die auf das erste folgenden Glieder berücksichtigt werden. Ist nun $f(\alpha+h) - f(\alpha)$ fortwährend negativ, so ist ein Maximum vorhanden, ist aber $f(\alpha+h) - f(\alpha)$ fortwährend positiv, ein Minimum.

*) Dabei ist das obere Zeichen zu wählen, wenn die Function $\log(1 + A)$ enthält; das untere aber, wenn sie $\log(1 - A)$ enthält.

Beispiele:

$$y = f(x) = 2x + 3\log\{1 + \sqrt[3]{(x-2)^2}\}$$

$$\frac{dy}{dy} = 2 + 3\frac{\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}}{1+\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \frac{2\{1+\sqrt[3]{(x-2)^2}\}\sqrt[3]{x-2}+2}{\sqrt[3]{x-2}\{1+\sqrt[3]{(x-2)^2}\}}$$

Für $x = 2$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$. In diesem Beispiele ist $\varphi(x) = 2x$, $\psi(x) = 3$, $a = 1$, $m = 3$, $n = 2$, $r = 1$ und $b = 1$.

Um zu entscheiden, ob $f(2)$ ein Maximum oder Minimum ist, stellen wir uns folgende Beziehung auf:

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = 3\sqrt[3]{h^2} + 2h = \sqrt[3]{h^2}\{3 + 2\sqrt[3]{h}\}$$

h kann so klein gewählt werden, dass $3 > 2\sqrt[3]{h}$ wird; ferner ist $\sqrt[3]{h^2}$ immer positiv, also die Differenz $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ constant positiv, somit $f(x)$ für $x = 2$ ein Minimum.

Es sei $y = f(x) = \sin x + \log\{2 + \sqrt[5]{(x-\pi)^3}\}$.

Für $x = \pi$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$ und ebenso $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$. Es ist $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = 1$ etc.

Wir erhalten für das Kennzeichen, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden ist, folgendes:

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = \tfrac{1}{2}\sqrt[5]{h^3} + \cos\pi . h - \frac{\sin\pi}{2!}h^2 + \dots$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt[5]{h^3} - h + \frac{h^3}{3!}$$

h kann so klein gewählt werden, dass $\frac{1}{2}\sqrt[5]{h^3}$ den Ausschlag gibt, denn es ist, wenn $h < 1$ ist,

$$h^3 > h^5 \quad \text{und} \quad \sqrt[5]{h^3} > \sqrt[5]{h^5} = h$$

Wir haben also $f(\alpha+h) - f(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt[5]{h^3}$.

Für ein positives h ist die Differenz positiv, für ein negatives h aber negativ. Es ist somit in diesem Falle weder ein Maximum, noch ein Minimum vorhanden.

Functionen, in welchen cyklometrische Functionen enthalten sind.

§. 4.

$$y = f(x) = \varphi(x) + \psi(x)\operatorname{arc}(\sin = (ax^r - b)^s)$$
$$y = \varphi(x) + \psi(x)\operatorname{arc}(\cos = (ax^r - b)^s) \quad \text{etc.}$$

Nehmen wir den ersten Fall, so ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) + \psi'(x) \operatorname{arc}(\sin = (ax^r - b)^s) + \frac{sra x^{r-1}\psi(x)(ax^r - b)^{s-1}}{\sqrt{1-(ax^r-b)^{2s}}}$$

Für $ax^r - b = 1$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$ und ebenso die höheren Differentialquotienten. Setzen wir wieder

$$x = \sqrt[r]{\frac{1+b}{a}} = \alpha$$

und substituiren in $f(x)$ die Grösse $\alpha + h$, so erhalten wir:

$$f(\alpha+h) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)h + \varphi''(\alpha)\frac{h^2}{2!} + \dots$$
$$+ [\psi(\alpha) + \psi'(\alpha)h + \dots] \operatorname{arc}(\sin = \{a(\alpha+h)^r - b\}^s)$$

Es ist $a(\alpha+h)^r - b = 1 + ra\alpha^{r-1}h$, wenn h so klein gewählt wird, dass die übrigen Glieder der Reihe vernachlässigt werden können.

Wir erhalten dann:

$$f(\alpha+h) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)h + \dots$$
$$+ [\psi(\alpha) + \psi'(\alpha)h + \dots] \operatorname{arc}(\sin = (1 + ra\alpha^{r-1}h)^s)$$

Der letzte Factor entwickelt giebt:

$$\operatorname{arc}(\sin = 1 + rsa\alpha^{r-1}h) = (4n+1)\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{(-2rsa\alpha^{r-1}h)} + \dots$$

wobei n jede ganze Zahl mit Einschluss der Null bedeuten kann. Dann geht die Reihe über in folgende:

$$f(\alpha+h) = \varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)h + \dots + [\psi(\alpha) + \psi'(\alpha)h + \psi''(\alpha)\frac{h^2}{2!} + \dots](4n+1)\frac{\pi}{2}$$

Es ist aber für $x = \alpha$ $f(\alpha) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)(4n+1)\frac{\pi}{2}$, somit

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha) - \psi(\alpha)(4n+1)\frac{\pi}{2}$$

und wir erhalten:

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = [\varphi'(\alpha) + (4n+1)\frac{\pi}{2}\psi'(\alpha)]h + \psi(\alpha)\sqrt{(-2rsa\alpha^{r-1}h)}$$
$$+ [\varphi''(\alpha) + \psi''(\alpha)(4n+1)\frac{\pi}{2}]\frac{h^2}{2!} + \dots$$

Das Glied mit $\sqrt{h}$ wird bei verschwindendem h den Ausschlag geben. Da h nur nach einer Seite hin variiren kann, die Function y nur entweder für positive oder für negative h reell ist, so existirt bei $h = 0$ immer ein Maximum oder Minimum. Die Entscheidung zwischen beiden hängt zunächst vom Vorzeichen des Factors $\psi(\alpha)$, aber für $\psi(\alpha) = 0$ vom Vorzeichen der Grösse

$$\varphi'(\alpha) + (4n+1)\frac{\pi}{2}\psi'(\alpha)$$

ab. Ganz so gestaltet sich die Ableitung bei

$$y = \varphi(x) + \psi(x)\operatorname{arc}(\cos = (ax^r - b)^s)$$

nur erhalten wir $ax^r - b = 1$ und $\operatorname{arc}(\cos = 1) = 2n\pi$, wo n wieder alle ganzen positiven und negativen Zahlen bedeuten kann. Die Behandlung Eines Falles der Functionen, in welchen cyklometrische Fnuctionen vorkommen, mag genügen.

Functionen, in welchen die bisher betrachteten 3 Fälle combinirt vorkommen.

§. 5.

Wenn bei dieser Combination für einen bestimmten Wert der Variabeln nur Eine der Grössen, welche durch Differentiiren als Wurzel in den Nenner kommt, den Wert Null annimmt, so lässt sich ein solcher Fall mittelst der vorhergehenden Untersuchung lösen, indem man jene Grössen im Nenner, welche für diesen Wert der Variablen nicht Null werden, in $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ einbeziehen kann, z. B.

$$f(x) = \log\{a + \sqrt[m]{(bx^a - c)^n}\} + \sqrt[r]{(px-q)^s}\operatorname{arc}(\sin = x)$$

Soll untersucht werden, ob für $x = 1$ ein Maximum oder Minimnm vorhanden ist, so wird $\frac{dy}{dx} = \infty$ wegen des in der Function vorkommenden $\operatorname{arc}(\sin = x)$.

Man setze daher $\varphi(x) = \log\{a + \sqrt[m]{(bx^a - c)^n}\}$, $\psi(x) = \sqrt[r]{(p\ldots}$ und verfahre nach den schon angegebenen Metho[...]

Wäre $f(x)$ bezüglich des Maximum oder Minimum zu untersuchen für $x = \frac{q}{p}$, so würden wir wieder $\frac{dy}{dx} = \infty$ erhalten, wegen der in $f(x)$ vorkommenden Wurzelgrösse $\sqrt[r]{(px-q)^s}$. Man setze daher $\varphi(x) = \log\{a + \sqrt[m]{(bx^\alpha - c)^n}$, $\psi(x) = \text{arc}(\sin = x)$ und wende die schon abgeleiteten Kennzeichen an. Es verdienen daher nur jene Fälle noch einer eingehenderen Behandlung, in welchen alle Nenner gleichzeitig für einen bestimmten Wert der Veränderlichen Null werden. Es ist wohl selbstverständlich, dass es nicht nötig ist, alle möglichen Combinationen besonders zu behandeln, sondern dass ein paar Fälle in ihrer Behandlung den Weg angeben zur Behandlung der übrigen.

§. 6.

Es sei gegeben

$$f(x) = \varphi(x) + \psi_1(x)\,\text{arc}\left(\sin = \frac{a}{b}x^\varrho\right) + \psi_2(x)\sqrt[m]{(ax^\varrho - b)^n} +$$
$$+ \psi_3(x)\log\{c + \sqrt[r]{(ax^\varrho - b)^s}\}$$

Für $x = \sqrt[\varrho]{\frac{b}{a}} = \alpha$ werden sämmtliche Wurzeln, welche die Differentialquotienten im Nenner enthalten, Null, und die Differentialquotienten selbst unendlich gross. Um eine solche Function bezüglich des Maximum oder Minimum zu untersuchen, verfahren wir auf folgende Weise: wir setzen in die ursprüngliche Function für x die Grösse $\alpha + h$ und entwickeln dann $\varphi(\alpha+h)$, $\psi_1(\alpha+h)$, $\psi_2(\alpha+h)$ und $\psi_3(\alpha+h)$ nach dem Taylor'schen Satze, was immer möglich ist, weil $\varphi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ und $\psi_3(x)$ für $x = \alpha$ endlich und stetig bleiben. Die ψ Functionen sollen ausserdem für $x = \alpha$ auch noch von Null verschieden sein.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir:

$$f(\alpha+h) = \varphi(\alpha+h) + \psi_1(\alpha+h)\,\text{arc}\left(\sin = \frac{a}{b}(\alpha+h)^\varrho\right) +$$
$$+ \psi_2(\alpha+h)\sqrt[m]{(a(\alpha+h)^\varrho - b)^n} + \psi_3(\alpha+h)\log\{c + \sqrt[r]{(a(\alpha+h)^\varrho - b)^s}\}$$

h kann so klein gewählt werden, dass

$$a(\alpha+h)^\varrho - b = \varrho a \alpha^{\varrho-1} h \quad \text{und}$$

$$\frac{a}{b}(\alpha+h)^\varrho = 1 + \varrho\frac{a}{b}\alpha^{\varrho-1} h$$

wird. Ferner ist für ein verschwindendes h ohne merklichen Fehler

$$\operatorname{arc}(\sin = (1+\varrho \frac{a}{b} \alpha^{\varrho-1} h)) = (4n+1)\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-2\varrho \frac{a}{b} \alpha^{\varrho-1} h}$$

Dann geht $f(\alpha+h)$ über in:

$$f(\alpha+h) = \varphi(\alpha)+\varphi'(\alpha)h+\varphi''(\alpha)\frac{h^2}{2!}+\dots$$

$$+[\psi_1(\alpha)+\psi_1'(\alpha)h+\psi_1''(\alpha)\frac{h^2}{2!}+\dots][(4n+1)\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{-2\varrho \frac{a}{b} \alpha^{\varrho-1} h}]$$

$$+[\psi_2(\alpha)+\psi_2'(\alpha)h+\psi_2''(\alpha)\frac{h^2}{2!}+\dots]\sqrt[m]{(\varrho a \alpha^{\varrho-1} h)^n}$$

$$+[\psi_3(\alpha)+\psi_3'(\alpha)h+\psi_3''(\alpha)\frac{h^2}{2!}+\dots]\log\{c+\sqrt[r]{(\varrho a \alpha^{\varrho-1} h)^s}\}$$

h kann ferners auch noch folgenden Bedingungen unterworfen werden:

$$\psi_2(\alpha) > \psi_2'(\alpha)h+\psi_2''(\alpha)\frac{h^2}{2!}+\dots$$

$$\psi_3(\alpha) > \psi_3'(\alpha)h+\psi_3''(\alpha)\frac{h^2}{2!}+\dots$$

für $x=\alpha$ erhalten wir:

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha)+(4n+1)\frac{\pi}{2}\psi_1(\alpha)+\psi_3(\alpha)\log c \quad \text{daher}$$

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha)-(4n+1)\frac{\pi}{2}\psi_1(\alpha)-\psi_3(\alpha)\log c$$

Setzen wir diesen Wert von $\varphi(\alpha)$ in die Reihe für $f(\alpha+h)$ mit Berücksichtigung der vorstehenden Ungleichungen, so erhalten wir nach gehöriger Zusammenziehung für $\psi_1 x = 0$

$$f(\alpha+h)-f(\alpha) = \psi_2(\alpha)\sqrt[m]{(\varrho a \alpha^{\varrho-1} h)^n}+\psi_3(\alpha)\log\{1+\frac{1}{c}\sqrt[r]{(\varrho a \alpha^{\varrho-1} h)^s}\}$$

$$+[\varphi'(\alpha)+(4n+1)\frac{\pi}{2}\psi'(\alpha)]h+\dots$$

Entwickeln wir wieder $\log\{1+\frac{1}{c}\sqrt[r]{(\varrho a \alpha^{\varrho-1} h)^s}\}$ in eine Reihe nach Potenzen der Wurzelgrösse und nehmen für ein verschwindendes h nur das erste Glied, so ist

$$\log\{1+\frac{1}{c}\sqrt[r]{(\varrho a \alpha^{\varrho-1} h)^s}\} = \frac{1}{c}\sqrt[r]{(\varrho a \alpha^{\varrho-1} h)^s}$$

und es ergiebt sich schliesslich:

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=\psi_2(\alpha)\sqrt[m]{(\varrho a\alpha^{\varrho-1}h)^n}+\frac{\psi_3(\alpha)}{c}\sqrt[r]{(\varrho a\alpha^{\varrho-1}h)^s}$$
$$+\varphi'(\alpha)h+\dots$$

Ist $m>n$ oder $r>s$ oder treffen beide Ungleichungen gleichzeitig ein, so kann das Glied mit h vernachlässigt werden; ist aber $m<n$ und $r<s$ so muss das Glied mit h berücksichtiget werden, die weiteren Glieder haben keinen Einfluss.

Ist nun $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ fortwährend negativ, so ist ein Maximum, ist $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ fortwährend positiv, so ist ein Minimum vorhanden. Beispiel.

Es sei

$$f(x)=3x-\sqrt[3]{x+1}+\log\{10-\sqrt{x+1}\},$$

man untersuche, ob $f(x)$ für $x=-1$ ein Maximum oder Minimum wird.

Es ist hier $\varphi(x)=3x$, $\psi_2(x)=-1$, $\psi_3(x)=1$, $\varphi'(x)=3$ und $\psi_1(x)=0$. Wir erhalten für das Kennzeichen eines Maximum oder Minimum

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=-\sqrt[3]{h}+\frac{1}{10}\sqrt{h}$$

h darf hier nicht negativ genommen werden, weil $f(x)$ für Werte welche kleiner als -1 sind, imaginär wird. Das Glied mit h (in der allgemeinen Formel) können wir ganz vernachlässigen, weil die Wurzelexponenten in beiden Ausdrücken grösser sind, als die Exponenten der Radikande.

Für ein verschwindendes h ist immer $-\sqrt[3]{h}>\frac{1}{10}\sqrt{h}$ folglich die Differenz $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ immer negativ, daher ist $f(x)$ für $x=-1$ ein Maximum.

Wir wollen noch den folgenden Fall untersuchen.

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)\operatorname{arc}(\sin=\frac{a}{b}x^{\varrho})\sqrt[m]{(ax^{\varrho}-b)^n}\log\{c+\sqrt[r]{(ax^{\varrho}-b)^s}\}.$$

Für $x=\sqrt[\varrho]{\frac{b}{a}}=\alpha$ werden sämmtliche Nenner in den Differentialquotienten von $f(x)$ Null. Wir setzen wieder in $f(x)$ statt x die Grösse $\alpha+h$ und verfahren wie früher

$$f(\alpha+h) = \varphi(\alpha+h) + \psi(\alpha+h)\operatorname{arc}\left(\sin = (\alpha+h)^{\varrho}\frac{a}{b}\right)\sqrt[m]{(a(\alpha+h)^{\varrho}-b)^{n}}\times$$

$$\log\{c+\sqrt[r]{(a(\alpha+h)^{\varrho}-b)^{s}}\}$$

Für ein verschwindendes h können wir

$$\operatorname{arc}(\sin = \frac{a}{b}(\alpha+h)^{\varrho}) = \operatorname{arc}(\sin = (1+\varrho\frac{a}{b}\alpha^{\varrho-1}h)) = (4n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt[m]{(a(\alpha+h)^{\varrho}-b)^{n}} = \sqrt[m]{(\varrho a\alpha^{\varrho-1}h)^{n}} \quad \text{und}$$

$$\sqrt[r]{(a(\alpha+h)^{\varrho}-b)^{s}} = \sqrt[r]{(\varrho a\alpha^{\varrho-1}h)^{s}} \quad \text{setzen.}$$

Für $x = \alpha$ wird $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ und wenn wir wieder in Reihen entwickeln, ordnen und gehörig zusammenfassen, so erhalten wir:

$$f(\alpha+h)-f(\alpha) = \psi(\alpha)(4n+1)\frac{\pi}{2}\sqrt[m]{(\varrho a\alpha^{\varrho-1}h)^{n}}\log\{c+\sqrt[r]{(\varrho a\alpha^{\varrho-1}h)^{s}}\}+$$

$$+\varphi'(\alpha)h+\varphi''(\alpha)\frac{h^{2}}{2!}+\ldots$$

Es ist

$$\log\{c+\sqrt[r]{(\varrho a\alpha^{\varrho-1}h)^{s}}\} = \log c + \frac{\sqrt[r]{(\varrho a\alpha^{\varrho-1}h)^{s}}}{c} + \frac{\{\sqrt[r]{(\varrho a\alpha^{\varrho-1}h)^{s}}\}^{2}}{2c^{2}} + \ldots$$

Bei verschwindendem h wird das erste Glied den Ausschlag geben, so dass wir

$$\log\{c+\sqrt[r]{(\varrho a\alpha^{\varrho-1}h)^{s}}\} = \log c$$

setzen dürfen. Dann erhalten wir:

$$f(\alpha+h)-f(\alpha) = (4n+1)\frac{\pi}{2}\psi(\alpha)\log c\sqrt[m]{(\varrho a\alpha^{\varrho-1}h)^{n}}+\varphi'(\alpha)h+\ldots$$

Ist $m > n$, so genügt zur Entscheidung das erste Glied; ist aber $m < n$, so muss auch noch $\varphi'(\alpha)h$ berücksichtigt werden.

Findet man $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ constant negativ; so ist für $x=\alpha$ ein Maximum vorhanden; ist diese Differenz aber constant positiv, ein Minimum. Kann jedoch durch die Wahl von h diese Differenz sowohl positiv als auch negativ gemacht werden, so hat $f(x)$ für $x = \alpha$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Fasst man das Ganze, was über die sogenannten Ausnahmsfälle der Taylor'schen Reihe, in Betracht gezogen wurde, zusammen, so

ergiebt sich folgendes: man nehme in der gegebenen Function einerseits jene Ausdrüke zusammen, welche in den Differentialquotienten der Taylor'schen Reihe in den Nenner kommen und für einen bestimmten Wert von $x = a$ Null werden, und andererseits jene Ausdrücke, welche für diesen Wert endlich und stetig bleiben. Dann setze man in die ursprüngliche Function überall statt x die Grösse $a + h$, wo h verschwindend klein zu nehmen ist und entwickle alles nach Potenzen von h, bilde sich den Unterschied $f(a+h) - f(a)$ und sehe nach, ob für jedes Zeichen von h diese Differenz entweder constant positiv oder constant negativ ist. Im ersten Falle erhält man ein Minimum, im zweiten ein Maximum. Kann aber $f(a+h) - f(a)$ beliebig positiv oder negativ gemacht werden, so ist weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden.

Wenn Untersuchungen über das Maximum oder Minimum einer Function mit einer Variablen gemacht werden, so sind die betreffenden Werte aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ zu ziehen, und es muss die Bedingung erfüllt sein, dass der erste nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung sei. Diese Bedingung braucht aber bei den Ausnahmsfällen, wie sie hier erörtert worden sind, nicht erfüllt zu sein.

Functionen mit 2 und mehreren Veränderlichen.

§. 7.

Wenn eine Function $z = f(x, y)$ gegeben ist, so werden bei der Untersuchung, ob z ein Maximum oder Minimum wird, die Werte aus den Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ genommen.}$$

Es können aber auch bei gewissen Formen der Functionen Werte genommen werden, für welche entweder nur der eine oder der andere dieser Differentialquotienten oder beide zugleich unendlich gross werden, so dass wir folgende Gleichungen bekommen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \infty$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \infty$$

Digitized by Google

Wenn $z = f(x, y, u)$ gegeben ist, so können wir aus folgenden Gleichungen Werte ziehen, welche z zu einem Maximum oder Minimum machen sollen.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \infty$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \infty, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \infty, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \infty$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \infty$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \infty, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \infty, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \infty$$

Je grösser die Zahl der Veränderlichen wird, desto grösser wird die Anzahl der Gleichungen, aus denen man Werte für ein Maximum oder Minimum ziehen kann. Es muss auch hier bemerkt werden, dass nicht gerade die ersten Differentialquotienten für bestimmte Werte den Veränderlichen unendlich gross werden müssen, sondern es kann dies erst in den späteren Differentialquotienten eintreffen und dass es dann für die Untersuchung ganz gleichgiltig ist, von welcher Ordnung die Differentialquotienten sind. Wenn diese Fälle eintreten, so kann nach der gewöhnlichen Methode nicht mehr entschieden werden, ob für die in Betracht gezogenen Werte der Variablen die Function ein Maximum oder Minimum wird, weil die Taylor'sche Reihe nicht mehr anwendbar ist. Die Differentialquotienten werden auch hier nur unendlich gross werden, wenn in der gegebenen Function ein Logarithmus, eine Wurzelgrösse oder eine cyklometrische Function, wie in §. 1. auseinandergesetzt wurde, vorkommen. Auch bei mehreren Veränderlichen kann das Verfahren eingeschlagen werden, welches wir für Functionen mit einer Variablen gezeigt haben.

Man substituirt in der gegebenen Function für jene Werte von $x = a$ und $y = b$, welche die Differentialquotienten unendlich gross

machen, Werte, welche von $x = a$, $y = b$ sehr wenig verschieden sind, entwickelt das Ganze nach Potenzen der sehr kleinen Aenderungen, bringt Alles auf die einfachste Form und sieht ob der Functions-Wert bei dieser Substitution beständig grösser oder kleiner wird als $f(a, b, \ldots)$. Im ersten Falle ist ein Minimum, im zweiten ein Maximum vorhanden. Trifft aber keiner der beiden Fälle ein, so ist weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden. Als Wegweiser dieses Verfahren mögen ein paar Fälle hier durchgeführt werden.

$$z = f(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y) \sqrt[m]{(ax^r - b)^n}$$

Man soll untersuchen, ob für $x = \sqrt[r]{\frac{b}{a}} = \alpha$, $y = c$, z zu einem Maximum oder Minimum wird.

Für $x = \alpha$ wird $\frac{\partial z}{\partial x} = \infty$, wenn $m > n$ ist; wenn $m < n$ ist, so wird erst ein höherer Differentialquotient unendlich gross. $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ seien für $x = \alpha$, $y = c$ endlich und stetig, $\psi(x, y)$ sei ausserdem von Null verschieden. Wir setzen in die ursprüngliche Function statt x und y die Grössen $\alpha + h$ und $c + \beta h$ ein, wobei h und βh beliebig klein vorausgesetzt werden, im übrigen aber ganz willkürlich sind. Wir erhalten dann:

$$f(\alpha + h, c + \beta h) = \varphi(\alpha + h, c + \beta h) + \psi(\alpha + h, c + \beta h) \sqrt[m]{(a(\alpha + h)^r - b)^n}$$

Für ein verschwindendes h ist:

$$\sqrt[m]{(a(\alpha + h)^r - b)^n} = \sqrt[m]{(ra\alpha^{r-1}h)^n}$$

Somit ergiebt sich nach der Taylor'schen Reihe entwickelt:

$$f(\alpha + h, c + \beta h) = \varphi(\alpha, c) + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\beta\right]h + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial c}\beta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c^2}\beta^2\right]h^2 + \ldots$$
$$+ \left\{\psi(\alpha, c) + \left[\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial c}\beta\right]h + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \ldots\right]\right\} \sqrt[m]{(ra\alpha^{r-1}h)^n}$$

h kann nun so gewählt werden, dass

$$\psi(\alpha, c) > \left[\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial c}\beta\right]h + \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \ldots\right]\frac{h^2}{2!} + \ldots$$

Für $x = \alpha$, $y = c$ ist $f(\alpha, c) = \varphi(\alpha, c)$ und wir erhalten:

$$f(\alpha + h, c + \beta h) - f(\alpha, c) = \psi(\alpha, c) \sqrt[m]{(ra\alpha^{r-1}h)^n} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\beta\right]h + \ldots$$

Ist $m > n$, so genügt schon das erste Glied $\psi(\alpha, c)\sqrt[m]{(ra\alpha^{r-1}h)^n}$. Wenn aber $m < n$ ist, so muss noch das Glied mit h berücksichtiget werden, die Glieder höherer Ordnung haben keinen Einfluss mehr. So erhalten wir dann ganz allgemein folgendes Kennzeichen.

$$f(\alpha + h, c + \beta h) - f(\alpha, c) = \psi(\alpha, c)\sqrt[m]{(ra\alpha^{r-1}h)^n} + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial c}\beta\right]h$$

Ist diese Differenz für jede beliebige Wahl des Zeichens von h **negativ**, so ist $f(\alpha, c)$ ein Maximum; ist sie aber **positiv**, so ist $f(\alpha, c)$ ein Minimum.

Beispiel: $z = f(x, y) = 1 + (b - y^2)^2 + \sqrt[3]{(x^2 - a)^2}$

Es ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - a}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4y(b - y^2)$$

Aus $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ erhalten wir die Werte

$$x = 0 \quad \text{und}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \pm\sqrt{b} \end{cases}$$

Wir erhalten aber auch Werte aus den Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \infty \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

und zwar:

$$x = \pm\sqrt{a}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm\sqrt{b} \end{cases}$$

Für diese Werte soll untersucht werden, ob $f(x, y)$ ein Maximum oder Minimum wird.

Unser Kennzeichen ist folgendes:

$$f(\alpha + h, c + \beta h) - f(\alpha, c) = \psi(\alpha, c)\sqrt[m]{(ra\alpha^{r-1}h)^n}$$

Da $m > n$ ist, genügt dieses Glied. Es ist

$$\varphi(x, y) = 1 + (b - y^2)^2 \quad \text{und} \quad \psi(x, y) = 1, \quad \text{also}$$

$$f(\alpha + h, c + \beta h) - f(\alpha, c) = \sqrt[3]{(\pm 2\sqrt{ah})^2}.$$

Diese Wurzel ist unter allen Umständen positiv, also ist für $x = \pm\sqrt{a}$, $y = 0$ die Function $z = 1 + b^2$ ein Minimum und ebenso für $x = \pm\sqrt{a}$ $y = \pm\sqrt{b}$ ist $z = 1$ ein Minimum.

Ein zweiter Fall wäre folgender:

$$z = f(x,y) = \varphi(x,y) + \psi_1(x,y)\sqrt[m]{(ax^r - b)^n} + \psi_2(x,y)\sqrt[s]{(py^\varrho - q)^\mu}$$

Für $x = \sqrt[r]{\frac{b}{a}} = \alpha$ und $y = \sqrt[\varrho]{\frac{q}{p}} = \gamma$ werden die partiellen Differentialquotienten irgend einer Ordnung unendlich gross.

Wir setzen wieder in die ursprüngliche Function statt x und y die Grössen $\alpha + h$ und $\gamma + \beta h$ und erhalten

$$f(\alpha+h), \gamma+\beta h) = \varphi(\alpha+h, \gamma+\beta h) + \psi_1(\alpha+h, \gamma+\beta h)\sqrt[m]{(a(\alpha+h)^r - b)^n} +$$
$$+ \psi_2(\alpha+h, \gamma+\beta h)\sqrt[s]{(p(\gamma+\beta h)^\varrho - q)^\mu}$$

$$f(\alpha+h)\gamma+\beta h) = \varphi(\alpha,\gamma) + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\beta\right]h + \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\gamma}\beta + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2}\beta^2\right]\frac{h^2}{2!} + \dots$$
$$+ \left\{\psi_1(\alpha,\gamma) + \left[\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\gamma}\beta\right]h + \dots\right\}\sqrt[m]{(a(\alpha+h)^r - b)^n}$$
$$+ \left\{\psi_2(\alpha,\gamma) + \left[\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\gamma}\beta\right]h + \dots\right\}\sqrt[s]{(p(\gamma+\beta h)^\varrho - q)^\mu}$$

h kann immer so gewählt werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind

$$\psi_1(\alpha_1\gamma) > \left[\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\gamma}\beta\right]h + \left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha\partial\gamma}\beta + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial\gamma^2}\beta^2\right]\frac{h^2}{2!} + \dots$$
$$\psi_2(\alpha_2\gamma) > \left[\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\gamma}\beta\right]h + \left[\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\alpha\partial\gamma}\beta + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial\gamma^2}\beta^2\right]\frac{h^2}{2!} + \dots$$
$$\sqrt[m]{(a(\alpha+h)^r - b)^n} = \sqrt[m]{(ra\,\alpha^{r-1}h)^n}$$
$$\sqrt[s]{(p(\gamma+\beta h)^\varrho - q)^\mu} = \sqrt[s]{(p\,\varrho\gamma^{\varrho-1}\beta h)^\mu}$$

Mit Berücksichtigung vorstehender Bedingungen ergiebt sich

$$f(\alpha+h, \gamma+\beta h) = \varphi(\alpha,\gamma) + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\beta\right]h + \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\gamma}\beta + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2}\beta^2\right]\frac{h^2}{2!} + \dots$$
$$+ \psi_1(\alpha,\gamma)\sqrt[m]{(ra\,\alpha^{r-1}h)^n} + \psi_2(\alpha,\gamma)\sqrt[r]{(\varrho p\,(\beta h)\gamma^{\varrho-1})^\mu}$$

Für $x = \alpha$, $y = \gamma$ ist $f(\alpha, \gamma) = \varphi(\alpha, \gamma)$ und wir erhalten schliesslich, wenn wir die Glieder zweiter Ordnung für ein verschwindendes h vernachlässigen

$$f(\alpha+h, \gamma+\beta h) - f(\alpha, \gamma) = \varphi_1(\alpha, \gamma)\sqrt[m]{(r a \alpha^{r-1} h)^n} + \psi_2(\alpha, \gamma)\sqrt[s]{(\varrho p \gamma^{\varrho-1}\beta h)^\mu} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\beta\right] h$$

Ist $m > n$ und $s > \mu$, so kann das Glied mit h ganz vernachlässigt werden und wir erhalten für das Kennzeichen eines Maximum oder Minimum

$$f(\alpha+h, \gamma+\beta h) - f(\alpha, \gamma) = \psi_1(\alpha, \gamma)\sqrt[m]{(r a \alpha^{r-1} h)^n} + \psi_2(\alpha, \gamma)\sqrt[r]{(\varrho p \gamma^{\varrho-1}\beta h)^\mu}$$

Ist diese Differenz beständig negativ, so ist ein Maximum, ist sie beständig positiv, so ist ein Minimum vorhanden. Ist nur Einer der Wurzelexponenten grösser, als der Exponent des Radicandes, etwa $m > n$ aber $s < \mu$, so hängt die Entscheidung nur von einem Gliede ab, weil h immer so klein gewählt werden kann, dass das Glied mit dem kleinsten Exponenten von h den Ausschlag giebt. In diesem Falle wäre

$$f(\alpha+h, \gamma+\beta h) - f(\alpha, \gamma) = \psi_2(\alpha, \gamma)\sqrt[m]{(r a \alpha^{r-1} h)^n}$$

Ist aber $m < n$ und $s < \mu$, so muss auch das Glied mit h berücksichtigt werden.

$$f(\alpha+h, \gamma+\beta h) - f(\alpha, \gamma) = \psi_1(\alpha, \gamma)\sqrt[m]{(r a \alpha^{r-1} h)^n} + \psi_2(\alpha, \gamma)\sqrt[s]{(\varrho p \gamma^{\varrho-1}\beta h)^\mu} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\beta\right] h$$

Ist $m = n+1$ und $r = \mu+1$, so ist h gemeinsamer Factor des ganzen Ausdruckes und es ist in diesem Falle, wenn durch die Bedingungen der Aufgabe das Zeichen von h nicht beschränkt ist, weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden. Ist m aber um mehr als eine Einheit kleiner als n und ebenso s um mehr als eine Einheit kleiner als μ, so ist h die niederste unter den verschiedenen Potenzen von h und es muss dann natürlich $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\beta$ Berücksichtigung finden, und es ist, wenn h bezüglich des Zeichens beliebig gewählt werden kann, weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden.

Diese zwei Fälle genügen, um als Richtschnur für die Behandlung anderer Fälle zu dienen.

XXXIX.

Die Lehre vom Grössten und Kleinsten, als Zweig des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen.

Von

Herrn Dr. **Heilermann**,
Director der Realschule in Essen.

---

§. 1. Wenn eine Function $f(x)$ von einer Veränderlichen aus zwei Factoren besteht und der eine ein vollständiges Quadrat einer linearen Function der Veränderlichen ist, so ist im Allgemeinen null ein Maximum oder Minimum der Function $f(x)$.

Es sei

1) $$f(x) = (x-\alpha)^2.g(x).$$

Setzt man darin

$x = \alpha - \delta$, so entsteht $f(\alpha-\delta) = \delta^2.g(\alpha-\delta)$,
$x = \alpha$, „ „ $f(\alpha) = 0.g(\alpha) = 0$,
$x = \alpha + \delta$, „ „ $f(\alpha+\delta) = \delta^2.g(\alpha+\delta)$.

Wenn man nun die willkürliche Grösse δ sehr klein annimmt, so sind die drei Argumente $\alpha-\delta$, α, $\alpha+\delta$ und mit denselben auch die drei Functionswerte $g(\alpha-\delta)$, $g(\alpha)$, $g(\alpha+\delta)$ nur wenig von einander verschieden. Diese Functionswerte sind daher im Allgemeinen entweder alle drei positiv oder alle drei negativ, und nur als Ausnahme ist der Fall in Betracht zu ziehen, dass zwischen denselben ein Zeichenwechsel stattfindet.

Wenn **erstens** die Werte $g(\alpha-\delta)$, $g(\alpha)$, $g(\alpha+\delta)$ alle drei negativ sind, so sind nach den obigen Gleichungen auch von der Function $f(x)$ die Werte $f(\alpha-\delta)$ und $f(\alpha+\delta)$ beide negativ, und daher ist der

Digitized by Google

zwischenliegende Functionswert $f(\alpha) = 0$ grösser als $f(\alpha - \delta)$ und auch grösser als $f(\alpha + \delta)$; d. h. die Function $f(x)$ erreicht bei der Veränderlichen $x = \alpha$ das Maximum $f(\alpha) = 0$, wenn $g(\alpha) < 0$ ist.

Wenn zweitens die Werte $g(\alpha - \delta)$, $g(\alpha)$, $g(\alpha + \delta)$ alle drei positiv sind, so sind nach den obigen Gleichungen auch von der Function $f(x)$ die Werte $f(\alpha - \delta)$ und $f(\alpha + \delta)$ beide positiv, und daher ist der zwischenliegende Functionswert $f(\alpha) = 0$ kleiner als $f(\alpha - \delta)$ und auch kleiner als $f(\alpha + \delta)$; d. h. die Function $f(x)$ erreicht bei der Veränderlichen $x = \alpha$ das Minimum $f(\alpha) = 0$, wenn $g(\alpha) > 0$ ist.

Wenn drittens die Functionswerte $g(\alpha - \delta)$, $g(\alpha)$, $g(\alpha + \delta)$, insbesondere $g(\alpha - \delta)$ und $g(\alpha + \delta)$ verschiedene Vorzeichen haben, so geht die Function $g(x)$ entweder wachsend oder abnehmend durch null, wenn ihre Veränderliche x von $\alpha - \delta$ bis $\alpha + \delta$ wächst. Da aber die Grösse δ beliebig klein gewählt werden kann, so muss die Function $g(x)$ den Wert null gerade bei der Veränderlichen $x = \alpha$ annehmen, oder es ist $g(\alpha) = 0$, wenn nicht bei dem Werte $x = \alpha$ die Stetigkeit der Function $g(x)$ unterbrochen ist. Der Functionswert $f(\alpha) = 0$ ist somit weder ein Maximum noch ein Minimum von $f(x)$, wenn $g(\alpha) = 0$ ist.

Auch auf eine Function von allgemeinerer Form

2) $$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha) . f_1(\alpha) + \tfrac{1}{2}(x - \alpha)^2 . f_2(x),$$

in welcher f_1 und f_2 die Zeichen von zwei mit $f(x)$ zusammenhängenden Functionen sind, und α ein willkürlicher Wert von x ist, können die vorstehenden Schlüsse leicht ausgedehnt werden. Bestimmt man zunächst die Grösse α so, dass dadurch der Gleichung

$$f_1(\alpha) = 0$$

genügt wird, und setzt diesen Wert oben ein, so ist

$$f(x) = f(\alpha) + \tfrac{1}{2}(x - \alpha)^2 . f_2(x).$$

Diese Function aber unterscheidet sich von der obigen Form 1) nur durch den unveränderlichen Summanden $f(\alpha)$; daher ist auch hier

$f(\alpha)$ ein Maximum von $f(x)$, wenn $f_1(\alpha) = 0$ und $f_2(\alpha) < 0$,
$f(\alpha)$ „ Minimum „ $f(x)$, „ $f_1(\alpha) = 0$ „ $f_2(\alpha) > 0$,
$f(\alpha)$ weder ein Maximum noch ein Minimum von $f(x)$, wenn $f_1(\alpha) = 0$ und auch $f_2(\alpha) = 0$.

Wenn man nun in der obigen Gleichung 2) die Functionswerte $f_1(\alpha)$ und $f_2(\alpha)$ als erste und zweite Ableitung des Functions-

wertes $f(\alpha)$ bezeichnet, so erhält man für die Bestimmung des Maximums und Minimums der Function $f(x)$ folgenden Ausdruck.

Von einer Function $f(x)$ ist der Functionswert $f(\alpha)$ ein Maximum, wenn die erste Ableitung desselben $f_1(\alpha)$ gleich null und die zweite $f_2(\alpha)$ negativ ist; derselbe Functionswert $f(\alpha)$ ist ein Minimum von $f(x)$, wenn die erste Ableitung desselben $f_1(\alpha)$ gleich null und die zweite $f_2(\alpha)$ positiv ist; derselbe Functionswert $f(\alpha)$ ist weder ein Maximum noch ein Minimum von $f(x)$, wenn die erste Ableitung desselben $f_1(\alpha)$ gleich null und die zweite $f_2(\alpha)$ auch gleich null ist.

§. 2. Da nach dem Vorstehenden für eine Function $f(x)$ von der Form 2) leicht entschieden werden kann, ob $f(\alpha)$ ein Maximum oder ein Minimum oder aber weder ein Maximum noch ein Minimum ist, so ist für die Functionen von einer Veränderlichen zunächst die Aufgabe zu lösen, den einfachen Functionen, welche als Glieder einer zusammengesetzten Function in der Elementarmathematik vorkommen können, die Form 2) zu geben.

1) Es sei erstens

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

eine Function, deren Glieder die Veränderliche x nur als Base von Potenzen mit positiven ganzen Exponenten enthalten. Setzt man darin $\alpha + (x - \alpha)$ statt x, so entsteht durch die Entwicklung der einzelnen Potenzen

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_0,\\
a_1 x &= a_1\alpha + (x-\alpha)a_1,\\
a_2 x^2 &= a_2\alpha^2 + (x-\alpha)2a_2\alpha + \tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2.2a_2,\\
a_3 x^3 &= a_3\alpha^3 + (x-\alpha)3a_3\alpha^2 + \tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2.[6a_3\alpha + 2a_3(x-\alpha)],\\
a_4 x^4 &= a_4\alpha^4 + (x-\alpha)4a_4\alpha^3 + \tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2[12a_4\alpha^2 + 8a_4\alpha(x-\alpha) + 2a_4(x-\alpha)^2],\\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\
a_n x^n &= a_1\alpha^n + (x-\alpha)na_n\alpha^{n-1} + \tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2 \times\\
&\quad \left[2\binom{n}{2}a_n\alpha^{n-2} + 2\binom{n}{3}a_n\alpha^{n-3}(x-\alpha) + \dots 2\binom{n}{n}a_n(x-\alpha)^{n-2}\right].
\end{aligned}$$

Durch Summirung dieser Gleichungen erhält man die Function $f(x)$ in der Form

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha).f_1(\alpha) + \tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2.f_2(x),$$

und darin ist

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n,$$
$$f_1(\alpha) = a_1 + 2a_2\alpha + 3a_3\alpha^2 + \ldots + na_n\alpha^{n-1},$$
$$f_2(x) = 2a_2 + 6a_3\alpha + 12a_4\alpha^2 + \ldots + n(n-1)a_n\alpha^{n-2}$$
$$+ b_1(x-\alpha) + b_2(x-\alpha)^2 + \ldots + b_{n-2}(x-\alpha)^{n-2},$$

wenn man zur Abkürzung in der Function $f_2(x)$ die Summe der Coefficienten von $(x-\alpha)$, $(x-\alpha)^2$ u. s. w. mit b_1, b_2 u. s. w. bezeichnet.

Man erhält, wie diese Darstellung zeigt, aus dem Functionswerte $f(\alpha)$ die erste Ableitung desselben, nämlich $f_1(\alpha)$, wenn man vor jedes Glied den Exponenten von α als Coefficienten setzt und den Exponenten als solchen um eins vermindert.

Ferner ist

$$f_2(\alpha) = 2a_2 + 6a_3\alpha + 12a_4\alpha^2 + \ldots + n(n-1)a_n\alpha^{n-2},$$

mithin ist diese zweite Ableitung des Functionswertes $f(\alpha)$ aus der ersten $f_1(\alpha)$ eben so gebildet, wie die erste aus dem Functionswerte selbst.

Die vorstehenden Ergebnisse sind auch auf solche Functionen anwendbar, in welchen die Veränderliche nicht ausschliesslich als Base unter ganzen positiven Exponenten steht, denn die binomische Entwicklung, welche denselben zu Grunde liegt, führt unter der Voraussetzung von negativen oder gebrochenen Exponenten zu convergirenden Reihen, da diese nach Potenzen der Differenz $(x-\alpha)$ fortschreiten und $(x-\alpha)$ beliebig klein gewählt werden kann. Daher ist z. B. für die Function

$$g(x) = ax^{-m} + bx^{\frac{1}{n}}$$

von dem Functionswerte $g(\alpha)$

$$g_1(\alpha) = -ma\alpha^{-m-1} + \frac{1}{n}b\alpha^{\frac{1}{n}-1},$$

$$g_2(\alpha) = m(m+1)a\alpha^{-m-2} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)b\alpha^{\frac{1}{n}-2}$$

die erste und zweite Ableitung.

2) Wie die binomische Reihe zu der für die Unterfindung der grössten und kleinsten Werte einer Function erforderlichen Umformung führt, wenn die Veränderliche in der Function nur als Base von Potenzen unter unveränderlichen Exponenten enthalten ist, so genügen die übrigen Reihen der niederen Analysis für die übrigen Functionen zu demselben Zwecke.

a) Um die Function des natürlichen Logarithmen

$$f(x) = \log n . x$$

auf die Form

$$f(x) = f(x) + (x-\alpha) . f_1(\alpha) + \tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2 . f_2(x)$$

zu bringen, setze man $\alpha + (x-\alpha)$ statt x; dadurch entsteht

$$\log n . x = \log n . (\alpha + (x-\alpha)) = \log n . \alpha + \log n . \left(1 + \frac{x-\alpha}{\alpha}\right),$$

also nach Einsetzung der logarithmischen Reihe

$$\log n . x = \log n \alpha + (x-\alpha) . \frac{1}{\alpha} - \tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2 . \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2(x-\alpha)}{3\alpha^3} + \frac{2(x-\alpha)^3}{4\alpha^4} - + ..\right]$$

Nun erhält man durch den Vergleich dieser Darstellung mit der vorhergehenden, dass zu dem Functionswerte

$$f(\alpha) = \log n . \alpha$$

die Functionswerte

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

und

$$f_2(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2}$$

als erste und zweite Ableitung angehören.

Zu beachten ist hier, dass die zweite Ableitung $f_2(\alpha)$ aus der ersten $f_1(\alpha)$ nach der oben in §. 2. entwickelten Regel gebildet wird.

Bezüglich des gemeinen Logarithmen bedarf es keiner besonderen Untersuchung der Ableitungen, da diese sich aus dem bekannten Zusammenhange

$$\log v . x = \log v . e . \log n . x$$

und den oben erwähnten Ableitungen sogleich ergeben.

b) Auch für die Exponentialfunction

$$f(x) = e^x = e^{\alpha + (x-\alpha)} = e^\alpha . e^{x-\alpha}$$

erhält man die Darstellung

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha) . f_1(\alpha) + \tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2 . f_2(x),$$

die für die Bestimmung der grössten und kleinsten Werte verlangt wird, durch Einsetzung der Reihe

$$e^{x-\alpha} = 1 + \frac{x-\alpha}{1!} + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \dots,$$

nämlich:

$$e^x = e^\alpha + (x-\alpha).e^\alpha + \tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2.\left[e^\alpha + \frac{2e^\alpha.(x-\alpha)}{3!} + \frac{2e^\alpha.(x-\alpha)^2}{4!} + \dots\right]$$

Mithin sind

$$f_1(\alpha) = e^\alpha \quad \text{und} \quad f_2(\alpha) = e^\alpha$$

die Ableitungen des Functionswertes e^α und auch diesem Functionswerte gleich.

Die Ableitungen der allgemeinen Exponentialfunction a^x können hiernach mittels der Umformung

$$a^x = a^{\alpha + (x-\alpha)} = a^\alpha.a^{x-\alpha} = a^\alpha.e^{(x-\alpha)\log n.a}$$

leicht angegeben werden.

c) Von den transcendenten Functionen kommen bei den elementaren Aufgaben über grösste und kleinste Werte die trigonometrischen Functionen eines veränderlichen Winkels vorzugsweise in Betracht. Wenn eine Grösse nur von einer solchen Winkelfunction abhängt, so kann diese selbst als die Veränderliche angesehn und in vielen Fällen auch das Maximum oder Minimum jener Grösse unmittelbar angegeben werden, weil ja der Gang der Winkelfunction bekannt ist. Wenn dagegen eine Grösse unmittelbar von einem veränderlichen Winkel und auch von einer trigonometrischen Function desselben abhängig ist, so sind für die Unterfindung der grössten und kleinsten Werte die Ableitungen der Winkelfunction erforderlich.

Es sei erstens

$$f(x) = \sin x = \sin(\alpha + (x-\alpha)) = \sin\alpha\cos(x-\alpha) + \cos\alpha\sin(x-\alpha);$$

setzt man darin statt $\cos(x-\alpha)$ und $\sin(x-\alpha)$ die bekannten Reihen, so entsteht

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\alpha.\left[1 - \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \frac{(x-\alpha)^4}{4!} - + \dots\right] \\ &\qquad + \cos\alpha.\left[\frac{x-\alpha}{1!} - \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \frac{(x-\alpha)^5}{5!} - + \dots\right] \\ &= \sin\alpha + (x-\alpha).\cos\alpha \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2.\left[2\sin\alpha\left(\frac{1}{2!} - \frac{(x-\alpha)^2}{4!} + - \dots\right)\right. \\ &\qquad \left. + 2\cos\alpha\left(\frac{x-\alpha}{3!} - \frac{(x-\alpha)^3}{5!} + - \dots\right)\right],\end{aligned}$$

und dadurch ist diese Function auf die Form

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha).f_1(\alpha) + \tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2.f_2(x$$

Digitized by Google

gebracht worden. Man sieht sogleich, dass

$$f_1(\alpha) = \cos\alpha$$

und

$$f_2(\alpha) = -\sin\alpha$$

die erste und zweite Ableitung des Functionswertes $\sin\alpha$ sind.

Zweitens sei

$$f(x) = \cos x = \cos(\alpha + (x-\alpha)) = \cos\alpha\cos(x-\alpha) - \sin\alpha\sin(x-\alpha),$$

also entsteht durch Einsetzung der obigen Reihen

$$\cos x \cos\alpha . \left[1 - \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \frac{(x-\alpha)^4}{4!} - + \ldots\right]$$

$$- \sin\alpha . \left[\frac{x-\alpha}{1!} - \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \frac{(x-\alpha)^5}{5!} - + \ldots\right]$$

$$= \cos\alpha - (x-\alpha)\sin\alpha$$

$$-\tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2 . \left[2\cos\alpha\left(\frac{1}{2!} - \frac{(x-\alpha)^2}{4!} + - \ldots\right)\right.$$

$$\left. -2\sin\alpha\left(\frac{x-\alpha}{3!} - \frac{(x-\alpha)^3}{5!} + - \ldots\right)\right];$$

und daher sind

$$f_1(\alpha) = -\sin\alpha,$$

$$f_2(\alpha) = -\cos\alpha$$

die erste und zweite Ableitung des Functionswertes $\cos\alpha$.

Das Ergebniss des Vorstehenden lässt sich zusammenfassen in den gemeinsamen Ausdruck: die erste Ableitung von $\sin\alpha$ ist $\cos\alpha$ und die von $\cos\alpha$ ist $-\sin\alpha$.

Die Ableitungen der übrigen goniometrischen Functionen können mittels der vorstehenden aus dem Folgenden leicht entnommen werden.

§. 3. Die bisherigen Erörterungen betrafen die einfachen Functionen von einer Veränderlichen; und die gewonnenen Ergebnisse können auf die Functionen, welche aus jenen durch Addition oder Subtraction zusammengesetzt sind, unmittelbar angewandt werden. Für die übrigen zusammengesetzten Functionen ergeben sich folgende Regeln.

a) Wenn erstens die Function

$$f(x) = g(x) . h(x)$$

das Product aus zwei einfachen Functionen ist, so kann diese Gleichung durch die umgeformte

$$f(\alpha)+(x-\alpha).f_1(\alpha)+\tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2.f_2(x)$$
$$=[g(\alpha)+(x-\alpha).g_1(\alpha)+\tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2.g_2(x)].[h(\alpha)+(x-\alpha)h_1(\alpha)$$
$$+\tfrac{1}{2}(x-\alpha)^2.h_2(x)]$$

ersetzt werden. Man erhält nun durch Ausführung dieses Productes sogleich die erste Ableitung

$$f_1(\alpha)=g_1(\alpha).h(\alpha)+g(\alpha).h_1(\alpha)$$

und dem entsprechend die Regel, dass die Ableitung eines Functionswertes, welcher ein Product aus zwei Functionswerten ist, gefunden wird, wenn man jeden Factor mit der Ableitung des anderen multiplicirt und die Producte summirt. Ebenso erkennt man leicht, dass die zweite Ableitung eines solchen Functionswertes aus der ersten nach derselben Regel zu bilden ist.

Da ferner die vorerwähnte Regel leicht auf Producte aus beliebig vielen Factoren ausgedehnt werden kann, so zeigt sie auch, wie die Ableitung eines potenzirten Functionswertes gefunden wird. Wenn z. B.

$$f(x)=(g(x))^n,$$

so kann man diese Potenz als Product aus n gleichen Factoren betrachten und erhält demnach

$$f_1(\alpha)=n(g(\alpha))^{n-1}.g_1(\alpha).$$

Ebenso, wie oben durch die Entwicklung des Productes aus zwei Functionen die erste Ableitung des Functionswertes gefunden ward, erhält man auch die Ableitung einer gebrochenen Function

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)};$$

ausserdem führt auch die Behandlung der umgekehrten Function

$$g(x)=f(x).h(x)$$

zu demselben Ziele. Für diese ist oben gefunden

$$g_1(\alpha)=f_1(\alpha).h(\alpha)+f(\alpha).h_1(\alpha),$$

und daraus ergibt sich

$$f_1(\alpha)=\frac{g_1(\alpha)}{h(\alpha)}-\frac{g(\alpha).h_1(\alpha)}{(h(\alpha))^2}.$$

Durch dasselbe Verfahren findet man zu der Function

$$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$$

für den Functionswert $f(\alpha)$ die erste Ableitung, nämlich

$$f_1(\alpha) = -\frac{g_1(\alpha)}{n\sqrt[n]{(g(\alpha))^{n-1}}}$$

Schlussbemerkung. Diese Untersuchungen könnten unschwer auch auf die Functionen von mehren Veränderlichen ausgedehnt werden. Ich glaube jedoch, dass das Vorstehende genügt, um auf die Lehre vom Grössten und Kleinsten als einen leicht zugänglichen Zweig des mathematischen Unterrichtes an höheren Schulen aufmerksam zu machen. Auch eine genügende Auswahl von Aufgaben findet man in der Sammlung von Bode und Fischer. (Berlin 1860) sowie in meiner Schrift über grösste und kleinste Werte. (Leipzig 1871).

Essen, den 30. December 1876.

Digitized by Google

XXXX.

Miscellen.

1.

Identité remarquable fournie par la quatrième puissance d'une somme de quatre nombres.

Quelesque soient les quantités a, b, c et d, on a toujours l'identité

$$(b+c+d-a)^4+(c+d+a-b)^4+(d+a+b-c)^4+(a+b+c-d)^4$$
$$=4(a^2+b^2+c^2+d^2)^2+16(ab-cd)^2+16(ac-bd)^2+16(ad-bc)^2.$$

Cette égalité s'établit aisément au moyen de la formule facile à vérifier

$$(\Sigma a)^4=\Sigma a^4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12\Sigma a^2bc+24\Sigma abcd.$$

Georges Dostor.

2.

Radius des Kreises, der drei gegebene Kreise berührt.

Seien a, b, c die Abstände der Mittelpunkte und α, β, γ die gegebenen Radien, so ist

$$\varrho=-\frac{A\alpha(S-A)+B\beta(S-B)+C\gamma(S-C)\mp 4J\sqrt{ABC}}{A(S-A)+B(S-B)+C(S-C)},$$

worin

$$A=a^2-(\beta-\gamma)^2$$
$$B=b^2-(\gamma-\alpha)^2$$
$$C=c^2-(\alpha-\beta)^2$$

$S=\frac{1}{2}(A+B+C)$ und $J=$ dem Inhalt des Dreiecks ABC.

Man hat nemlich (siehe die Figur):

$$\cos AOB = \frac{(\varrho+\alpha)^2+(\varrho+\beta)^2-c^2}{2(\varrho+\alpha)(\varrho+\beta)}$$

$$1-\cos AOB = 2\sin^2\tfrac{1}{2}AOB = \frac{c^2-(\alpha-\beta)^2}{2(\varrho+\alpha)(\varrho+\beta)} = \frac{C}{2(\varrho+\alpha)(\varrho+\beta)}$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}AOB = 1-\cos^2 DFE = 1-\frac{(EF^2+FD^2-DE^2)^2}{4\,EF^2.\,FD^2}$$

$$= 1-\frac{(\sin^2\tfrac{1}{2}BOC+\sin^2\tfrac{1}{2}COA-\sin^2\tfrac{1}{2}AOB)^2}{4\sin^2\tfrac{1}{2}BOC.\sin^2\tfrac{1}{2}COA}$$

mithin

$$4\sin^2\tfrac{1}{2}BOC.\sin^2\tfrac{1}{2}COA.\sin^2\tfrac{1}{2}AOB = 4\sin^2\tfrac{1}{2}BOC.\sin^2\tfrac{1}{2}COA$$
$$-(\sin^2\tfrac{1}{2}BOC+\sin^2\tfrac{1}{2}COA-\sin^2\tfrac{1}{2}AOB)^2$$

oder

$$\frac{ABC}{16(\varrho+\alpha)^2(\varrho+\beta)^2(\varrho+\gamma)^2} = \frac{AB}{4(\varrho+\alpha)(\varrho+\beta)(\varrho+\gamma)^2}$$
$$-\frac{1}{16}\left\{\frac{A}{(\varrho+\beta)(\varrho+\gamma)}+\frac{B}{(\varrho+\gamma)(\varrho+\alpha)}-\frac{C}{(\varrho+\alpha)(\varrho+\beta)}\right\}^2$$

woraus nach gehöriger Reduction:

$$\varrho^2(A^2+B^2+C^2-2AB-2BC-2CA)$$
$$-2\varrho[A\alpha(B+C-A)+B\beta(C+A-B)+C\gamma(A+B-C)]$$
$$+A^2\alpha^2+B^2\beta^2+C^2\gamma^2-2A\alpha B\beta-2B\beta C\gamma-2C\gamma A\alpha+ABC=0$$

welche Quadratgleichung sich sehr bequem lösen lässt, wenn man nur beachtet, dass

$$A^2+B^2+C^2-2AB-2BC-2CA$$
$$=-4\{a^2(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)+b^2(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)+c^2(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)+4J^2\}$$
$$=4[(S-A)^2-BC]=4[(S-B)^2-CA]=4[(S-C)^2-AB]$$
$$=-4[(S-B)(S-C)+A(S-A)]=-4[(S-C)(S-A)+B(S-B)]$$
$$=-4[(S-A)(S-B)+C(S-C)]$$
$$=-2[A(S-A)+B(S-B)+C(S-C)].$$

Das zweideutige Zeichen der Wurzel giebt nicht nur den Radius des Kreises, der die gegebenen Kreise auswendig, sondern auch inwendig berührt. Setzt man α negativ, so hat man den Fall, dass der Kreis A auswendig oder inwendig, die beiden andern B und C dagegen inwendig oder auswendig berührt werden, u. s. w.

Amsterdam, den 29. Januar 1876.

Prof. Dr. C. J. Matthes.

3.

Planimetrischer Lehrsatz.

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Ueber seinen Seiten sind unter sich ähnliche Dreiecke so hergestellt, dass ihre Spitzen A_1, B_2, C_3 nach aussen fallen und dass an anstossenden Ecken gleiche Winkel liegen. Für diese Dreiecke sind die umschriebenen Kreise K_1, K_2, K_3 bestimmt.

Die Kreise K_1, K_2 mögen sich in P schneiden, P werde mit sämmtlichen Ecken verbunden, dann ist in Sehnenvierecken

$$\angle BPC = 2R - \alpha$$
$$\angle CPA = 2R - \beta$$

somit $\angle APB = \alpha + \beta$ und

$$\angle AC_3B + \angle APB = \alpha + \beta + \gamma = 2R,$$

folglich liegt P auf K_3.

D i e d r e i K r e i s e K_1, K_2, K_3 s c h n e i d e n s i c h a l s o i n e i n e m P u n k t P.

Ferner ist

$$\left.\begin{array}{l} \angle APB_2 = \gamma \\ \angle B_2PC = \alpha \\ \angle CPA_1 = \beta \end{array}\right\} \text{ je als Peripheriewinkel auf demselben Bogen}$$

$\angle APA_1 = \alpha + \beta + \gamma = 2R$ d. h. APA_1 ist e i n e gerade Linie; das Nämliche lässt sich analog von BPB_2, CPC_3 zeigen.

D u r c h j e n e n P u n k t P g e h e n d i e d r e i V e r b i n d u n g s - l i n i e n d e r S p i t z e n A_1, B_2, C_3 m i t d e n g e g e n ü b e r l i e g e n d e n E c k e n A, B, C d e s G r u n d d r e i e c k s.

Nach dem Ptolemäischen Lehrsatze hat man

$$a_1 . PA_1 = b_1 . PB + c_1 . PC$$
$$b_2 . PB_2 = c_2 . PC + a_2 . PA$$
$$c_3 . PC_3 = a_3 . PA + b_3 . PB$$

Ist nun

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 = a_3 : b_3 : c_3 = 1 : m : n \quad (= \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma)$$

so folgt

$$PA_1 = m . PB + n . PC$$
$$m . PB_2 = n . PC + PA$$
$$n . PC_3 = PA + m . PB$$

oder

$$AP + PA_1 = m(BP + PB_2) = n(CP + PC_3) = PA + m.PB + n.PC$$

d. h. 1) $AA_1 = m.BB_2 = n.CC_3 = PA + m.PB + n.PC$

Jene drei Verbindungslinien verhalten sich umgekehrt wie diejenigen Seiten eines der drei ähnlichen Dreiecke, von deren Endpunkten sie nicht ausgehen (oder umgekehrt wie die sinus der Winkel an den Spitzen, von denen die Verbindungslinien ausgehen).

Die Beziehungen 1) kann man schreiben

$$2)\quad \left.\begin{aligned} AA_1 &= \frac{1}{a_n} S_n = \frac{1}{\sin\alpha} S \\ BB_2 &= \frac{1}{b_n} S_n = \frac{1}{\sin\beta} S \\ CC_3 &= \frac{1}{c_n} S_n = \frac{1}{\sin\gamma} S \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & S_n = a_n.PA + b_n.PB + c_n.PC \\ & \qquad n = 1,\ 2,\ 3 \\ & S = PA\sin\alpha + PB\sin\beta + PC\sin\gamma \end{aligned}$$

Bemerkenswert ist der Fall, dass jene drei Dreiecke gleichseitige sind.

Fällt P ausserhalb des Grunddreiecks ABC, so erleidet der obige Beweis unwesentliche Modificationen.

Brieg a. O., März 1877.

E. Engelbrecht,
cand. math.

Litterarischer Bericht
CCXXXVII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicate da B. Boncompagni. Tomo IX. fasc. 1—6. Roma 1876. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt der ersten Hälfte des 9. Bandes ist folgender. Januar. Federico Napoli: Ueber das Leben und Arbeiten des Francesco Maurolico (geb. d. 16. Sept. 1494. in Messina, gestorben d. 21. Juli 1575.) Ungedruckte Schriften desselben. Februar. Fortsetzung. März. Eduard Lucas: Ueber ein Theorem der indischen Arithmetik. — A. Favaro: Bericht über „Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Eine historisch-mathematische Untersuchung von Dr. Moritz Cantor. Leipzig 1875. Teubner.“ — Moritz Cantor: Bericht über „Die Rechenkunst im sechszehnten Jahrhundert. Von A. Kuckuck. Berlin 1874. Weidmann.“ — B. Boncompagni. Ueber ein Lehrbuch der Arithmetik von Johannes Widmann von Eger (Leipzig 1489. Kacheloffen.) April. Brief des Prof. F. Brioschi an D. B. Boncompagni: Ueber das Problem der Tautochronen. — Sigmund Günther. Note über Johann Andreas von Segner, Begründer der mathematischen Meteorologie (geb. d. 9. Oct. 1704. zu Presburg in Ungarn, gestorben d. 5. Oct. 1777.) — Mai. Alfonso Sparagna. Italienische Uebersetzung von Hermann Hankel's „Historische Uebersicht des Entwickelungsganges der neueren Geometrie“ (Einleitung zu den Elementen der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung. Leipzig 1875. Teubner.) — Alfonso Sparagna. Italienische Uebersetzung einer

Schrift von Wilhelm von Zahn: „Einiges zum Andenken an Hermann Hankel.“ (Clebsch Ann. VII. p. 583.) — Verzeichniss der Arbeiten von Hermann Hankel. — Juni. Paul Mansion. Französische Uebersetzung von Felix Klein's Notiz über das Leben und die Arbeiten von Otto Hesse (Bericht über die k. Polytechnische Schule zu München für das Studienjahr 1874—1875. p. 46.) — Alfonso Sparagna. „Italienische Uebersetzung eines Artikels aus der Posener Zeitung: „Copernicus in Italien.“ — Alfonso Sparagna. Italienische Uebersetzung eines Artikels aus der Ermländischen Zeitung: „Copernicus in Bologna“ von F. Hipler. — Publicationsverzeichnisse stehen im 2., 4. und 6. Heft.

Besonders herausgegeben sind von den genannten Schriften Favaro's Uebersetzung von Cantor's Schrift über die römischen Agrimensoren, und Brioschi's Bericht über die Tautochronen. Ausserdem sind an Artikeln aus dem vorigen Bande besondere Ausgaben erschienen von C. E. Sédillot's Briefen über L. Am. Sédillot's Leben und Arbeiten, und von Bèziat's Schrift über das Leben und die Arbeiten von Johannes Hevelius. H.

Methode und Principien.

Elemente der absoluten Geometrie. Von Dr. J. Frischauf, Professor a. d. Universität Graz. Leipzig, 1876. VI. B. G. Teubner. 142 S. 8⁰.

In einer nicht sehr lange hinter uns liegenden Periode liebten es mathematische Schriftsteller, deren Schriften in einem gerade schwebenden wissenschaftlichen Streite eine Verständigung anzubahnen bestimmt waren, dem Titel die Worte „zum ewigen Frieden“ oder dgl. beizusetzen. Das vorstehend genannte Buch besitzt keinen solchen Aushängeschild, verfolgt aber nichts destoweniger einen ausgesprochen irenischen Zweck. Es soll in kurzer möglichst elementarer Form die Gesammtheit der Fragen behandeln, auf welche seit den letzten achtzig Jahren die das Parallelenaxiom studirenden Forscher sich hingeführt sahen, und solchergestalt einen Ausgleich zwischen den noch vielfach einander unvermittelt gegenüberstehenden principiellen Anschauungen wenigstens fördern helfen. Wie sich hieraus ergiebt, steckt sich der Verfasser hier ein bedeutend weiteres Ziel als in seiner 1872 im gleichen Verlage erschienenen Bearbeitung des Bolyai, aber davon abgesehen haben die beiden Werkchen viel Gemeinsames, und alle Vorzüge, welche die klare Darstellungweise des Autors dem letztgenannten verlieh, findet man in seinem neuesten Producte wieder, über welches wir nunmehr eingehend referiren wollen.

Das erste Buch (S. 1—20) ist betitelt: „Voraussetzungen und Grundgebilde.“ In einer an das Verfahren der aristotelischen Logik erinnernden Weise werden die Grundbegriffe des Körpers, der Fläche, der Linie und des Punktes gewonnen, an welche sich weiter die Begriffe der „umkehrbaren“ Fläche, der congruenten und flächengleichen Gebilde anreihen. Zur Eruirung dieser Facta, sowie gewisser einfacher Sätze, s. z. B. dass die einen zusammenhängenden Körper einmal schneidende unbegrenzte Linie diess in einer paaren Anzahl von Punkten tun muss, bedurfte es keiner Axiome oder Hypothesen. Nachdem alsdann der Unterschied zwischen „unbegrenzt“ und „unendlich“ bestimmt und deutlich formulirt ist, wendet sich der Verf. zur Bestimmung derjenigen Gebilde dritter, zweiter und erster Ordnung, welche in einem philosophisch richtigen Sinne als fundamentale bezeichnet, d. h. lediglich mit Zuhülfenahme der bereits namhaft gemachten Voraussetzungen erhalten werden können. Bekanntlich betrachtet man als solche Kugel, Kugelfläche und Kreislinie, und aus ihnen müssen sich alsdann die fälschlich als ursprünglich angesehenen Begriffe der Ebene und Geraden deduciren lassen, eine Idee, welche Herr Frischauf mit sehr anerkennenswerter fides historica auf Leibnitz, der sie zuerst ausgesprochen, zurückführt. Diese Deduction kann nun bekanntlich auf verschiedene Arten vorgenommen werden, wie uns u. a. die Methode Deahna's und die neuerlich von J. Becker im 20. Jahrgang der Schlömilch'schen Zeitschrift auseinandergesetzte dartun; Frischauf stellt sich, wie diess von dem Verehrer des grossen Ungarn nicht anders erwartet werden durfte, auf den von Bolyai (und auch Lobatchewsky) vertretenen Standpunkt, d. h. er betrachtet zwei unendliche Kugelschaaren und definirt die von den Durchschnittslinien je zweier gleicher Individuen dieser Systeme erfüllte Fläche als die Ebene. Durch eine sehr naheliegende kinematische Betrachtung überzeugt man sich, dass es Linien giebt, welche durch zwei Punkte unveränderlich bestimmt sind: die Geraden. Nunmehr lassen sich die Definitionen Dreick, ebener und Flächenwinkel (hier Keil genannt) in correcter Form geben, und nicht minder leicht ergiebt sich der Specialfall des rechten Winkels. Nachdem noch einige elementare Lehrsätze betreffs des Senkrechtstehens von Linien und Ebenen bewiesen worden sind, endet das erste Buch.

Es sei uns gestattet, ehe wir in unserem Berichte fortfahren, zu dem Bisherigen einige Bemerkungen nachzutragen. Den Unterschied zwischen Gebilden, welche ohne Ende und denen, welche ohne Grenze sind, einen Unterschied, dessen Vernachlässigung so viele Inconvenienzen mit sich gebracht hat, definirte allerdings erst Riemann unter den Neueren mit der nötigen Präcision, allein es scheint doch schon dem Aristoteles, als er im dritten Buche seiner Physik Untersuchungen

über das ἄπειρον anstellte, eine Ahnung des wahren Sachverhalts vorgeschwebt zu sein. — Die Art und Weise, wie Bolyai die Ebene als das zweien Kugelschaaren Gemeinschaftliche auffasst, ist ohne Zweifel eine höchst geistreiche, allein der Gedanke Deahna's, welcher lediglich mit einer einzigen Kugel operirt, möchte vielleicht doch zu einwurfsfreieren Resultaten führen, als jener erst besprochene. Man wird sich nämlich fragen können und müssen, ob jene Durchschnittscurven eine wirklich continuirliche Reihe bilden oder nicht doch vielleicht in jener Aufeinanderfolge Lücken vorhanden sein könnten*). Dieses Bedenken wird sich wohl nur durch phoronomische Betrachtungen beseitigen lassen, wie solche bei Deahna, Becker und Worpitzky (diese Zeitschr. 55. Band) vorkommen.

Das zweite Buch ist „unendlicher Raum“ überschrieben und behandelt in seinem ersten Abschnitte (S. 21—33) „Parallelen-Axiom und euklidische Geometrie.“ Hier weist der Verf. zunächst nach, wie weit man mit Hülfe der im ersten Buche normirten Principien gelangen könne, es wird in sehr übersichtlicher Weise gezeigt, dass die Winkelsumme des ebenen Dreiecks 180° nicht übersteigt und dass, wenn sie in irgend einem beliebigen Dreiecke diesen Wert genau erreiche, das Gleiche für ein jedes gelte. Bis hierher bewegt sich die Darstellung, wie man sieht, gänzlich im alten Geleise. — Nun aber muss naturgemäss die erste — in gewissem Sinne auch einzige — Abweichung erscheinen. Da wir nämlich ohne Einführung eines neuen Grundsatzes planimetrisch nie zu erweisen im Stande sind, dass durch einen bestimmten Punkt nur eine einzige eine gegebene Gerade nicht schneidende gerade Linie gezogen werden könne, so machen wir die andernfalls einzig übrig bleibende Annahme, es gäbe für einen gegebenen Punkt und eine gegebene Gerade drei Schaaren von Geraden, nämlich nichtschneidende Gerade (der Anzahl nach ∞), schneidende Gerade (für die das Nämliche gilt) und (2) parallele Gerade, welche zwichen den ersten beiden Kategorien mitten inne liegen. Eine auf dieser Basis erbaute Geometrie ist widerspruchsfrei in logischem Sinne**); es ist die nichteuklidische Geometrie, welche Gauss ahnte,

*) Herr Hoüel in Bordeaux, welchem wir besonders die Hinweisung auf en misslichen Punkt der Bolyai'schen Ertwickelung verdanken, hatte die Güte, uns noch weiter die Mitteilung zu machen, dass der durch seine Studien auf dem Felde der abstracten Raumlehre bekannte belgische Artillerieoffizier de Tilly seit längerer Zeit damit umgeht, dem Verfahren Bolyai's die ihm noch abgehende Beweiskraft zu erteilen. Es lässt sich wohl die Frage aufwerfen, ob eine derartige Modification auch mit der unumgänglichen Oekonomie der Voraussetzungen verträglich sein werde.

**) Wir nennen die abstracte Raumlehre mit Absicht widerspruchsfrei in einem bestimmten Sinne, denn dass sie nicht die allein widerspruchsfreie ist,

welche Bolyai und Lobatschewsky in's Leben riefen. Der Verf. zeigt noch mit wenigen Worten, durch welche Auskunftsmittel die euklidische Geometrie um die Unbeweisbarkeit des Parallelensatzes herumzukommen suchte, und entwickelt alsdann die Haupttheoreme jener „absoluten" Geometrie. Das zunächst Charakteristische ist hier das, dass der geometrische Ort der von einer Geraden gleichweit abstehenden Punkte eine Curve ist, und dass entsprechend zwei sich nicht schneidende Gerade einen kleinsten Abstand haben müssen. Im Anschluss an Flye St. Marie's Studien wird dann der Nachweis für die schon von Gauss gekannte Tatsache geleistet, dass für das unendlichkleine Dreieck auch in der imaginären Geometrie die Winkelsumme von 180° bestehe, und weiterhin werden die unendlich entfernten Punkte behandelt. Hier hat der Verf. mit gutem Tacte den Punkt besonders hervorgehoben, in welchem sich die nichteuklidische Auffassung mit unserer Raumanschauung berührt, näher sogar, als es die consequente Fortbildung des euklidischen Parallelenbegriffes durch Desargues und die Neueren tun kann. Denn jeder wird sich aus seinem Anfangsstudium erinnern, wie wenig ihm der Eine uneigentliche Punkt der Geraden und dessen geometrischer Ort, die unendlich entfernte Gerade, momentan in den Kopf wollte; v. Staudt ermangelte nicht, sich über diesen Gegensatz gegen die übliche Auffassung, welche die unendlich fernen Punkte unwillkürlich auf einem Kreise anordnet, in seinen Vorlesungen über „Geometrie der Lage" ausführlich zu verbreiten. Diese vulgäre Betrachtungweise deckt sich nun völlig mit derjenigen von Bolyai und Lobatschewsky, denn auch hier hat jede Gerade zwei getrennte Punkte im Unendlichen, welche nur einseitig mit einander in Zusammenhang stehen, d. h. nur, solange man sich im Reellen bewegt. Es hindert nämlich nach Battaglini's verallgemeinernder Formulirung nichts, „diese Punkte durch ein ideales Stück einer Linie zu verbinden, deren Punkte vom Anfang der Zählung durch imaginäre Werte bestimmt sind." Was diess für eine Linie sei, wird nicht ausgesprochen; man wird aber wohl, wenn man aus der von Du Bois-Reymond im 7. Bande der „math. Annalen" angedeuteten Regel nach dem Hankelschen Permanenz-Gesetze consequent weiterschliesst, die

---

davon sind wir fest überzeugt, wie wir denn auch dieser unserer Ueberzeugung in der Note 14 unserer Schrift „Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung" bestimmten Ausdruck gegeben haben. Man kann ja, wie dies neuerlich vielfach geschieht, selbst der Theorie Bolyai's den Vorwurf machen, sie sei noch zu conservativ, man kann das Axiom der Congruenz fallen lassen u. s. f. der Ausdruck „widerspruchsfrei", der jetzt so viel beliebte, ist überhaupt sehr widerspruchsvoll; man mag wohl von der Geometrie der Alten sagen, sie sei unvollkommen, mangelhaft, aber einen Widerspruch hat gewiss noch Niemand in ihr aufzudecken vermocht.

gerade dafür nehmen müssen. — Die nächstfolgenden Paragraphen bringen eine Reihe stereometrischer Sätze, u. a. den Girard'schen über die Fläche des Kugelfläche, und zwar haben dieselben das Gemeinsame, vom Parallelenaxiom durchaus unabhängig zu sein. Erst mit Nr. 50 treten wir an einen ganz neuen Begriff heran, denjenigen der Grenzfläche und der mit ihr verbundenen Grenzlinie. Herr Frischauf hat in diesem Capitel die etwas unbeholfenen Bezeichnungen von Bolyai verlassen und sich sehr mit Recht der weit concinneren Terminologie Lobatschewsky's angeschlossen.

Die Definition der beiden neu eingeführten Gebilde verweilt auch ausführlich bei der Verschiedenheit, welche denselben im Lichte der euklidischen und der nichteuklidischen Geometrie innewohnt, insofern sie nämlich für erstere reell, für letztere dagegen Flächen resp. Linien sind, für welche das anschauliche Substrat fehlt. Als Vermittelung dient das Theorem, dass eine Kugel mit immer wachsendem Radius schliesslich in die Grenzfläche übergeht*) In Paragraph 53 werden die hyperbolischen Functionen eingeführt, deren Bedeutung sich wenige Seiten weiter durch den Lehrsatz manifestirt, dass die in einer bestimmten Distanz p von einer Geraden zu ihr gezogene Parallele mit der Normale den Winkel

$$\Pi(p) = 2 \operatorname{arc} \cot e^{\frac{p}{k}}$$

bildet unter k eine gewisse Constante verstanden; denn nun ist

$$\sin \Pi(p) = \mathfrak{Sec}\frac{p}{k}, \cos \Pi(p) = \mathfrak{Tang}\frac{p}{k}.$$

Durch Betrachtung der Linien und Flächen gleichen Abstandes

*) Es scheint noch nicht wahrgenommen worden zu sein, dass mit Zugrundelegung dieser Tatsache das Parallelenaxiom sich direkt erweisen lässt, und zwar in befriedigenderer Weise, als diess mit Hülfe der von Frischauf auf S. 32 discutirten Voraussetzung Bolyai's geschehen kann. Im 11. Bande des von Battaglini in Rom herausgegebenen „Giornale di Matematiche" hat Referent den hier erwähnten Grundgedanken vollständig durchzuführen gesucht, und wenn er auch persönlich davon überzeugt ist, dass jener Versuch noch mit verschiedenen Mängeln behaftet sei, so möchte er denselben doch jenen Mathematikern, welche in der „absoluten" Geometrie wohl eine gleichberechtigte jedoch nicht die alleinberechtigte Raumlehre erblicken können, zur Einsichtnahme empfehlen. Sobald man die beiden Facta zugiebt, dass die Winkelsumme des Dreicks nur für Ein Individuum fixirt zu werden braucht, sowie dass die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie mit dem Parallelensatz in keiner Relation stehen, kann man auch sofort den Indentitätsnachweis der „Grenzfläche" mit unserer „empirisch gewonnenen" Ebene liefern, wie an jenem Orte gezeigt ward.

gelangt man zu einer wichtigen Verallgemeinerung der nichteuklidischen Geometrie, welche an sich ebensowohl wie der Parallelismus zum Ausgangspunkt hätte genommen werden können: Bleibt in einem recktwinkligen eben Dreieck, dessen spitze Winkel α und β sind, eine Kathete h constant, so ist es auch der Bruch $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \mathfrak{Cos}\,\frac{h}{k}$, nur dass der Wert desselben nicht die Einheit ist. — Alsdann schreitet der Verf. zur Trigonometrie fort; er tut dar, wie man aus den für beide Geometrieen gleichlautenden Formeln der sphärischen Trigonometrie diejenigen der ebenen nichteuklidischen dadurch ableitet, dass man den Radius und die drei Seiten a, b, c des Kugeldreiecks durch die Werte

$$ki,\ \frac{a}{k},\ \frac{b}{k},\ \frac{c}{k}$$

ersetzt. Frischauf lehrt dann die solchergestalt erworbenen Formeln in diejenigen umsetzen, welche bei Lobatschewsky an ihrer Stelle stehen und dadurch einen ehrwürdigen Charakter erhalten haben. Zum Schluss dieses rein theoretischen Abschnittes wird dann noch der früher durch directes Raisonnement erhärtete Satz von der Identität der Geometrieen von Euklides einer- und von Bolyai-Lobatschewsky andererseits auf trigonometrischem Wege hergeleitet und daran noch eine kurze vergleichende Synopse beider Disciplinen geknüpft. — Von Seite 68—100 treffen wir auf eine reiche Sammlung von Anwendungen der bisher vorgetragenen Lehren. Diesen Teil betrachten wir als besonders dankenswert, denn wenn uns auch bisher durch Anszüge und Bearbeitungen Gelegenheit geboten war, die Principien der neuen Raumwissenschaft kennen zu lernen, so war man doch ohne alle Hülfsmittel, wenn man sich praktisch in dieselben einleben wollte. Hier tritt unser Werk fördernd ein, indem es uns in zusammenhängender Darstellung die gesammte Metrik der nichteuklidischen Geometrie vor Augen stellt. Auf Einzelheiten können wir uns hier natürlich nicht einlassen; für den Liebhaber ähnlicher Untersuchungen aber sei bemerkt, dass die Arbeiten von Réthy im 58. und A. von Frank im 59. Bande dieses Archives noch weiteres Material darbieten.

Im dritten Buche wird abgehandelt: „Endlicher Raum und absolute Geometrie“ (S. 101—142). Erforderten die beiden ersten Bücher fast ausschliesslich nur ganz elementare Kenntnisse, so kann es hier, wo zu den neuesten und feinsten Forschungen der Neuzeit der Zugang eröffnet werden soll, ohne höhere Rechnung natürlich nicht abgehen; wer aber auch nur einmal ein Compendium des Differential- und Integralcalculs gelesen hat, wird bei der leicht hinfliessenden Entwickelung des Autors kaum irgendwo Anstoss nehmen können. —

Derselbe giebt uns zunächst die Hauptsätze der Sphärik, so jedoch, dass der Mittelpunkt der Kugel nicht erwähnt werden darf und die reine Flächeneigenschaft jener zu Tage trete*). Hierauf folgt die „Planimetrie des endlichen Raumes“, d. h. die Sphärik im Gewande der planimetrischen Terminologie und die in den Artikeln 104, 105 eine allgemein gehaltene Untersuchung über den Begriff „absolute Geometrie.“ Der Verfasser gelangt betreffs des gegenseitigen Verhältnisses der bisher in's Auge gefassten Wissenschaftsformen zu einem Resultate, welches man sich am besten durch nebenstehendes Schema verdeutlichen kann:

Nichteuklidische Geometrie.	Sphärik.
Parameter $\frac{1}{k}$; $k = 0$ ... bis zu ∞.	Parameter $\frac{1}{ki}$; $k = 0$ ... bis zu ∞.

Euklidische Geometrie.

Parameter $\frac{1}{\infty} = 0$.

Obwol sonach scheinbar nichteuklidische und Kugel-Geometrie als coordinirte Disciplinen von identischem Wertvorrat sich gegenüberzustehen scheinen und obwol F. Klein auf dieses Verhältniss seine Formulirung einer hyperbolischen und elliptischen Geometrie gegründet hat, so weist Frischauf doch gleichwol nach, dass in exactem Sinne diese Classification nicht stringent sei, insofern die „hyperbolische“, d. h. nichteuklidische Geometrie ja auch die auf die Kugelfläche zu basirende Geometrie als speicellen Fall in sich schliesst.

Nachdem dann noch erläutert ist, was man sich unter der Projectivität von Punktreihen und Strahlenbüscheln zu denken habe und dass, wie Klein gezeigt, Projectivität und Parallelismus zwei ganz disparate Begriffe seien, wendet sich S. 110 unsere Vorlage zur „Versinnlichung der Geometrie“. Es handelt sich nämlich darum, ob nicht ebenso, wie die (imaginäre) Planimetrie des endlichen Raums sich mit der Sphärik deckt, so auch Flächen angegeben werden können, deren Geometrie der nichteuklidischen entspräche. Um hierüber in's Klare zu kommen, wird vorerst der Begriff der Flächenbiegung klargestellt und durch Rechnung dargetan, dass zwei in entsprechenden Punkten das gleiche Krümmungsmass aufweisende Flächen durch Biegung in einander übergeführt werden können. Hiebei hätten wir nur den ein wenig unvermittelt auftretenden Begriff des Krümmungsmasses

*) Vom pädagogischen Standpunkte aus sei hiebei auf den hübschen Beweis für die Flächengleichheit symmetrischer Kugeldreiecke aufmerksam gemacht, da derselbe nur von den allereinfachsten Hülfsmitteln Gebrauch macht.

etwas motivirt gewünscht, da dem Anfänger sonst die darauf begründeten Rechnungen nicht recht einleuchten möchten. Weiterhin lehrt ein sehr einfacher Calcul, dass das ebene Dreieck der Bolyaischen Geometrie einem aus drei geodätischen Linien einer constant negativ gekrümmten Fläche gebildeten Dreieck durchaus äquivalent sei, und diese Identität wird dann sowol durch Reflexion als durch Analyse noch weiter begründet. Frischauf geht dabei auch über die von ihm zu Grunde gelegten mustergültigen Aufschlüsse Beltrami's in einigen Punkten hinaus, indem er zeigt, wie sich durch unmittelbare Uebertragung die Figuren, welche man auf der Fläche vom constanten Krümmungsmass $\left(-\frac{1}{k^2}\right)$ construirt hat, in diejenigen der nichteuklidischen Plaumetrie umsetzen.

Den Schluss des Werkes (S. 120—133) bildet eine vereinfachte Darlegung von „Riemann's und Helmholtz's Raumtheorien". Wir erhalten hier zuvörderst eine in verständlichster Sprache gegebene Popularisirung der bekanntermassen sehr unlesbar geschriebenen Habilitationsschrift Riemann's, nachher wendet sich der Verf. zu der nicht minder bekannten Abhandlung von Helmholtz, welche im Gegensatze zu jener vom Besonderen zum Allgemeinen aufsteigt und aus der Annahme der Bewegungslehre die von Riemann für das Linienelement im allgemeinen Raume hypothetisch angenommene Form als die absolut richtige erschliesst. Die hiezu dienlichen analytischen Betrachtungen werden, was nur zu billigen ist, in extenso mitgeteilt. Nachdem demgemäss festgestellt ist, dass die Theorie allgemeiner, räumlicher Mannigfaltigkeiten nur das anschauliche Substrat einer Theorie der homogenen quadratischen Differentialausdrücke erster Ordnung vorstellt, wendet der Verf. die gewonnenen Resultate auf den speciellen Fall der Beltrami'schen (pseudosphärischen) Räume an. Sind zwei Punkte im n-Dimensionen-Raum von constant-negativer Krümmung $\left(-\frac{1}{k^2}\right)$ durch ihre Coordinaten $x^0 \ldots x_n^0$ und $x \ldots x_n$ gegeben, so findet sich deren Distanz ϱ durch die Gleichung $(a^2 = \Sigma x_i^2)$

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{\varrho}{k} = \frac{x^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \ldots - x_n x_n^0}{\sqrt{(a^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2)(a^2 - x_1^{02} - \ldots - x_n^{02})}}$$

Diese Relation ist von hoher Bedeutung. Herr Frischauf kommt nämlich, indem er sich fortwährend an Beltrami's Vorarbeit anschliesst, noch einmal auf seine oben bereits erwähnten damals aber blos mit logischen Schlüssen gestützte Behauptung zurück, dass die „in manchen Kreisen gehegte Ansicht von der Selbstständigkeit der drei Formen der Geometrie" unrichtig sei. Durch Identificirung des obigen ϱ mit einer Constanten geht nämlich der obige Raum von n Dimensionen

in einen solchen von $(n-1)$ Dimensionen über, der eben den geometrischen Ort aller durch jene Annahme festgelegten Punkte repräsentirt. Dieser Raum von $(n-1)$ Dimensionen hat das constante negative Krümmungsmass $\left(-\frac{1}{k_0^2}\right)$ oder auch, wenn man will, das constante positive $\left(\frac{1}{k^2}\right)$, wofern nur k und k_0 durch die Relation

$$k = k_0 \mathfrak{Sin}\frac{\varrho}{k_0}$$

verknüpft sind. Demnach ist offenbar „der Raum constanter positiver Krümmung im Raum constanter negativer Krümmung enthalten", und es ist schwer begreiflich, wie F. Klein nach dem auf S. 575—579 seines Aufsatzes in den „math. Annalen" (Band 4) gegebenen Resumé seine Ausdrücke „durch Einen Schritt" in diejenigen Beltrami's übergehen lassen will. Dieser chevalereske „Schritt" würde sich im Versuchsfalle zu einem ziemlichen salto mortale auswachsen und bleibt deshalb besser ungetan.

Nun noch ein Wort von den sechs Anhängen. Der erste behandelt kurz die Winkelsumme verschwindender Dreiecke, der zweite giebt eine kurze Uebersicht über die hyperbolischen Functionen, der dritte zeigt einen Weg, von einer Grundformel aus zu allen Theoremen der sphärischen Trigonometrie zu gelangen. Der vierte setzt die bekannt gewordene Idee Lobatschewsky's auseinander, aus astronomischen Beobachtungen die „Erlaubtheit" der euklidischen Geometrie herzuleiten. Für diesen Excurs sind wir dem Verf. besonders dankbar; denn so oft von jener extravaganten Idee gesprochen wird, so wenig erfährt man etwas über die Art und Weise ihrer Realisirung, welche durch ihre sonderbare Verquickung des parallaktischen mit dem zum Kriterium auserschenen Dreieckswinkel brauchbare Aufschlüsse wohl nie liefern kann. An fünfter Stelle finden wir einen analytischen Hülfssatz, an sechster endlich eine Bestimmung der Gleichungen einer Kürzesten im allgemeinen Raume; da sich dieselbe der Variationsrechnung bedient, dürfte dieser Passus als der einzige für Anfänger transscendente des ganzen Buches angesehen werden.

Wenn wir über dieses ein Gesammturteil fällen sollen, so müssen wir zunächst lobend die Enthaltsamkeit anerkennen, welche sich der Verf. in der Einmischung allgemein-philosophischer Betrachtungen auferlegt hat. Aus diversen Andeutungen lässt sich ja wol abnehmen, dass derselbe ebenfalls ein Anhänger der neueren empiristischen Schule ist, aber in den Vordergrund hat derselbe diese doch immer persönliche Ansicht nirgendwo gestellt; er giebt uns lediglich mathematische unwiderlegllich feststehende Tatsachen und überlässt es dem Einzelnen,

sich mit denselben vor dem Fornm der philosophischen Ranmlehre auseinanderzusetzen. Durch diese strenge Scheidung der rein geometrischen von der metaphysischen Seite wird dem conciliatorischen Charakter des Werkes entschiedenster Vorschub geleistet, indem nun auch Leute, die aus den mathematischen Vorlagen nicht die Helmholtzschen*) Folgerungen zu ziehen geneigt sind, ersteres ohne alle Störung lesen und benützen können. — Ferner aber möchten wir das Verdienst des Werkchens — abgesehen von der fliessenden und auf kleinem Raume Viel zusammendrängenden Darstellung — hauptsächlich in folgenden drei Punkten suchen: I. Die gründliche und umfassende Beleuchtung all' derjenigen Momente, welche geeignet erscheinen, die nichteuklidische Geometrie den üblichen Auffassungen und Anschauungen so nahe als möglich zu rücken; II. Die Hervorhebung und allseitige Begründung des Umstandes, dass jede ideelle Planimetrie in der auf eine bestimmte reelle Fläche zu gründenden Geometrie ihr naturgemässes Analogon findet; III. Die gelungene Popularisirung der allgemeinen Raumtheorieen von Riemann, Helmholtz und Beltrami — Berücksichtigen wir noch, dass auch der geschichtlichen Entwickelung gebührend Rechnung getragen und von der einschlägigen Fachliteratur ein genügend vollständiger**) Nachweis beigebracht ist, so dürfen wir wol das in allen wesentlichen Punkten correcte***) und in der trefflichen Manier der Verlags-Firma ausgestattete Buch als ein vollkommen zweckentsprechendes bezeichnen und sorgfältiger Beachtung, besonders auch für Lehrerkreise, von ganzem Herzen empfehlen.

---

*) Wir meinen hier einen Aufsatz des berühmten Physiologen, welchen die kürzlich ausgegebenen „popul. wissensch. Vorträg:“ in ihrem dritten Hefte (S. 21—54) bringen. Man wird die Ansichten, welche wir ohen berührten und welche nicht die unsrigen sind, nicht leicht irgendwoanders so vollständig und übersichtlich auseinandergesetzt antreffen.

**) Absolute Vollständigkeit lag nicht im Plane des Autors, der nun zu weiterem Plane anregen will.

***) Es sind durchaus nur kleine nicht sinnstörende Druckfehler zu verzeichnen. S. 7, Z. 21 v. u. l. Uylenbroek st. Uylenbrök; S. 33, Z. 16 v. u. l. C. F. Gauss st. C. J. Ganss; S. 73, Z. 11 v. o. ist der Factor $\frac{1}{2}$ zu streichen; S. 133, Z. 10 v. o. fehlt nach „Raum“ der Zusatz „als Ort im Raum“; S. 137, Z. 6 v. u. st. geometrische l. geocentrische, S. 142, Z. 8 v. u. st. a_2 l. a^2, Z 7 v. u. st. x_n^2 l. x_n^{02}. — S. 25, Z. 15 v. u., S. 27, Z. 13 v. o., S. 30, Z. 3 v. o. sind kleine Accent-Versehen zu verbessern.

München. S. Günther.

Das Grundgesetz der Kraft. Von Carl Mittelacher. St. Petersburg 1875. H. Schmitzdorff. 86 S.

Das Buch lässt sich trotz einiger Eigenschaften, die man ihm zum Vorteil anrechnen kann, doch nur den zahlreichen Erzeugnissen der Neuzeit zuzählen, welche man wol am besten mit dem Namen „kosmische Phantasien“ kennzeichnet. Untersuchung ist darin nicht enthalten; es werden nur fremde Lehren ohne Kritik vorgetragen, aus denen sich der Verfasser eine Weltanschauung zusammengesetzt hat. Diese mag ihm in genügenden Connex zu stehen scheinen; wieviel an exacter Auffassnng in den elementarsten Begriffen noch fehlt, ist ihm unbewusst geblieben. Er spricht von Kräften als Ursache der Bewegung, weiss also nichts davon, dass nur die Veränderung der Bewegung, nicht die existirende Bewegung von Kräften bewirkt wird. Dies betrifft nicht eine einzelne Aeusserung, sondern charakterisirt den Standpunkt mangelhafter Entwickelung, der sich durch die ganze Schrift kund giebt. Wie der Grundbegriff, welcher das eigentliche Thema bildet, so bleiben die übrigen im Dunkeln. Was die Schrift vor ihresgleichen noch etwa auszeichnen möchte, ist der auf vielseitige Grundlegung verwandte Fleiss und das Verweilen bei jedem Punkte, den sie bespricht, Eigenschaften die wol bei weniger principiellen und weitgreifenden Fragen wie die gegenwärtige bessere Leistungen versprochen haben würden. H.

Litterarischer Bericht
CCXXXVIII.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Theoria derivatarum altiorum ordinnm. Scripsit **Gustavus Steinbrink**, Dr. phil. Berolini 1876. Calvary et C. 4°. 49 S.

Die Schrift steht iu engster Beziehung zu den 2 Schriften: R. Hoppe, Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialqnotienten. Leipzig 1845. nnd O. Schlömilch, Zur Theorie der höheren Differentialquotienten. Sitzungsber. d. Kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. 1857. (Zeitschrift für Math. u. Phys. III. 1858.). Sie verwertet die in ersterer vorgefundenen Principien und Methoden und die iu letzterer enthaltenen erweiterndeu Gedanken in vielseitigster Weiso und gelaugt zu einer wesentlichen Fortbilduug der Theorie. Vor jeder näheren Betrachtung ist eine einzeln stehende, eclatante Unwahrheit zu berichtigen. Der Verfasser sagt auf erster Seite iu einem Relativsatz, als ob es eine Sache ohne Belang wäre, Hoppe habe vergeblich versucht die Coefficienten der Facultäten zu eutwickeln. Er hat also das 11te, 13te, 19te Capitel der Th. d. indep. Darst. geleseu, wo die bezeichnete Aufgabe, über deren Identität kein Zweifel sein kann, da er sie bei seiner eigenen Behandlung eben so nennt, uutersucht wird. Hier ist aber von dieser Aufgabe überall als von einer gelösten die Rede, und die Lösuug steht in vollständig entwickelter Form, zuerst auf Seite 92. als Summe einer zweifachen, dann Seite 99. Gl. (42) einer dreifachen, eudlich Seite 140. einer einfachen eudlichen Reihe. Es ist daher gar nicht zu verstehen, wie der Verfasser zu seiner Behauptung kommt. Die Darstellung in neuer Form, als Summe einer Doppelreihe, welche er findet, verdient dagegen volle Anerkennung.

Ebenso wie in den citirten Schriften, handelt es sich auch hier um Bestimmung der Coefficienten u in der Relation

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \overset{n}{u_k} \frac{\partial^k z}{\partial y^k}$$

wo die u nur von der Beziehung zwischen x und y abhängig sind. Ihr stellt der Verfasser (nach Schlömilch's Vorgang) die inverse Entwickelung

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \overset{n}{v_k} \frac{\partial^k z}{\partial x^k}$$

an die Seite. Er macht darüber die sehr augenfällige Bemerkung, dass die Bestimmung der v nicht wie Schlömilch sie darstellt, eine neue Aufgabe, sondern in ihrer Allgemeinheit genau dieselbe sei wie die der u. Dagegen erweist sich die Beziehung zwischen den u und v, nämlich

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overset{n}{u_k} \overset{k}{v_m} = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \tag{26}$$

äusserst ergiebig. Der Weg, auf welchem der Verfassser dazu gelangt die u auf die v zurückzuführen, so dass also z. B. zur Lösung der Aufgabe für $f(\log x)$ nur die gleiche für $f(e^x)$ erforderlich ist, hat ohne Zweifel ein genügendes Interesse um ihn hier zu reproduciren. Dies möchte wol um so mehr geboten erscheinen, als der Leser der Urschrift Mühe haben würde den Faden der Deduction dieses besondern, aber wichtigsten Resultats zwischen den sich viel weiter ausdehnenden Transformationen herauszufinden. Im voraus sei bemerkt, dass der Verfasser viele Resultate der citirten Schrift auf verschiedenem Wege wiedergewinnt, die hier aus gemeinsamer Quelle fliessen, dass demnach die bei der Reproduction gebrauchten Citate, welche längere Erklärungen ersparen sollen, von ihm nicht zu Hülfe genommen sind. Aus der Leibnitz'schen Formel für den $n$ten Differentialquotienten eines Products zweier Factoren geht leicht die allgemeine Gleichung hervor:

$$\sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1} \frac{\partial^{n-k} \psi^{-n}}{\partial \eta^{n-k}} (k)_m \frac{\partial^{k-m} \psi^m}{\partial \eta^{k-m}} = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \tag{55}$$

Der in Hoppe's Th. d. indep. Darst. d. h. D. Seite 39. Gl. (6) gegebene Ausdruck von $\overset{n}{u_k}$ lässt sich auf die v angewandt schreiben:

$$\overset{n}{v_k} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial^n X^k}{\partial \eta^n} \right)_{\eta=0} \tag{34}$$

wo $x=\psi(y)$; $X=\psi(y+\eta)-\psi(y)$ gesetzt ist. Sei nun $X=\eta\Psi$; dann findet man:

$$\left(\frac{\partial^n X^k}{\partial\eta^n}\right)_{\eta=0}=(n)_k k!\left(\frac{\partial^{n-k}\Psi^k}{\partial\eta^{n-k}}\right)_{\eta=0} \tag{36}$$

und die vorige Gleichung wird nach Wechsel der Buchstaben:

$$\overset{k}{v}_m=(k)_m\left(\frac{\partial^{k-m}\Psi^m}{\partial\eta^{k-m}}\right)_{\eta=0} \tag{38}$$

Lässt man also in Gl. (55) η verschwinden, so geht sie über in

$$\sum_{k=1}^{k=n}(n-1)_{k-1}\left(\frac{\partial^{n-k}\Psi^{-n}}{\partial\eta^{n-k}}\right)_0\overset{k}{v}_m=\begin{cases}0 & (m<n)\\ 1 & (m=n)\end{cases}$$

Dies verglichen mit der obigen Gl. (26) beweist, dass

$$\overset{n}{u}_k=(n-1)_{k-1}\left(\frac{\partial^{n-k}\Psi^{-n}}{\partial\eta^{n-k}}\right)_{\eta=0} \tag{69}$$

ist, da beide Grössen durch dasselbe System linearer Gleichungen bestimmt sind. Ferner ist nach H. Th. d. indep. Darst. d. h. D. Seite 162. für $\mu=\nu=0$

$$\frac{\partial^n.z^{-m}}{\partial x^n}=m(m+n)_m\sum_{h=0}^{h=n}\frac{(-1)^k(n)_k}{(k+m)z^{k+m}}\frac{\partial^n.z^k}{\partial x^n}$$

Wendet man dies auf $z=\Psi$ an, lässt η stetig verschwinden, so dass Ψ in $\psi'y=\frac{\partial x}{\partial y}$ übergeht, so erhält man nach Einsetzung in die obige Gl. (69):

$$\overset{n}{u}_k=\sum_{h=0}^{h=n-k}(-1)^h\frac{n(n-1)_{k-1}(2n-k)_n(n-k)_h}{n+h}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n+h}\left(\frac{\partial^{n-k}.\Psi^h}{\partial\eta^{n-h}}\right)_0$$

Geht man jetzt gemäss Gl. (36) von Ψ zurück auf X, so findet man nach gehöriger Zusammenordnung der ganzzahligen Factoren:

$$\overset{n}{u}_k=k(2n-k)\sum_{h=0}^{h=n-k}(-1)^h\frac{(2n-2k)_{n-k+h}}{(n+h)h!}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n+h}\left(\frac{\partial^{n-k+h}X^h}{\partial\eta^{n-k+h}}\right)_0$$

Dies ist die beabsichtigte Formel, welche die höh. Diff. einer zusammengesetzten Function $f(\varphi x)$ auf die der ganzen positiven Potenzen der inversen Function von φx zurückführt. Für $y=\log x$ z. B. wo

$$X=e^y(e^\eta-1)$$

wird, giebt dieselbe:

$$\frac{\partial^n f(\log x)}{\partial x^n} = \frac{1}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} f^{(k)}(\log x) k (2n-k)_k \times$$
$$\sum_{h=0}^{h=n-k} \frac{(2n-2k)_{n-k+h}}{(n+h)h!} \sum_{p=1}^{p=h} (-1)^p (h)_p p^{n-k+h}$$

Offeubar würde man nach derselben Formel auch leicht deu $n$ten Diffq. von $f(\arcsin x)$ und zwar einfacher als von $f(\mathrm{arctg}\, x)$ eutwickeln köunen.

Besouders zn erwähnen ist, dass der Verfasser den Ausdruck

$$\overset{n}{u}_r = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(e^{-ty}\frac{\partial^n e^{ty}}{\partial x^n}\right)\right]_{t=0} \tag{27}$$

eigentlich nur specielles Resultat ans allgemeinem Princip, als Grundformel aufstellt, aus welchem die folgeudeu Formeln hervorgehen, und die zu bemerkenswerten Transformationen Anlass giebt. Den höh. Diffq. der Potenzeu der Functionen wird, wie auch in der citirten Schrift gescheheu, in §. 10. 11. nnd 23. eine besondere Betrachtnng gewidmet; als Resultate sind bemerkenswert die auf Seite 21. unten auf Seite 22. unten gewonnenen Sätze, in §. 23. die Formel (140).

Im ganzen ist die Arbeit, so viel sie auch Vorgefundenes in sich aufgenommen hat, eine durchaus selbständige, mit viel Geschick und Erfolg durchgeführte zu nennen. H.

Das Problem der magischen Systeme. Von Dr. Theod. Hugel, k. Rector der Gewerbeschule zu Neustadt a. d. H. Neustadt a. d. H. A. H. Gottschick n. Witter. 1876. VIII. 48 S. 4°. Mit 12 Figurentafeln.

Der Verfasser, welcher schon früher eiue diesen Gegenstand behandelnde Schrift hat erscheineu lassen, behandelt hier das Problem der magischen Systeme in seiner grösstmöglichen Allgemeinheit. Er betrachtet zuvörderst p^n Zahlen als gegebeu und fordert nun, man solle aus dieser Anzahl eine weitere bestimmte Anzahl von Gruppen zu je p Elementen herausheben, so zwar, dass die Summe dieser Elemeute stets eine bestimmte Zahl repräsentire. Ueber die Anzahl der Gruppen lässt sich erst dann eine den für die Praxis wichtigen Fällen eutsprechende Anordnung treffen, wenn die speciellen Fälle $n=2$ nnd $n=3$ abgehandelt siud. Auf diesen ersten Zahlenwert legt sonach der Verf. mit Recht ein Hauptgewicht.

Ist gegeben das Zahlenqnadrat

$$\begin{matrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} \end{matrix}$$

so hebt man $4p$ Gruppen heraus und verlangt, dass die 4 Gleichungssysteme *)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \vdots \\ i=p}} \sum_{k=1}^{k=p} a_{i,k} = \sum_{\substack{i=1 \\ \vdots \\ i=p}} \sum_{k=1}^{k=p} a_{k,i} = \sum_{\substack{k=1 \\ \vdots \\ k=p}} \sum_{i=1}^{i=p} a_{i,k+i-1} = \sum_{\substack{k=1 \\ \vdots \\ k=p}} \sum_{i=1}^{i=p} a_{i,k-i+1} = \frac{p(p^2+1)}{2}$$

sämmtlich durch ganze Zahlen befriedigt werden sollen. Diese Zahlen sollen vorläufig noch nur aus dem Systeme $1 \dots p^2$ gewählt werden dürfen.

In §. 3 beginnt die Untersuchnng der „Primqnadrate“. Um ein solches zn erhalten, bedient sich der Verf. eines Hülfsmittels, welches allerdings schon von De la Hire erfunden, von Sanvenr und Leonh. Enler vielfältig angewendet wnrde, in seiner principiellen Bedeutung jedoch hier erstmalig erkannt nnd ansgenützt erscheint. Man nehme p Zahlen $A_{1,1} \dots A_{1,p}$, welche mit der Zahlenfolge $1 \dots p$ beziehnngsweise identisch sein müssen, sowie p weitere $\alpha_{1,1} \dots \alpha_{1,p}$, für welche das Gleiche bezüglich der Reihe $0.p$, $1.p$, $2.p \dots (p-1)p$ gilt, und bilde durch $p$maliges Setzen jedes Einzelgliedes zwei Quadrate von resp. p^2 Elementen. Indem man dann homologe Elemente dieser beiden Hülfsquadrate addirt, resultirt das gesuchte magische Quadrat. Es handelt sich also lediglich um die Besetzung der beiden Hülfsqnadrate oder um die Besetznng der „grossen“ nnd „kleinen Formel“ nach Herrn Hugel's Ansdruck. Da von links nach rechts gerechnet die einzelnen Elemente in cyklischer Anordnung auf ein-

*) Die dritte und vierte der angegebenen Gleichnngsfolgen fasst das Problem der magischen Quadrate offenbar allgemeiner, als diess gemeiniglich geschieht. Während nämlich sonst blos von den zwei geometrischen Hauptdiagonalen des Vierecks gefordert wird, dass die ihnen angehörigen Zahlen die bewnsste Summe liefern, gilt diess nunmehr für alle Serien von Elementen, deren Verbindungslinie einer jener Diagonale parallel läuft nnd deren Anzahl (auf beiden Seiten einer solchen) in Summe $= p$ ist. Jene Ausnahmsstellnng der Diagonalen, zu deren Beseitigung v. Pessl (m. vgl. unsere „Verm. Untersuch. z. Gesch. d. Math. Wiss.,“ Leipzig 1876, S. 264 ff.) die Ausdehnung des Problems auf den magischen Cylindermantel schuf, sie ist auch bei Hrn. Hngel vollständig aufgehoben, so dass dessen rein analytische Verallgemeinerung sich mit den geometrischen Motiven v. Pessl's deckt. — Erreicht war diese Generalisirnng halb unbewusst übrigens schon bei mehreren älteren Methoden, so z. B. bei einer derjenigen, welcher wir (im genannten Werke, S. 209) den Namen ihres mutmasslichen Erfinders, des Byzantiners Moschopulos, beilegten.

ander folgen müssen, so handelt es sich speciell nur um den Platz, welchen in jeder einzelnen Horizontalreihe die Elemente $A_{1,1}$ und $a_{1,1}$ einnehmen müssen. Für Primqnadrate entwickelt und beweist der Verf. eine schöne Regel, welche sich folgendermassen kurz fassen lässt. Steht das Element $A_{2,1}$ in der ersten Zeile in der linken Ecke, so gebührt ihm in der 9 ten der

$$[R\left(\frac{1}{p}+\frac{\alpha(q-1)}{p}\right)]\text{te,}$$

wenn R den in jenem Brnche steckenden Rest bezeichnet; und gilt für das Element $\alpha_{1,1}$ das gleiche, so steht dasselbe in der $r$ten Zeile der kleinen Formel am

$$[R\left(\frac{1}{p}+\frac{\beta(r-1)}{p}\right)]\text{ ten}$$

Platz *). Die Zahlen α und β werden hier „magische Determinanten" genannt; sie müssen ganzzahlig, ungleich und $\geqq 0$, $\leqq p$ sein. — Der Verf. leitet auch die Anzahl der möglichen Lösnugen her und studirt auf's Einlässlichste die Veränderungen, welche durch Reihenvertauschnng in den Hülfsqnadraten für das Resultat sich ergeben.

---

*) Ein eingehendes Studium dieses Verfahrens hat uns auch nach einer anderen Seite überraschende Aufschlüsse gegeben. In einer kürzlich erschienenen Mitteilung in der Schlömilch'schen Zeitschrift (21. Band, S. 62.) sprachen wir unser Bedenken darüber aus, ob sich allgemeinste (Gauss'sche) Quadrate mit Doppelelementen für jede ungerade Zellenzahl $(2m+1)^2$ herstellen liessen. Wir halten diess Bedenken jetzt für erledigt; für $(2m+1)$ als Primzahl geht jene Construction immer an, selbst wenn man das Wort Diagonale in dem allgemeinsten (Hugel'schen) Sinne fasst, für ein anderes $(2m+1)$ aber nicht. Um ein Beispiel vorzuführen, sei $p=7$, $\alpha=2$, $\beta=5$; bestimmt man nach der oben mitgeteilten Vorschrift die grosse und kleine Formel und ersetzt zur besseren Veranschaulichung die a und α durch die Buchstaben des grossen lateinischen und kleinen deutschen Alphabetes, so erhält man beim Zusammenziehen das nachstehende Arrangement:

Aa	Bb	Cc	Dd	Ee	Ff	Gg
Fc	Gd	Ae	Bf	Cg	Da	Eb
De	Ef	Fg	Ga	Ab	Bc	Cd
Bg	Ca	Db	Ec	Fd	Ge	Af
Gb	Ac	Bd	Ce	Df	Eg	Fa
Ed	Fe	Gf	Ag	Ba	Cb	Dc
Cf	Dg	Ea	Gc	Fb	Ad	Be.

Dieses Schema genügt den strengsten Anforderungen. Ueber gewisse interessante Nebeneigenschaften desselben behalten wir uns einen Bericht für eine andere Stelle vor.

In §§. 14—16 wird untersucht, wie sich die bisherige Methode modificirt, wenn die Seitenzahl nicht mehr eine Primzahl, sondern ein Product aus solchen ist. Es findet sich, dass für jede der drei Reihenkategorien diese Methode grundsätzlich erhalten bleibt, nur ist der Wertvorrat der „Determinanten" eingeschränkt. Ganz das Gleiche gilt für „geradgerade Quadrate". Der zwanzigste Paragraph lehrt die bereits in §. 14 behandelte Aufgabe noch aus einem anderen Gesichtspunkte angreifen, indem nämlich das Quadrat $(mn)^2$ in m^2 Einzelquadrate von je n^2 Zellen zerlegt gedacht wird; es wird eben hier das in ein System gebracht, was in Einzelfällen bereits Moschopulos und in neuester Zeit englische Mathematiker (Verm. Unters. S. 261 ff.) geübt hatten.

In ein neues und zwar besonders interessantes Stadium tritt die Untersuchung mit §. 21 (Ungeradgerade Quadrate). Während nämlich bei der alten engen Fassung des Begriffes „Diagonale" auch für diesen Fall das Verfahren De la Hire's ausreichte, ändert sich diess in Folge unserer Definition, wie Herr Hugel durch einen scharfsinnigen indirecten Beweis dartut. „Wir sind deshalb" — sagt derselbe (S. 20) — „genötigt, ein vom bisherigen abweichendes Verfahren einzuschlagen, nämlich das der Umschreibung. Dasselbe beruht darin, dass man vorerst die zwei äussersten Horizontal- und Verticalreihen unberücksichtigt lässt und zunächst nur das noch übrig bleibende Quadrat nach der früheren Methode magisch ausfüllt, worauf wir erst zur passenden Ausfüllung des Randes schreiten". Diess Verfahren wird angegeben und damit denn auch der Weg zur Construction allgemeiner Quadrate von $(4p+1)^2$ und $(4p+3)^2$ Elementen gebahnt. Mit einer Reihe netter Aufgaben, welche sich zur Aufnahme in eine — vorläufig allerdings blos wünschenswerte — elementare Aufgabensammlung der Zahlentheorie empfehlen würden, endigt der erste Abschnitt, die Lehre vom magischen Quadrat schlechtweg.

Auf Seite 22 beginnt „der magische Würfel", dessen Behandlung natürlich im Wesentlichen auf die nämlichen Principien zurückgeht. Denkt man sich denselben wieder auf das geometrische Bild von p^3 in Form eines „Raumgitters"

$$
\begin{array}{l}
a_{1,1,1} \; a_{1,1,2} \; \cdots \; a_{1,1,p} \\
\quad a_{1,2,1} \; a_{1,2,2} \; \cdots \; a_{1,2,p} \\
\quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
\qquad a_{1,p,1} \; a_{1,p,2} \; \cdots \; a_{1,p,p} \\
\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
\quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
\qquad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
a_{p,1,1} \; a_{p,1,2} \; \cdots \; a_{p,1,p} \\
\quad a_{p,2,1} \; a_{p,2,2} \; \cdots \; a_{p,2,p} \\
\quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
\qquad a_{p,p,1} \; a_{p,p,2} \; \cdots \; a_{p,p,p}
\end{array}
$$

angeordneten Elementen zurückgeführt, so erkennt man leicht, dass dem Analogiegesetze entsprechend nunmehr

$$3p+3p+p+3p=10p$$

ganzzahlig zu erfüllende Bedingungsgleichungen vorliegen müssen, wenn der Würfel „vollständig magisch" sein soll. Die Behandlung stützt sich wie oben auf zwei Quadrate so jetzt auf drei Hülfs-Würfel, welche bezüglich mit den Zahlen

$$\begin{array}{llll} 0, & p^2, & 2p^2, & 3p^2 \ldots (p-1)p^2, \\ 0, & p, & 2p, & 3p \ \ldots (p-1)p \\ 1, & 2, & 3, & 4 \ \ \ldots p \end{array}$$

ausgefüllt und dann entsprechend zusammengeschoben werden. Für eine Primzahl p werden nun alle irgend beizuziehenden Betrachtungen auf's Erschöpfendste durchgeführt. Wir machen besonders aufmerksam auf den interessanten apagogischen Beweis für das Kriterium, welchem die „Determinanten" α, α', β, β', γ, γ' unterliegen müssen, wenn ein magischer Würfel zu Stande kommen soll. Es muss nämlich die Ungleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & 1 \\ \beta & \beta' & 1 \\ \gamma & \gamma' & 1 \end{vmatrix} \gtrless p$$

bestehen, wo p das bekannte von Crelle eingeführte Symbol bezeichnet. Von §. 31 ab wird die „Permutation des magischen Würfels" gelehrt, d. h. aus einem bereits vorliegenden Würfel durch gesetzmässige Elementen-Vertauschung ein neuer von gleicher Eigenschaft abgeleitet. Für Quadrate hat diese Idee erstmalig Sauveur in seiner inhaltsreichen Abhandlung vom Jahr 1710 durchgeführt. Zum Schluss wird dann noch nachgewiesen, dass und wie man statt dreier Hülfswürfel deren auch beliebig viele verwenden kann — nur sind dann die neu einzuführenden magischen „Determinanten" nicht mehr unabhängig von einander; für je drei zusammengehörige Determinantenpaare δ_1, δ_1', δ_2, δ_2', δ_3, δ_3' muss vielmehr

$$\begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_1' & 1 \\ \delta_2 & \delta_2' & 1 \\ \delta_3 & \delta_3' & 1 \end{vmatrix} \gtrless p$$

sein.

Die letzten Paragraphen der Schrift beschäftigen sich damit, die „magischen Systeme höherer Ordnung" zu studiren, oder, wie wir auch sagen könnten, das Problem der magischen Quadrate auf eine

Mannigfaltigkeit von n Dimensionen anszndehnen. Es ist Herrn Hugel hier gelnngen, eine interessante Beziehung zwischen magischen Quadraten nnd (wirklichen) Determinannten aufzudecken, indem er als Verallgemeinerung der oben angemerkten Sätze die Wahrheit ausspricht, dass zum Bestehen eines magischen Systemes vom allgemeinen Terme $a_{m, m_2 \ldots m_n}$ die Nicht-Erfüllnng der Congruenz

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \ldots & \alpha_{1,n-1} & 1 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \ldots & \alpha_{2,n-1} & 1 \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \ldots & \alpha_{3,n-1} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \alpha_{n,3} & \ldots & \alpha_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p}$$

conditio sine qua non ist, wo jede Reihe der α ein zusammengehöriges System „magischer“ Determinanten bedentet.

Recapituliren wir unsere Aufzeichnungen, so gelangen wir zu folgendem Urteile. In der Lehre von den magischen Quadraten selbst hat der Verf. durch seine universelle Auffassung des Problemes, durch seine — für diese Aufgabe bisher noch vermisste — grundsätzliche Anwendung der Indices und der Congruenz-Symbolik sowie endlich durch seine erschöpfende Behandlung des Hauptfalles (p Primzahl) einen vollständigen Abschluss herheigeführt. Die — bisher nur in schwachen in unserem Buche namhaft gemachten Ansätze vorhandene — Theorie des magischen Würfels hat er nicht minder weit gefördert und vor Allem hat er auch das gewiss nicht zu vernachlässigende anschauliche Moment durch eine Reihe gut gezeichneter Figuren gebührend bedacht. Die Art und Weise, wie hier dio einzelnen den Würfel bildenden „Schichten“ separat dargestellt werden, ist für ähnliche Zwecke sehr zn empfehlen. Was endlich die Verallgemeinerung des Problems für den allgemeinen Index n betrifft, so ist dieselbe durchaus neu nnd offenbar eine Quelle interessanter Detail-Untersuchungen.

Gewünscht hätten wir nur Zweierlei. Es würde dem Gegenstand mehr Relief gegeben haben, wenn gezeigt worden wäre, wie aus den allgemeinen Formeln durch Specialisirung gewisse Methoden unmittelbar fliessen, welche ihrer historischen Stellung oder auch ihrer Eleganz halber von Interesse sind. Und zweitens wäre uns die Anbringung von Ruhepunkten angenehm gewesen; der Calcul des Verf. ist zwar kein schwerfälliger, allein bei einer solchen fortwährend auf Formeln sich stützenden Entwickelung ermüdet der Leser doch leicht, wenn ihm nicht wenigstens wichtige Resultate etwa durch gesperrten Druck gleich signalisirt werden.

Druck, Figurentafeln und typographische Ausstattung sind gleichmässig anerkennenswert. — Wir wünschen dem Werkchen, welches einen von Wenigen gekannten Stoff anregend und interessant behandelt, recht viele Freunde.

München. S. Günther.

Sur la théorie des nombres premiers. Par Éduard Lucas, ancien élève de l'École Normale, agrégé de l'Université. Turin 1876. Imprimerie Royale. 12 S.

Der Verfasser entwickelt eine Reihe von Sätzen in Betreff der 2 Functionen

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad v_n = a^n + b^n$$

unter a, b die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 = Px - Q$$

verstanden, denen zufolge dieselben viele Analogien mit den Functionen Sinus und Cosinus zeigen. Für $P = 1$, $Q = -1$ erfüllen beide Functionen die recurrente Gleichung

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

welche für $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ die gewöhnlich nach Lamé benannte, aber zuerst von Fibonacci definirte Reihe

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

ergiebt. Jene Sätze gestatten dann sehr überraschende Schlüsse auf Zerlegbarkeit in Factoren und den Nachweis von Primzahlen.

H.

Sur le calcul des logarithmes à un grand nombre de figures. Par F. Burnier. Bull. Soc. Vaud. Sc. Nat. XI. p. 147—150.

Das Princip der Berechnung vielstelliger Logarithmen, welches in der Zusammensetzung der gegebenen Zahl aus Factoren von der Form $1 \pm n . 10^{-k}$ besteht, erfand, wie hier angegeben, R. Flower 1774. Die dazu nötige Tafel findet sich in Briggs Arithmetica logarithmica 1624, doch wandte dieser ein weniger einfaches Verfahren an. Von spätern Schriften, die das Verfahren cultivirt haben, erwähnt der Verfasser Hoüel (Tables á cinq décimales), und verweist auf dessen Erklärung, soweit es die Anwendung der Tafeln betrifft. Er selbst hat das Verfahren insofern vereinfacht, als er bei der Zerlegung nur ein-

ziffrige Multiplicationen vollzieht. Die damit verknüpften weiteren Vorteile, wie sie in den Tafeln für 30stellige logarithmische Rechnung von R. Hoppe (Leipzig 1876. C. A. Koch) dargelegt sind, bleiben unbesprochen, namentlich die Bemerkung, dass man durch Abtrennung des ersten Terms der logarithmischen Reihe die Anwendung der Tafeln und die damit verbundene Rechnung um die Hälfte kürzen kann. Auch hat der Verfasser eine Einrichtung der Tafeln auf briggsche statt auf natürliche Logarithmen im Auge, hat also nicht beachtet, wieviel überflüssige Mühe die früheren Bearbeiter sich und den Rechnern dadurch aufgebürdet haben (s. Arch. LVIII. 437.). Nach Erwähnung zweier anderen Tafeln ohne unterscheidende Eigenschaften, deren noch gar manche hätten genannt werden können, bespricht der Verfasser am Schluss die Tafeln von Steinhauser, welche sehr zum Nachteil der Einfachheit immer 3 Ziffern zusammenfasst, insofern deren Anwendung eine Correction erfordert, die Steinhauser nicht bemerkt hat. H.

Versuch einer näherungsweisen geometrischen Darstellung der $\sqrt{\pi}$ (ausgeführt bis auf 6 Decimalstellen). Von R. von Schlensing. Berlin 1876. Weidmann. 17 S.

Der Verfasser construirt 2 Kreissehnen nach empirisch gefundenen Bestimmungen durch je 2 Punkte, deren Längen von $\sqrt{\pi}$ sehr wenig, und zwar entgegengesetzt, differiren, und interpolirt zwischen beiden. H.

Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Von Louis Navier, Mitglied der Akademie, Professor an der polytechnischen Schule in Paris, etc. Mit Zusätzen von J. Liouville. Deutsch herausgegeben und mit einer Abhandlung der Methode der kleinsten Quadrate vermehrt von Dr. Theodor Wittstein, Professor. Vierte Auflage. Hannover 1875. Hahn. 754 S.

Sofern das vorliegende zu einem Lehrbuch für den Anfang des Studiums der Differential- und Integralrechnung bestimmt ist, können die an ein solches zu stellenden Anforderungen nicht unbesprochen bleiben. Dass es denselben nicht genügt, ist augenfällig; der Herausgeber hat es unterlassen diese Frage in den 4 Vorreden zu berühren. Einen so grossen Ruf auch das Buch früher erlangt hat, in den 30 Jahren seit dem Erscheinen der Uebersetzung in erster Auflage ist doch die Zeit gekommen, wo es immer dringender notwendig wird den alten Schlendrian zu beseitigen; wir haben inzwischen bessere Methoden kennen gelernt, und dürfen uns mit einer so mangel-

haften Begründung nicht begnügen, wenn wir irgend Sicherheit in der Anwendung der Analysis bei den Anfängern erzielen wollen. Navier erklärt die unendlich kleinen bloss als kleiner und kleiner werdende Grössen, ohne zu beachten, dass auch $100+\frac{1}{n}$ bei wachsendem n kleiner und kleiner wird, (der Null immer näher kommt,) spricht von da an nicht mehr von Unendlichkleinen, aber sehr oft vom Kleiner- und-kleiner-werden, und weist auch bei Grenzwertbestimmungen immer nur ganz eilig auf letztere Eigenschaft hin. Der Uebersetzer citirt bei einem solchen Falle der Nachlässigkeit (doch wol als Correction) die Carnot'sche Erklärung des Unendlichkleinen; doch diese ist ebenso mangelhaft, nur auf der andern Seite, denn sie lässt wieder die Bestimmung als variabel weg. Auf gleicher Stufe stehen die Deductionen durchweg; ein Massstab strenger Logik lässt sich nirgends anbringen; sie stützen sich auf Sätze, z. B. von unendlichen Reihen, von deren Theorie nirgends die Rede ist, ohne Angabe, wie sie lauten und wo sie bewiesen sind, und wo in der Tat das Angeführte unzureichend ist, u. a. m. Dabei ist der Gang der Herleitungen sehr fern vom einfachsten und verrät wenig Geschick. Bei Entwickelung der Differentiationsformeln für e^x, $\log x$, x^m wird mit der complicirtesten letzten angefangen, während die zweite und dritte leichte Folgen der mit einfachern ersten sind, so dass im Grunde der Weg an den 2 späteren Resultaten vorbeiführt, die dann mit Wiederholung der gleichen Procedur nachträglich gewonnen werden. Bei den Maximis und Minimis und der Curvenlehre geschieht die Entwickelung direct bis auf zweite Ordnung, was ganz unnötig eine für Anfänger schwer verständliche Complication mit sich bringt, während bei successivem Aufsteigen zu den höheren Ordnungen jeder Schritt sehr einfach ausfällt. Von der Integralrechnung brauchen wir nicht besonders zu sprechen; wo in den Principien der Analysis ein so schlechter Grund gelegt ist, kann von hinreichender Begründung der Integralrechnung nicht die Rede sein. Die Klarheit und Leichtfasslichkeit, welche der Uebersetzer an der Navier'schen Darstellungsweise rühmt, reducirt sich, wie man sich zutreffender ausdrückt, auf eine bei Vielen beliebte Oberflächlichkeit. H.

Verschiedene Schriften, Zeitschriften.

Annali di Matematica pura ed applicata. Diretti da F. Brioschi e L. Cremona, in continuazione di quelli già pubblicati dal prof. Tortolini. Serie II. Tomo VI. VII. Milano. Dic. 1873 — ott. 1876. G. Bernardoni.

Der Inhalt des 6. Bandes ist: L. Schlaefli: Ueber den Gebrauch der Linien, längs deren der absolute Wert einer Function constant ist. — G. Ascoli: Ueber die Fourier'sche Reihe. — Ed. Ovidio: Untersuchung über die projectivische Geometrie. — E. Betti: Ueber die Gleichungen des Gleichgewichts der elastischen festen Körper. — U. Dini: Ueber die Reihen von Kugelfunctionen. — B. Jgel: Ueber die Darstellung der ternären quadratischen Formen durch Quadrate. — J. Bischoff: Auszug aus zwei Briefen an Herrn Cremona. — E. B. Christoffel: Arithmetische Beobachtung. — Brill, Gordan, Klein, Lüroth, A. Mayer, Nöther, von der Mühll: Alfred Clebsch und seine wissenschaftlichen Arbeiten (aus den Math. Ann. ins Ital. übers. von E. Beltrami.) — R. Lipschitz: Bestimmung des Druckes im Innern einer incompressibeln Flüssigkeit unter inneren und äusseren Anziehungen. — J. N. Bischoff: Beweis eines Satzes von Hesse. — E. Beltrami: Ueber das gegenseitige Potential zweier starren Systeme, und insbesondere über das elektrodynamische elementare Potential. — E. Fergola: Ueber die Stellung der Rotationsaxe der Erde zu ihrer Figuraxe. — J. C. Malet: Zwei Integrationstheoreme. — T. A. Hirst: Ueber die Correlation zweier Ebenen.

Der Inhalt des 7. Bandes ist: Aoust: Integrale der Differentialgleichungen der Curven, welche eine gemeinsame Polarfläche haben. — C. M. Piuma: Ueber eine Classe von Integralen, die sich in blossen Logarithmen ausdrücken lassen. — E. d'Ovidio: Die Complexen und die linearen Congruenzen in der projectivischen Geometrie. — Brioschi: Ueber einen neuen Punkt der Beziehung zwischen den binären Formen 4. Grades und den ternären kubischen. — O. Bonnet: Untersuchung der Flächen, die sich auf einer Ebene darstellen lassen. — Barnaba Tortolini. — Zum Andenken an Jacob Steiner. Vortrag von C. F. Geiser. (Ins Ital. übers. von F. Casorati.) — A. Clebsch: Ueber die Theorie der binären Formen 6. Ordnung und die Trisection der hyperelliptischen Functionen. (Ins Ital. übers. von F. Brioschi.) — E. Caporali: Ueber die Flächen 5. Ordnung mit einer Doppelcurve 5. Ordnung. — F. Brioschi: Ueber die Bedingungen der Zerlegung einer ternären kubischen Form in drei lineare Factoren. — L. Schlaefli: Berichtigung zur Abhandlung betitelt: Wann macht sich von einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung ein wieder hineingehendes Stück los? — F. Casorati: Einige Fundamentalformeln zur Untersuchung der Differentialgleichungen 1. Ordnung und 2. Grades zwischen 2 Variabeln mit algebraischem allgemeinen Integral. — F. Brioschi: Analytische Untersuchungen über die Curven 4. Ordnung. — R. Sturm:

Ueber die Kräfte im Gleichgewicht. — G. Ascoli: Ueber die Reihen $\underset{0}{\Sigma_n} A_n X_n$.

Nouvelle Correspondance Mathématique, rédigée par Eugène Catalan, ancien élève de l'école polytechnique, Docteur ès sciences, Professeur à l'université de Liège, etc. avec collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg et Edouard Lucas. Tome II. Liège 1876. E. Decq.

Von dieser Zeitschrift erscheint jeden Monat 1 Heft, jedes Jahr ein Band. Sie liefert Original-Abhandlungen, Auszüge, Aufgaben und Lösungen, Besprechungen mathematischer Fragen, keine litterarischen Berichte. Der Inhalt der ersten 6 Hefte an Abhandlungen ist folgender. J. Neuberg: Ueber die um einen Kegelschnitt beschriebenen Polygone. — Le Paige: Note über Pascal's Essai pour les coniques. — E. Lucas: Trisection des Winkels mittelst des Zirkels. — P. Mansion: Ueber die Theorie der linearen Transformationen. — Laisant: Ueber ein Problem betreffend ebene Curven. — De Tilly: Ueber die Asymptoten der algebraischen Curven. — E. Lucas: Note über Pascal's arithmetisches Dreieck und die Lamé'sche Reihe. — E. Catalan: Note über einen geometrischen Ort. — E. Lucas: Ueber ein Euler'sches Problem betreffend die magischen Quadrate. — P. Mansion: Ueber eine, der Leibnitz'schen analoge Formel. — Even: Beweis eines geometrischen Satzes. — Mansion: Die zusammengesetzten Zirkel von Peancellier, Hart und Kempe. — H. Brocard: Note über verschiedene Eigenschaften des Ellipsoids und der Ellipse. — Retsin: Construction der Hyperbel. — P. Mansion: Ueber die magischen Quadrate. — E. Ghysens: Ueber die Construction der Normalen einiger Curven und Flächen. — P. Mansion: Ueber 2 Formeln bezüglich auf die Theorie der ebenen Curven. — H. Brocard: Note über die Näherungsmethode der proportionalen Teile. — E. Catalan: Einige Sätze über die Krümmung der Linien. — E. Catalan: Ueber einen arithmetischen Satz. H.

Programm des von der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Turin zu vergebenden Bressa-Preises.

Caesar Alexander Bressa, im Leben Doctor der Medicin und Chirurgie, hat am 4. September 1835 in seinem Testamente Folgendes wörtlich verfügt.

„Ich erwähle zum Universalerben meiner jetzigen und künftigen „Güter, nach Abzug der verschiedenen Legate, die Königliche Aka-„demie der Wissenschaften zu Turin, welche sich von ihrem bestän-„digen Secretär oder von einem Procurator wird vertreten lassen können, „der zu diesem Zwecke von ihren Mitgliedern zu erwählen wäre.

„Sowie das Recht der Nutzniessnng aufhört (welches in dem-„selben Testamente der Frau Claudia Amata Dupêché zugesprochen „ist), wird die Turiner Akademie die Nachlassenschaft sofort antreten „und befugt sein, die unbeweglichen Güter zu verkaufen, die Kapitale „nach ihrem Ermessen anzulegen, und mit dem Ertrag des Gesammt-„vermögens einen zweijährigen Preis zu stiften, der in folgender Weise „abwechselnd vergeben werden soll.

„Der Reinertrag der ersten beiden Jahre ist als Preis für den-„jenigen Gelehrten bestimmt, der, gleichviel zu welcher Nation er ge-„hören möge, während der letzten vier Jahre die ausgezeichnetste „und nützlichste Entdeckung gemacht haben wird oder der Urheber „war des berühmtesten Werkes, im Bereich der physikalischen und „experimentellen Wissenschaften, der Naturgeschichte, der reinen und „angewandten Mathematik, der Chemie, Physiologie und Pathologie, „mit Einschluss der Geologie,' der Geschichte, Geographie und Sta-„tistik.

„Der Reinertrag der folgenden beiden Jahre wird demjenigen „Gelehrten zugesprochen werden, welcher, immer nach dem Urteil „derselben Turiner Akademie, in den letzten vier Jahren, bezüglich „einer der oben erwähnten Wissenschaften in Italien die wichtigste „Entdeckung gemacht oder das bedeutendste Werk veröffentlicht haben „wird, und so weiter unter Beobachtung derselben Reihenfolge“.

Obgleich sich die Akademie nicht verhehlt, dass ihr die edelmütige Schenkung des Doctor Bressa eine schwere Verantwortlichkeit auferlegt, indem sie dazu berufen sein soll, über Geisteserzeugnisse zu urteilen, welche in irgend einem Teile des weiten Gebietes beinahe sämmtlicher positiven Wissenschaften auftauchen mögen, glaubt sie dennoch dem Vertrauen des freigebigen Erblassers entsprechen zu müssen, indem sie sich anheischig macht, die Bestimmungen seines Testamentes genau zu erfüllen, das von der lobenswerten Absicht eingegeben ist, das Gedeihen der Wissenschaft zu befördern.

Das Bressa'sche Vermächtniss ist im Monate Juli 1876 von der Bedingung der Nutzniessung befreit worden. In Folge dessen muss der erste vom Testament bestimmte Zeitraum sich über die Jahre 1877 und 1878 erstrecken.

Der erste Preis wird im Jahre 1879 demjenigen Gelehrten zuerteilt werden, der, gleichviel welcher Nation er angehören möge, während der vorangegangenen vier Jahre, das heisst vom 1. Januar 1875 bis zum letzten December 1878, die bedeutendste und nützlichste Entdeckung gemacht oder das berühmteste Werk veröffentlicht haben wird, in dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik, der experimentellen Wissenschaften: Physik, Chemie und Physiologie, der Naturgeschichte mit Einschluss der Geologie, der Pathologie, der Geschichte, Geographie und Statistik.

Der erste für den vierjährigen Zeitraum, 1875 bis 1878, bestimmte Preis wird zwölftausend italienische Franken betragen.

Im Sinne des Bressa'schen Testamentes wird die Akademie unter den Entdeckungen und veröffentlichten Werken, mögen sie von deren Urhebern eingereicht worden sein oder nicht, das Beste wählen, ohne sich an irgend etwas Anderes zu binden, als an die Grenzen der Zeit, die der Erblasser vorgeschrieben, und an die Rücksicht der Unparteilichkeit, die es verbietet in eigener Sache zu richten.

Kein nationales Mitglied der Akademie, mag es zu den in Turin ansässigen oder nicht ansässigen gehören, wird den Preis davon tragen können.

Im Jahre 1881 wird der zweite Bressa-Preis, für den vierjährigen Zeitraum 1877 bis 1880, erteilt werden, ganz nach Maassgabe der obigen Bestimmungen, nur dass, dem Testamente gemäss, dieser zweite Preis nur von einem italienischen Gelehrten gewonnen werden kann.

Und auf dieselbe Weise soll alle vier Jahre einem Gelehrten ohne Rücksicht auf seine Abstammung, und alle vier Jahre einem italienischen Gelehrten der Bressa-Preis zuerkannt werden, so zwar, dass ein Weltpreis und ein vaterländischer regelmässig mit einander abwechseln.

Turin, 7. December 1876.

Der President der Akademie:
FEDERIGO SCLOPIS.

Der Secretär der Klasse für physikalische u. mathematische Wissenschaften:
ASCANIO SOBRERO.

Der Secretär der Klasse für moralische, historische und philologische Wissenschaften:
GASPARE GORRESIO.

Litterarischer Bericht

CCXXXIX.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Die Elemente der Arithmetik für die Mittelklassen höherer Schulen und zur Repetition in den oberen Klassen zusammengestellt von F. August, Dr. phil., Oberlehrer am Humboldt-Gymnasium und Lehrer an der Königl. Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin. 1875. Winckelmann u. Söhne. 68 S.

Unterscheidend für die Methode des Lehrbuchs und entscheidend für den Lehrgang wenigstens in den ersten Abschnitten ist es, dass dasselbe gleich von Anfang die Zahl in Verbindung mit der algebraischen, beliebig benannten Grösse einführt. Die Principien sind demnach keine rein arithmetischen, sondern aus Arithmetik und Algebra zusammengesetzte. Dies ist der Hauptpunkt, in welchem der Verfasser dem Vorgang Worpitzky's (Elemente der Mathematik. Erster Teil. Berlin 1872) folgt. Da wir hinreichenden, nachweisbaren Grund haben, das Vorliegende nicht nach den aus jener Schrift entlehnten Elementen zu beurteilen, so mögen nur die am meisten hervorstechenden dahin gehörigen Punkte in der Kürze vorher besprochen werden. Die Methode führte das formelle Bedürfniss herbei die Begriffe von Quantität und Qualität zu definiren. Dass aus diesen, bloss negativen Bestimmungen die beiden Begriffe nicht erlernt werden, dass erstere überhaupt zur exacten Auffassung nicht hinreichen, wird der Verfasser gewiss gern einräumen. Einen exacten allgemeinen Begriff von Qualität besitzen wir nicht, wir kennen nur gewisse Qualitäten. Wir können daher den Grössenbegriff, so lange die Qualität nach daran haften soll, nicht im voraus auf alle Qualitäten einrichten. Für den

Schüler genügt es aber einige wenige Qualitäten zu kennen um zum Grössenbegriff mit Abstraction von der Qualität zu gelangen; hierzu bietet die Geometrie das Material, die Algebra die Anweisung. Da die adoptirte Methode diesen naturgemässen Weg verschmäht, so muss sie über die Grundbegriffe eine Auskunft treffen. Worpitzky legt den höchsten Wert auf die Formulirung, durch die er der Aufgabe vollkommen ideell gerecht zu werden meint. Im Vorliegenden deutet alles darauf hin, wenn gleich keine Erklärung dem zur Seite steht, dass weniger ein rigoureuser, sondern der praktische Gesichtspunkt dabei massgebend gewesen ist: die Formulirung ist vereinfacht und der Passus über die Grundbegriffe als nebensächlich behandelt. Am meisten eingreifend ist noch die von der Worpitzky'schen zwar abweichende, aber doch deren Stelle einnehmende, rätselhafte und gänzlich verfehlte Definition der Null als Qualität ohne Quantität. Die Null hat in der gesammten Mathematik die Bedeutung einer Quantität, als solche tritt sie in jeder Operation auf, dagegen hört die Bedeutung der Qualität gerade bei der Null auf. Dass diese actuelle Stellung geradezu umgekehrt wird, hat etwas Sinnverwirrendes. Ueberdies fällt bei der Einführung der Null vor allen Operationen selbst die Rechtfertigung durch das Bedürfniss des Lehrgangs weg; denn die Null ist nicht eher nötig als die negativen Zahlen, welche hier naturgemäss erst nach der Subtraction behandelt werden.

Hierauf und auf einiges weniger wichtige weiter einzugehen ist vor der Hand kein Anlass. Was in der Tat zu Gunsten der Methode, die mit der Zahl gleichzeitig die Grösse einführt, spricht, ist erstens der analoge Lehrgang beim Rechenunterricht, sofern dieser die Operationen gleich anfangs mit benannten Zahlen übt, wie es in den untersten Classen zu geschehen pflegt, zweitens die Vermeidung mancher Wiederholungen, welche die reine Arithmetik bei Erweiterung des Zahlbegriffs vollziehen muss. Es werden die Sätze unmittelbar in einer gewissen grössern Allgemeinheit aufgestellt, wie sie gerade für den Umfang der elementaren Anwendungen gut passt, daher denn eine so gestaltete Doctrin dem Bedürfniss der Schüler, die nicht in der Folge Mathematik studiren, am unmittelbarsten entsprechen mag. Wenn der Verfasser in der Vorrede sagt: es schiene ihm unzweifelhaft, dass der Ausgangspunkt vom Grössenbegriff her genommen werden müsste; wenn Worpitzky, den er hier anführt, sogar behauptet, es sei diese die einzig mögliche exacte Methode: so können wir erstere Erklärung als persönliche gegenüber den existirenden Bearbeitungen auf rein arithmetischer Grundlage auf sich beruhen lassen. Letztere Behauptung stützt sich hauptsächlich darauf, dass die früheren Lehrbücher in einzelnen Punkten der Strenge nicht Genüge tun. Solche Mängel können verbessert werden ohne die Principien

zu wechseln. Ebenso kann man fragen, ob die bestrittenen Punkte der Worpitzky'schen Methode verbesserlich sind. Im vorliegenden Lehrbuch kann man, trotz dem dass es nicht im Sinne Worpitzky's geschieht, den Grössenbegriff als bekannten, von den Schülern mitgebrachten und anderweit erworbenen ansehen, der durch die Schuldoctrin nur die notwendigen Bestimmungen hinzu erhält. Dass dies Ziel erreicht wird, dass keine irrigen Vorstellungen aufkommen oder fortbestehen können, und alle Seiten des Begriffs zur Entwickelung gelangen, dafür ist mit Umsicht und logischer Sicherheit, mit einem Verständniss für die Bedürfnisse der Schüler gesorgt, welches das Ungenügende des Ausgangspunkts ganz in den Hintergrund stellt. Die 7 algebraischen Operationen werden mit derselben Vollständigkeit ihrer natürlichen successiven Entstehung gemäss aus einander hergeleitet, und die damit verbundenen Erweiterungen des Zahlbegriffs vollzogen, wie es bei reiner Arithmetik geschehen muss. Es werden für jede Operation geschieden nach einander behandelt 1) die Rechengesetze enthalten in den Transformationsgleichungen 2) die Resultate ihrem Werte nach 3) die Ausführung d. i. das praktische Verfahren um zu der bezeichneten Resultatform zu gelangen. Ein wesentlicher Fortschritt ist gemacht durch Aufnahme der Theorie der unendlichen Grössen. Es war bekannt, wie man auf leichtfassliche Weise die unendlichen Grössen und Grenzwerte erklären und den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung beweisen kann, und dass mittelst des letztern manche Deductionen, die sonst Schwierigkeiten und oft täuschende Auskunftsmittel veranlassten, streng und leicht vollzogen werden. Dennoch waren bisher Verwendungen der Theorie für die Schuldoctrin selten, meist unvollständig und nicht in der natürlichen Einfachheit. Die gegenwärtige Gestaltung ist frei von diesen Mängeln. Der Hauptsatz nimmt, was gewöhnlich nicht der Fall ist, hier seine richtige Stelle ein und wird da, wo er nötig ist, insbesondere bei den incommensurablen Grössen mit bestem Erfolg in Anwendung gebracht. Die geometrische Darstellung der entgegengesetzten und später der complexen Grössen wird erklärt, sofern sie als begleitende Anschauung dient. Im ganzen ist der Vortrag und die Ausdrucksweise äusserst concinn und präcis, man wird darin so wenig eine überflüssige als mangelnde Bestimmung finden; dies gilt ebensowol von der Beschreibung des Rechnungsverfahrens, welche in keiner Weise einem schwächeren Auffassungsvermögen zu Hülfe kommt. Der Umfang des behandelten Lehrstoffs ergiebt sich aus der Natur der Sache.

H.

Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien und verwandte Lehranstalten. Von Daniel Höhr. Zweiter Theil. (Für die dritte und vierte Klasse.) Wien 1876. Sallmayer u. Comp. 171 S.

Der erste Teil ist im litt. Ber. 235. S. 26. besprochen. Der zweite führt den Gebrauch der Buchstaben und die negativen Grössen ein und fügt die Potenzen und Wurzeln, die linearen Gleichungen und die Combinationen als neue theoretische Lehrgegenstände hinzu. Das Verfahren ist nicht theoretischer als im ersten Teile. Die Herbeiführung und Formulirung des allgemeinen Satzes aus Beispielen war auch schon dort überall durchgeführt; dass jetzt die Formulirung durch Buchstaben geschieht, ist unwesentlich, weil weder die Formel zu Beweisen verwandt, noch ihre Anwendung beim Rechnen erklärt wird. Im Anfang werden die 4 Species in Rücksicht des allgemeinen Zahlenbegriffs noch einmal aufgenommen; hier vermisst man jedoch gänzlich den Begriff des Bruchs und die Bruchrechnung, die, wenn einmal auf die allgemeine Auffassung Wert gelegt ward, noch eine grosse Aufgabe an Erklärungen und Sätzen gestellt hätten. Bei der Potenzrechnung ist die Multiplication bei gleicher Grundzahl vergessen worden; denn die Division wird behandelt und zur Erklärung der Potenzen mit negativen Exponenten gebraucht. Die Lehre von den Wurzeln schliesst mit dem begründeten Verfahren der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln. Dann folgen einige bürgerliche Rechnungsweisen, die auf Zusammensetzung der Verhältnisse beruhen, dann die Lehre von den Gleichungen 1. Grades mit 1 und mehreren Unbekannten, dann einiges aus der Combinationslehre, schliesslich die Zinseszinsrechnung. Ein Anhang behandelt die Rechnung mit abgekürzten Decimalbrüchen. Jedem Abschnitt sind einige Uebungsbeispiele beigefügt. Das Ganze ist nicht sowol ein Lehrbuch der Arithmetik im gewöhnlichen Sinne als vielmehr eine Anweisung zum Rechnen zu nennen. Als solche zeichnet es sich aber durch die sorgfältige Anbahnung der allgemeinen Auffassung und des gründlichen Verständnisses, durch correcten und dem wissenschaftlichen Gebrauch adäquaten Ausdruck aus, so dass es auch als Vorschule zur theoretischen Arithmetik dienen kann. Kürze und Beschränkung auf die notwendigen Bestimmungen hat sich der Vortrag in Aufstellungen und Beschreibungen nicht zum Augenmerk genommen, vielmehr sehr häufig dieselbe Sache in verschiedener Form zu grösserer Verdeutlichung wiederholt. H.

Allgemeine Arithmetik und Algebra als III. Theil des „Allgemeinen Deutschen Rechenbuches". Ein hauptsächlich für den Selbstunterricht bestimmtes Lehr- und Uebungsbuch zum Gebrauche in den mittleren und oberen Klassen von Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen und an Schullehrer-Seminarien. Von J. M. J. Sachse, Gewerbeschullehrer in Coblenz. Coblenz 1875. J. Hölscher. 464 S.

Das Buch giebt eine grosse Menge zusammengeschriebenen Lehr-

stoff ohne verbindenden Gedanken und methodische Verarbeitung. Von Systematik ist darin keine Spur; die einen Abschnitt füllenden Sätze, Regeln u. s. w. entsprechen sich nicht, bilden keine ausschliessenden Gegensätze und erschöpfen nichts. Einzeln sind die Aufstellungen nur eben wörtlich zutreffend (ausgenommen etwa die sinnlose Einführung des ∞ als Bruch mit Nenner 0), aber so wenig als möglich geeignet das Wesentliche ans Licht zu stellen, unter einander ungleichartig, von einer Auffassung zur andern überspringend. Was den äussern Umfang betrifft, so bilden die 7 Operationen, die kubischen Gleichungen, die Progressionen, Kettenbrüche und diophantischen Gleichungen, nebst einigem über höhere Gleichungen, endlich die Syntaktik die Grenzen des theoretischen Teils. Hierauf folgt ein praktischer Teil, der in sehr zahlreichen, teils entlehnten, teils neuen Beispielen von den theoretischen Lehren Anwendung macht, und über die darin berührten Wissenszweige an den betreffenden Stellen die nötigen Erklärungen giebt. Hierhin gehört namentlich ein Digress über technische Mechanik; auch geht derselbe besonders auf Wahrscheinlichkeitsrechnung und auf Kalenderrechnung ein. Dieser 2. Teil möchte jedenfalls das Brauchbarste des Buches enthalten. H.

Lehrbuch der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten nach der Entwickelungsmethode bearbeitet von J. Gilles, Gymnasiallehrer in Düsseldorf. Heidelberg 1877. Carl Winter. 179 S.

Das Vorliegende ist ein verunglückter Versuch vermeintlichen Mängeln der Unterrichtsmethode abzuhelfen. Der Verfasser tadelt an der gewöhnlichen Methode die lose Verknüpfung der Sätze und das Voranstellen des Satzes vor den Beweis; er setzt ihr die Entwickelungsmethode entgegen, welche das Entstehen der Raumgebilde sehen lasse und den Satz erst als gewonnene Einsicht ausspreche. Nur Unerfahrenheit und logische Schwäche machen es erklärlich, dass der Verfasser an der Gestaltung seiner Doctrin nicht gewahr geworden ist, wie weit sie davon entfernt ist, irgend etwas zum Bessern zu führen. Ueberdies ist er in demselben Vorurteil wie Grassmann befangen, von dessen, freilich mit viel schärferer Logik durchgeführter Sachverkehrung im litt. Ber. 218. gesprochen worden ist, dem Vorurteil, dass das unmittelbar deutliche im Allgemeinsten zu suchen sei. Er wird auf die Verkehrtheit nicht einmal aufmerksam, wo er den Kreis aus der Ellipse erklärt, obwol er hier in der Verallgemeinerung Halt machen musste. Sehen wir zu, was aus solchen Principien hervorgegangen ist, so bietet der Anfang eine philosophische Auseinandersetzung, bestehend aus teils unrichtigen, teils halbrichtigen, durchweg aber bestreitbaren Aufstellungen dar. Im Folgenden sieht man

den ganzen Nexus des geometrischen Lehrgebäudes herzlos bei Seite geworfen, und an dessen Stelle eine, zum Teil willkürliche Disposition des Lehrstoffes gesetzt, an welche sich dann die Reihe der Lehrsätze anschliesst. Der Verfasser weiss gewiss nicht, wie viele dem Mathematiker geläufige, dem Anfänger unbekannte Ausdrücke er unerklärt lässt. Von den einzelnen ungenügenden Beweisen zu reden ist in solchem Falle überflüssig. H.

Ebene Geometrie für Schulen. Von Dr. Georg Recknagel, Professor für Physik und technische Mechanik, Rektor der k. Industrieschule zu Kaiserslautern. Zweite, verbesserte Auflage. München 1876. Theodor Ackermann. 203 S.

Das Buch zeichnet sich zunächst durch eine klare und einfache Darstellungsweise, musterhaft sorgfältige, correcte und allseitige Berücksichtigung aller zum Verständniss notwendigen Umstände ohne Umschweif und Subtilitäten in hohem Grade aus. Eine Folge hiervon ist, dass es länger als gewöhnlich bei den Anfangsgründen verweilt. Eigentümlich ist ihm die Bevorzugung der arithmetischen Methode, die mit der Lehre von der Gleichheit der Flächenstücke beginnt, und in die Lehre von Proportionen und Aehnlichkeit übergeht, ohne doch die Anwendung der geometrischen Schlüsse zu verdrängen. Der Fall der Incommensurabilität wird in aller Strenge berücksichtigt. Dass dies ohne wiederholte Umständlichkeit möglich war, hat eine der systematischen Ordnung eigentlich nicht gemässe Umstellung bewirkt, indem der Abschnitt von der Gleichheit wichtige Proportionssätze über Flächen mit enthält, die dann zum Beweise von Proportionen der Linien dienen. Das Buch scheidet sich in 2 sehr gekennzeichnete Teile: der erste, der mit der Congruenz abschliesst, lässt den Schüler fast ganz receptiv. Desto reichhaltiger ist der zweite, vom Flächeninhalt der Figuren, an Elementen, welche ihm zu eigener Tätigkeit Anlass bieten. Die betreffenden Aufgaben sind gesondert. Zugaben im Anhang sind isoperimetrische Sätze und das Apollonische Berührungsproblem. Die Beweise sind von Anfang an meist nur angedeutet. Zwei Beweise sind falsch. Der Verfasser sagt, ein auf Gründe eingehender Vorwurf gegen die Vollgiltigkeit des Beweises für den Parallensatz mittelst Winkelebene und Parallelstreifen sei ihm nicht bekannt. Dass er falsch ist, ist bekannt genug, und der Grund augenfällig: Winkelebene und Parallelstreifen sind keine Grössen, wenn sie auch in manchen Beziehungen den Grössen, analog sind. Sie als Grössen anzuwenden ist ein logischer Fehler. Ferner ist der Beweis für den Satz, dass der Umfang eines regelmässigen Vielecks von unendlich vielen Seiten unendlich wenig vom umschriebenen Kreise

differirt, unzureichend; es ist nur gezeigt, dass die Differenz beständig abnimmt, aber nicht, dass sie jede Kleinheit erreicht. Dagegen ist rühmlichst anzuerkennen, 1) dass mit Aufstellung des Satzes der einzig correcte und erfolgreiche Weg für die Kreisberechnung betreten wird, 2) dass es nur einer Modification bedarf, um den Mangel auszugleichen. Es liess sich der Schluss ziehen, dass ein Grenzwert existiren muss; dieser ist durch Definition der Länge der krummen Linie, die bis dahin noch keinen Begriff hat, gleich zu setzen. Der nächste Satz über das umschriebene Vieleck ist überflüssig; Grenzeneinschliessung ist unnötig. Die Terminologie schliesst sich in einigen Punkten einem sehr unpraktischen Gebrauche an. Das Wort „Figur“, ursprünglich = „Gebilde“, wie es in allen romanischen Sprachen und im Englischen noch jetzt gilt, für den speciellen Sinn „Flächenstück“ zu verwenden, ist nicht nur principiell incorrect, sondern hat auch ausser allen jenen Sprachen den heimischen Gebrauch (z. B. Figur an der Tafel) gegen sich, mit dem es oft collidirt. „Kreis“ statt „Kreisfläche“ ist durch blossen Unverstand und nur teilweise aufgekommen; denn wir sagen: Kreise schneiden sich, einen Kreis ziehen u. s. w. Die Linie enthält das Charakteristische, das Flächenstück wird erst durch sie charakterisirt. „Strecke“ ohne Unterscheidung der Richtungen AB und BA zu gebrauchen bringt unnötige Complicationen hervor, wie vielleicht der Verfasser auch empfunden hat. Die vorgenannten Ausstellungen betreffen Punkte, die sich leicht vom Ganzen abtrennen lassen und sollen ohne die Vortrefflichkeit des Buchs zu verringern, als Verbesserungsvorschläge angesehen werden.

H.

Geometrische Analysis. Eine systematische Anleitung zur Auflösung von Aufgaben aus der ebenen Geometrie auf reingeometrischem Wege. Von Oberstudienrath Dr. von Nagel. Mit 155 Holzschnitten. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Ulm 1876. Wohler. 264 S.

Das Buch verfolgt den Zweck die Entwickelung der Fähigkeit zur Lösung geometrischer Aufgaben, die wegen öfterer Miserfolge leicht als bedingt durch specifische Begabung erscheint, zu einer allen Schülern gemeinsamen zu machen und sucht diesen Zweck durch ausführliche Darlegung der Erfordernisse und zu Gebote stehenden Mittel zu erreichen. Es handelt demgemäss nach einander über die Natur und über die Teile einer Aufgabe, über die geometrische Analysis, dann über die verschiedenen Hauptwege, um zur Auflösung geometrischer Aufgaben zu gelangen; den Schluss bildet die Lehre von den geometrischen Oertern. Ein Anhang giebt noch eine Anzahl von Constructionsaufgaben, welche die zahlreichen in des Verfassers Lehrbuch der ebenen Geometrie enthaltenen vermehren. Die Dar-

legung stützt sich teils auf allgemeine Begriffe, teils auf Beispiele. Die allgemein gehaltene Unterweisuug ist noch ziemlich besserungsfähig. Sie ist nicht zu jener Einfachheit und Klarheit durchgearbeitet, welche kurz und treffend das Wesentliche vom Accidentellen scheidet. Doch ist damit wenigstens ein guter Anfang gemacht, eine eben nicht leichte und bisher noch wenig in Angriff genommene Aufgabe zu bewältigen. Auch dient die Erklärung am Beispiel dazu, das Vermisste zu ersetzen, und die restirende Undeutlichkeit zu heben.

H.

Elementaraufgaben aus der Algebra. Von Professor Dr. O. Hermes. Berlin 1875. Winckelmann u. Söhne. 140 S.

Diese Aufgaben bestimmt der Verfasser für den Gebrauch beim Unterricht in der Algebra bis zur Stufe von Untersecunda; sie bilden den ersten Teil der 1874 in dem gleichen Verlage erschienenen „Sammlung von Aufgaben aus der Algebra und niederen Analysis“ desselben (s. litt. Ber. 225. S. 3.). Sie erstrecken sich bis zu den quadratischen Gleichungen, enthalten ausser den einfachsten algebraischen Transformationen auch numerische Rechnungen und sind durchgängig für eine leichte Anwendung eingerichtet. H.

Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle à l'usage des Candidats à la Licence et à l'Agrégation des sciences mathématiques. Par A. de Saint-Germain, Professeur de mécanique à la Faculté des sciences de Caen. Paris 1877. Gauthier-Villars. 456 S.

Diese Aufgabensammlung schliesst sich einer einfach analytischen Behandlung des Lehrstoffs an und hat überall die Uebung in analytischer Methode im Auge. Jeder Abschnitt besteht aus einer kurzen Zusammenfassung der in Anwendung kommenden Principien, die nicht erläutert sondern als bekannt und verstanden vorausgesetzt werden, einer Anzahl Aufgaben mit Lösung und einigen Aufgaben ohne Lösung, welche bestimmt sind nach Analogie vermehrt zu werden. Die Aufgaben sind ohne Rücksicht auf technische Verwendung so ausgewählt, dass sie weder zu leicht noch zu schwer sind und durch die Einfachheit des Resultats ein gewisses Interesse bieten. Solche in so grosser Reichhaltigkeit aufzufinden ist offenbar keine geringe Leistung. Das Gebiet ist auf die Statik, Cinematik und Dynamik fester Körper begrenzt. Reibung ist mit aufgenommen, Elasticität hingegen ausgeschlossen. Den letzten Abschnitt bilden die allgemeinsten Principien, das der virtuellen Geschwindigkeiten, das Alembert'sche, das Hamilton'sche und Jacobi's Integrationsmethode. H.

Sammlung von Rechen- und Constructionsaufgaben aus der Planimetrie. Herausgegeben von Dr. Kurt Schnrig, Oberlehrer an der k. Gymnasial- und Realschulanstalt nnd Lehrer der Mathematik an der k. Bangewerkenschule zn Planen i. V. Planen 1876. A. Hohmann. 98 S.

Diese Aufgaben sollen Ergänznng des Leitfadens „Elemente der Geometrie von Dr. Kurt Schurig" sein; ihre Anwendbarkeit ist durch diese Beziehung in keiner Weise bedingt. Sie bestehen aus Reihen nnmerischer Data, welche auf vorangestellte Forderungen folgen. Die Fragen znr Rechenübung beziehen sich teils auf doctrinär geometrische Figuren, teils auf wirkliche bekannte Gegenstände. Die Constructionsaufgaben haben nur Bedentung, sofern sie mit Lineal, Zirkel nnd Millimeterstab ausgeführt werden. H.

Rechenbuch für Volksschnlen nnd die unteren Classen höherer Schnlen (der methodisch geordneten Aufgaben 8. Auflage I. Theil). Von Chr. Harms, Professor an der Realschule in Oldenbnrg. Sechste Auflage. Oldenburg 1876. Gerhard Stalling. 283 S.

Rechenbuch für die Oberclassen gehobener Volks- und Fortbildungsschulen und der mittleren-Classen höherer Schnlen (der methodisch geordneten Anfgaben 8. Anflage II. Theil). Von Chr. Harms, Professor an der Realschule in Oldenbnrg. Oldenbnrg 1876. Gerhard Stalling. 107 S.

Das erstere Buch unterscheidet sich von der 5. Auflage an dnrch den Uebergang zur allseitigen Decimalrechnung; es werden demnach die Decimalbrüche früher geübt als die gemeinen Brüche, die überhaupt nur wenig vorkommen. Auch ist die Potenzrechnnng nnd in 6. Auflage die Zinseszinsrechnnng hinzugekommen.

Das letztere Buch wird jetzt zum erstenmale gesondert herausgegeben. Manche höhere Rechnungsweisen sind anfgenommen. In beiden Büchern nimmt das kanfmännische Rechnen die vorwaltende Stelle ein. H.

Georg's Freiherrn von Vega logarithmisch-trigonometrisches Handbnch. Sechszigste Auflage. Neue vollständig dnrchgesehene nnd erweiterte Stereotypausgabe. Bearbeitet von Dr. C. Bremiker. Berlin 1876. Weidmann. 575 S.

Von der 40. Auflage an hat, soviel sich bemerken lässt, keine Aenderung mehr stattgefunden. Jener voransgegangen sind dagegen

wesentliche Vermehrungen. Die trigonometrischen Tafeln sind von 10 zu 10 Secunden, im Intervall der ersten 5 Grade durch alle Secunden durchgeführt, und die Proportionalteile der Differenzen sind, was für die Genauigkeit unentbehrlich war, nicht mehr abgekürzt. Unter den Logarithmen der Zahlen steht noch eine Reductionstafel, von der man wünschen möchte, dass der Raum nicht durch sie beschränkt worden wäre. Infolge dessen sind nun die Ziffern weit kleiner geworden, als sie in früheren Ausgaben waren, was den Gebrauch empfindlich erschwert. Doch mochte dies bei der grösseren Ausdehnung unvermeidlich sein. Zugaben sind die Tafel zur Verwandlung der brigg. Logarithmen in natürliche und umgekehrt, die Tafel zur Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit und umgekehrt, Tafeln der Refraction und eine Anzahl Constanten. H.

Tables de logarithmes à six décimales pour les nombres depuis 1 jusqu' à 20000 et pour les lignes trigonométriques, le rayon étant pris égal à l'unité. Suivies de plusieurs autres tables très-utiles, avec un appendice servant à trouver sur-le-champ et sans les secours des formules le logarithme d'un nombre, et vice versa, avec vingt chiffres exacts et au dessous. Par M. V. Vazquez Queipo, Membre des académies royales des sciences et de l'histoire, et du Conseil supérieur de l'instruction publique de Madrid. Deuxième édition française. Paris 1876. Gauthier-Villars.

Die erste Ausgabe dieser Tafeln ist vor 18 Jahren in spanischer Sprache erschienen, später sind sie zur Verbreitung in Frankreich übersetzt worden. Sie unterscheiden sich nicht wesentlich von unseren gewöhnlichen Tafeln. Nur steht hinter jeder Spalte die Differenz angegeben. Die trigonometrischen Tafeln sind durch die Minuten durchgeführt, und die Proportionalteile für die Secunden angegeben. Hierauf folgen eine grössere Anzahl trigonometrischer Formeln und verschiedener kleinen Tafeln. Der Verfasser hat mit der vorliegenden Bearbeitung den Zweck verfolgt, den Gebrauch der Logarithmen auch den Nichtgelehrten, namentlich den Handwerkern zugänglich zu machen. Hierzu soll eine ausführliche Darlegung der Theorie der Logarithmen nebst Erklärung der Tafeln, welche denselben vorausgeht, dienen. Diese ist indes ganz umfassend und abstract wissenschaftlich gehalten, und setzt jedenfalls bei denen, welche daraus lernen sollen, den Willen voraus sich eingehend damit zu beschäftigen, womit auch eine Bemerkung des Verfassers übereinstimmt. H.

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von Dr. E. F. August. Elfte Auflage (der neuen Stereotyp-Ausgabe

erste Auflage) besorgt von Dr. F. August, Oberlehrer am Humboldts-Gymnasium und Lehrer an der königl. Artillerie- und Ingenieur-Schule in Berlin. Leipzig 1876. Veit u. Comp. 204 S.

Diese Tafeln in ihrer ursprünglichen Gestalt sind wol unter den 5stelligen in Deutschland die am meisten bekannten und als praktisch anerkannten. Mit der jetzt vollzogenen Erneuerung der Platten sind zugleich mannichfache Veränderungen verbunden worden. Das Format ist nach beiden Dimensionen vergrössert, dem entsprechend auch die Ziffern. Hinzugefügt sind vor allem die Proportionalteile der Differenzen, was namentlich bei den trigonometrischen Tafeln grosse Erleichterung gewährt, und zwar für Decimalteilung der Minute, ein, wenn gleich geringer, doch anerkennenswerter Schritt zur vernünftigen Kreisteilung, der wol keiner Rechtfertigung bedarf. Ferner ist die Tafel für die nicht logarithmirten Kreisfunctionen, die vorher nur durch die Grade ging, jetzt durch die Sechstelgrade durchgeführt. Ferner sind einige astronomische Angaben hinzugekommen. Die Erläuterungen erstrecken sich weiter und namentlich mehr auf die Beurteilung der Genauigkeit. Dagegen sind weggelassen zuerst die Gauss'schen Tafeln für die Logarithmen der Summen und Differenzen, welche jedoch gesondert ausgegeben werden, ferner die Factorentafel und die trigonometrischen Formeln. Im übrigen ist die Einrichtung, Anordnung und Ausdehnung, von einer Umstellung abgesehen, unverändert erhalten worden. H.

Gewone Logarithmen in vijf decimalen der getallen van 1 tot 10000. Door J. Versluys. Groningen 1876. W. Versluys.

Diese 5stellige Tafel, welche hier ausschliesslich für die briggschen Logarithmen der Zahlen ausgegeben wird, hat vollständig die gewöhnliche Einrichtung; die Proportionalteile der Differenzen stehen ohne Abkürzung am Rande. Sie zeichnet sich durch weit getrennte Zeilen, fett gedruckte Hauptzahlen und Einschliessung der zugehörigen Zeilen zwischen Linien, überhaupt durch Deutlichkeit für das Auge aus. Zugabe sind die Logarithmen für Zinseszinsrechnung 7stellig. H.

Tables pour calculer la date de la fête de Paques. Par M. F. Burnier. Bull. soc. sc. nat. XIV. 75.

Die Berechnung des Osterfestes nach Julianischem und Gregorianischem Kalender wird hier durch eine Tafel zu einer sehr leichten gemacht. Deren Einrichtung lässt nichts zu wünschen übrig; nur hätte wol durch die gehörigen Weisungen, in welchen Rubriken jedes

Eutree zn snchen ist, das unmittelbare Verständniss gefördert werden können. Beigefügt sind die Angaben zur Bestimmung des massgebenden Vollmonds nnd der abhängigen Feste. Eine Gebrauchsanweisnng ist vorausgeschickt, welche in der Eigentümlichkeit bei jeder Sache das zum Verständniss vor allem Notwendige zu verschweigen wol alles Bisherige ihrer Art übertrifft. Das zu Erklärende ist indes von so geringem Umfang, dass man dnrch Combination einiger, ziemlich mangelhaft dargelegten Beispiele, welche auf die Erklärung folgen, die Deutung bald errät. Wird durch die Tafel auch alle Rechnung bis auf die Additionen erspart, so möchte doch die Anwendnng der Formel, wie sie Piper in Crelle J. XXII. mitteilt, überall wo es nicht um einzelne Jahre, sondern um eine längere Reihe von Jahren handelt, schneller und mit grösserer Sicherheit vor Fehlern zum Ziele führen. H.

Résolution des équations numériqnes du 3ᵉ degré. Par F. Bnrnier. Bull. 64. de la Soc. vaudoise des sc. nat., vol. X.

Diese Schrift enthält eine kleine Tafel znr numerischen Auflösung kubischer Gleichnngen mit voransgehender theoretischen Erörterung. Die gleiche Idee ist jedoch bereits 1871 von A. S. Gnldberg (in Vidensk. Selskab. Forhandl. i Christiania, worüber litt. Ber. 220. p. 4.*) in Ausführung gebracht. Guldberg hat den Gegenstand weit umfassender, vielseitiger und znr Genüge erschöpfend behandelt und eine weit ausgedehntere Tafel dazu gegeben. Soweit also die Sache an sich von Interesse ist, verdient nicht Bnrnier's, sondern Guldberg's Schrift Beachtung. H.

---

*) Bei dieser Gelegenheit möge das im 55. T. d. Arch. begangene Versehen zur Anzeige kommen, dass bei der citirten Schrift der Name des Verfassers „A. S. Guldberg" fehlt.

Litterarischer Bericht
CCXL.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Il calcolo sulle incognite delle equazioni algebraiche. Studi analitici del Dott. Giovanni Biasi. 1876. Verona, H. F. Münster. Milano, G. Brigola. 84 S.

Der Untersuchung über die algebraischen Gleichungen vorausgeschickt ist als Grundlage eine Theorie der symmetrischen Functionen einer beliebigen Anzahl von Elementen, welche der Verfasser mit Anwendung partieller Differentiationen zu einem Algorithmus ausgebildet hat. Er nennt Peninvariante eine Function, deren partielle Differentialquotienten eine Summe null haben; eine solche bleibt unverändert, wenn alle Elemente ein gemeinsames Increment bekommen. Es wird dann zuerst die Aufgabe der Transformation der Gleichungen allgemein behandelt, die darin besteht für die Unbekannte eine neue, mit jener durch eine beliebige algebraische Relation verbundene einzuführen. Dann folgen die Aufgaben, zu 2 gegebenen Gleichungen eine dritte zu finden, deren Wurzeln die Summe, die Differenz, das Product, der Quotient der beiderseitigen Wurzeln in allen Combinationen sind; dann die Aufgabe, zu einer gegebenen Gleichung diejenige zu finden, deren Wurzeln Potenzen der ursprünglichen Wurzeln sind. Letztere ist nur ein besonders einfacher Fall der allgemein behandelten Transformation, wo die Relation zwischen den Unbekannten nur 2 Glieder hat. Der Verfasser nennt diese Transformation die binomische, und entwickelt eine Reihe von Sätzen über dieselben. Die Methode aller dieser Aufgaben ist diejenige, welche auf Grund

der oben genannten Principien direct die Coefficienten berechnet. Zum Schluss wird gezeigt, wie die Theorie der Transformationen ausreichend ist zur Lösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades.

H.

Integration der linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten lineare Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind. Von Dr. Anton Winckler, wirklichem Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien. Sitz. Ber. LXVII. Jan. 1873. 40 S.

Integration zweier linearen Differentialgleichungen. Von Dr. Anton Winckler, wirklichem Mitgliede der kais. Akademie der Wissenschaften. Wien. Sitz. Ber. Jan. 1875. 28 S.

Ueber die Integration linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mittelst einfacher Quadraturen. Vergleichende Zusammenstellung der bezüglich älteren und neueren Resultate und kritische Beleuchtung der angeblichen Entdeckungen des Herrn Prof. Simon Spitzer in Wien. Von Dr. Anton Winckler, Professor der Mathematik an der k. k. technischen Hochschule in Wien. Wien 1876. Alfred Hölder. 60 S.

Der erste Aufsatz löst die Aufgabe, alle Gleichungen von der Form

$$(H_0t+H)\frac{\partial^2y}{\partial t^2}+2(K_0t+K)\frac{\partial y}{\partial t}+(L_0t+L)y=0$$

wo die H, K, L constant sind, zu integriren mit der weitern Forderung, dass beide Speciallösungen als einfache bestimmte Integrale dargestellt werden. Die Grenzen der Integrale sind meist 0 und ∞. Es waren zunächst die 3 Fälle zu unterscheiden, jenachdem $H_0=K_0=0$, oder bloss $H_0=0$, oder weder H_0 noch K_0 null ist. Ausserdem mussten manche Constanten verschieden bestimmt werden, jenachdem die Unabhängige, die als allgemein complex aufgefasst wird, zwischen verschiedenen Grenzen variirt. Soviel auch schon Gleichungen der obigen Form von früheren Mathematikern behandelt und gelöst worden sind, so zeichnet sich die gegenwärtige Behandlung dadurch aus, dass sie das Ganze der Aufgabe ins Auge fasst, eine einheitliche Form der Lösung aufstellt und eine vollständige Discussion giebt.

Den Gegenstand des zweiten Aufsatzes bilden die Differentialgleichungen

$$(H_0t^2+2H_1t+H_2)\frac{\partial^2y}{\partial t^2}+(K_0t+K_1)\frac{\partial y}{\partial t}+L_0y=0$$

$$\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=ax^my$$

Die erste verlangt die Unterscheidung, jenachdem $H_0t+2H_1t+H_2$ ein Quadrat ist oder nicht. Ist der Coefficient kein Quadrat, so wird die Gleichung bekanntermassen durch die Gauss'sche Function (hypergeometrische Reihe) gelöst, und ist, zuletzt von Jacobi in Crelle J. Bd. 56., genügend erörtert. Es blieb daher nur der erste Fall zu behandeln, was nach gleicher Methode wie bei der ersten Aufgabe und mit gleichem Erfolge geschehen ist. Ebenso bedurfte die zweite, obwol viel behandelte, Riccati'sche Gleichung doch hinsichtlich der anfänglich gestellten Forderungen einer neuen eingehenden Untersuchung, welche zur Erfüllung aller Bedingungen führte. Von beiden gilt das Obengesagte.

Die dritte Schrift, welche ausschliesslich auf Gegenstände der 2 ersten Bezug nimmt, widerlegt eine ungerechtfertigte Beschuldigung von Seiten Spitzer's und enthüllt eine grössere Anzahl von Irrtümern in dessen „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen“, wo häufig die Identität der 2 Speciallösungen nicht erkannt ist. Die darüber hinausgehende Behauptung des Verfassers, Spitzer habe in allen den Gegenstand betreffenden Schriften nur Bekanntes reproducirt, ist durch das Vorgebrachte nicht erwiesen, und die von demselben reichlich angegebenen Quellen, welche er benutzt hat, zeigen, dass er sein Verhältniss zu seinen Vorgängern nicht hat im Dunkeln lassen wollen. In seinen eignen historischen Angaben über die früheren Entdeckungen auf dem Gebiete der hier besprochenen Gleichungen hat der Verfasser Vollständigkeit nicht beansprucht. H.

Geometrie.

Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder. Von Dr. Edmund Hess, Privatdocent an der Universität Marburg. Kassel 1876. Theodor Kay. 95 S.

Da der Verfasser da, wo es sich um Erklärung handelt, öfters auf seine früheren Schriften Bezug nimmt, so sei hier auf litt. Ber. 234. S. 11. verwiesen, wo diese Schriften besprochen sind. In denselben waren die Erklärungen so äusserst mangelhaft, dass es jetzt vor allem am Orte gewesen wäre, das Versäumte nachzuholen und die Gegenstände seiner Betrachtung von Anfang an gehörig zu bestimmen. Der erste Abschnitt der gegenwärtigen Schrift, betreffend Polyeder erster Art, wo der Gegenstand einfach ist, wird ausführlich und klar behandelt; von da an hört alles Definiren auf, der Verfasser verlangt, dass sich der Leser analoge Begriffe bilden solle, ohne zu sagen welche. So heisst es z. B. Seite 13: „Die analogen Regeln für

die Bestimmung der Art der sphärischen Polygone und der denselben entsprechenden körperlichen Ecken lassen sich ohne Schwierigkeit aufstellen". Die Aufstellung mag leicht sein; ob sie aber dem Gedanken des Verfassers entspricht, bleibt ungewiss. Je complicirter die Gegenstände, desto eiliger wird über die Bestimmung hinweg gegangen. Es werden anfänglich 2 Methoden der Herleitung bezeichnet; doch statt der Anwendung erfährt man nur die successiven Resultate. Letztes Ergebniss ist, dass es 12 zugleich gleicheckige und gleichflächige, convexe, continuirliche Polyeder giebt, die sich zu je zweien polarreciprok entsprechen. Polyeder erster Art, d. i. Polyeder im gewöhnlichen Sinne, gab es nur eins, ein Tetraeder von congruenten Seiten. H.

Darstellende Geometrie. Von R. Pohlke. Erste Abtheilung. Darstellung der geraden Linien und ebenen Flächen, so wie der aus ihnen zusammengesetzten Gebilde, vermittelst der verschiedenen Projectionsarten. Nebst einem Heft von zehn Tafeln. Vierte Auflage. Zweite Abtheilung. Darstellung einiger krummen Linien und krummen Flächen. Nebst einem Hefte von zehn Tafeln in 4to. Berlin 1876. Rudolph Gaertner. 373 S.

Wenn eine neue Bearbeitung eines bereits so viel behandelten Lehrgegenstandes, wie das Vorwort einräumt, dem Kundigen nichts neues darbietet, so sollte man doch wenigstens in der Art des Vortrags einen Fortschritt von ihr erwarten dürfen. Diese ist jedoch so weit entfernt die nächsten Ansprüche zu befriedigen, dass hierin ein Grund zur Erneuerung nicht wol zu ersehen ist. Es handelt sich hier nur darum eine an sich sehr einfache Sache in entsprechender Einfachheit und guter Ordnung darzulegen. Statt dessen wird der Gegenstand durch unnötig weites Ausholen und viele überflüssige Worte erst zu einem anscheinend weiten Felde ausgedehnt, auf dem nachher alle ordnenden Gesichtspunkte fehlen. Die geometrischen Vorkenntnisse in dem in Anwendung kommenden Umfange konnten vorausgesetzt oder gesondert erteilt werden; sie bei Beschreibung des technischen Verfahrens nachzuholen ist die unglücklichste Wahl, die getroffen werden konnte. Im Vorliegenden treten theoretische, sowol principielle als speciell den Gegenstand betreffende, Aufstellungen, zur Sache gehörige Aufgaben, Einführungen, Anordnungen und terminologische Erklärungen so bunt gemischt auf, dass man Mühe hat, den eigentlichen Inhalt daraus zusammenzufinden. Die Methode ist mit Auswahl von verschiedenen Autoren adoptirt; ihre Wiedergabe zeigt wenig selbständiges Urteil. Die 4 ersten Capitel beschäftigen sich mit der senkrechten Projection auf 2 normale Ebenen; dann folgt

die Axonometrie, die schiefe und die centrale Projection. Die zweite Abteilung handelt erst von Linien und Flächen im allgemeinen und von Kreis und Kegelschnitten, dann von speciellen Flächen. H.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Mittelschulen und zum Selbstunterrichte. Bearbeitet von Jrenäus Kreuszel, Professor. Mit 398 in den Text gedruckten Abbildungen. Brünn 1876. Karafiat. 4°. 323 S.

Das vorliegende Lehrbuch zeichnet sich durch eine mit guter Ordnung und Klarheit verbundene Ausführlichkeit aus. So sehr die Darstellung auch ins Einzelne geht, so lässt sich doch darin nicht verkennen, dass alle Discussion die Auffassung wirklich fördert und erleichtert und mit Geschick auf diesen Gesichtspunkt begrenzt ist. Ausnahmen sind selten; z. B. wird gelehrt, die Projection einer Geraden erhielte man, indem man alle Punkte projicirt, und erst man Schluss, dass nur 2 Punkte notwendig sind. Die Methode ist keine neue, aber eine selbständig gehandhabte. Der Projectionslehre ist ein Capitel über Curvenconstruction vorausgeschickt. In 2 Abschnitten wird dann die orthogonale Projection behandelt, ersteres umfassend die Punkte, Gerade, Ebenen und Polyeder, letzteres die krummen Flächen. Hierauf folgt ein Abschnitt über Beleuchtungsconstructionen und einer über Perspective nebst Schattenconstruction. Die Abbildungen sind schwarz auf weiss. Das Buch besteht aus 2 Teilen, deren letzter die 2 letztgenannten Abschnitte enthält. H.

Trigonometrie.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie mit zahlreichen Beispielen und Uebungsaufgaben. Für den Schul- und Selbstunterricht in leicht verständlicher Weise bearbeitet von W. Adam, Königl. Seminarlehrer in Neu-Ruppin. Mit einer Figurentafel. Neu-Ruppin 1876. P. Held. 147 S.

Das Lehrbuch lässt an Reichhaltigkeit und Vollständigkeit, Gründlichkeit, Correctheit, vernünftigem, sachgemässem Lehrgang, klarem und leichtfasslichem Vortrag nichts zu wünschen übrig. Zwar kann man in Betreff des Lehrgangs wol fragen, ob nicht statt einer so grossen Ausbreitung eine Concentration auf das Notwendige geeigneter wäre zu einer Beherrschung und Vertrautheit mit der Theorie zu führen, weil sonst der Umfang des zu Erlernenden sich weit grösser darstellt als er wirklich ist. Indes liegt es in der Hand des Lehrers das Notwendige hervorzuheben, den grossen übrigen Teil als Con-

sequenz und Gegenstand der Einübung erscheinen zu lassen. Die Goniometrie wird, soweit sie Basis der Dreieckslehre ist, vorher ganz erledigt. Dann folgen der Reihe nach die Fundamentalaufgaben über das rechtwinklige, gleichschenklige, allgemeine Dreieck, mit dem gleichschenkligen verbunden über die regulären Vielecke. Ausserdem ist aufgenommen die Construction trigonometrischer Formeln und die Anwendung der Goniometrie auf quadratische und kubische Gleichungen. Die Lehre vom allgemeinen Dreieck geht auch auf Uebungsaufgaben in weiterem Kreise ein und enthält auch solche für das Viereck.

H.

Erster Selbstunterricht in der Trigonometrie und der logarithmischen Rechnung. Gemeinverständlich dargestellt von Franz Vymazal. Brünn 1875. Fr. Karafiat. kl. 8°. 105 S.

Unter Voraussetzung der elementaren Mathematik werden die Hauptsätze der ebenen Trigonometrie und ihre Anwendung in erläuterndem Vortrag entwickelt. Letzterer führt zuerst das Gebiet der aus der Geometrie bekannten Dreiecksrelationen vor, erklärt daraus den Zweck der Einführung der Winkelfunctionen, betrachtet ausführlich das rechtwinklige, dann das gleichschenklige Dreieck, leitet 2 Sätze über das allgemeine Dreieck und einen für den Inhalt her und erweitert dann erst die Kenntniss der goniometrischen Relationen bis zum Umfang des Anwendbarsten. Ein zweiter Abschnitt giebt eine auf den Zweck beschränkte Potenzlehre, Erklärung der Logarithmen und ihrer Anwendung für trigonometrische Rechnung, zuletzt noch eine 5stellige Tafel der (nicht logar.) trigonometrischen Functionen von 10 zu 10 Minuten. Das Ganze ist mit viel Geschick und Umsicht für leichtes Verständniss bearbeitet. Vermissen kann man die Interpretation des Zeichens ∞, die hier wol am Orte gewesen wäre.

H.

Ueber schiefe trigonometrische Funktionen und ihrer Anwendung. Von Dr. Biehringer, Professor an der königl. Industrieschule in Nürnberg. Nördlingen 1877. C. H. Beck. 56 S.

Der Verfasser nennt sin, cos, tg, cot, sec, cosec eines Winkels für den Projectionswinkel φ die 6 Quotienten der Seiten eines Dreiecks mit dem Aussenwinkel φ, welche in der rechtwinkligen Trigonometrie die gleichnamige Bedeutung für $\varphi = R$ haben. Er entwickelt eine Anzahl Relationen dieser Functionen und giebt einige Anwendungen auf Geometrie und Mechanik. Er glaubt damit den Beweis geliefert zu haben, dass die neuen Functionen ein Interesse für sich in Anspruch nehmen können, und dass sie auch in andern Zweigen

der Mathematik eine Bedeutung haben, die einer weiteren Entwickelung fähig zu sein scheine. Jedenfalls ist aber der Beweis nicht gebracht, dass durch diese Theorie die Lösung irgend welcher Aufgaben gefördert worden wäre. Durch vermehrten Formelapparat ist der Einblick erschwert, durch Einführung einer Menge identischer Grössen, wo eine ausreicht, und von Functionen zweier Variabelen, wo wir bereits Functionen einer Variabelen besitzen, die Einfachheit beeinträchtigt. Wenn es Leute giebt, die in unbestimmter Hoffnung auf einen noch nicht ersichtlichen zukünftigen Nutzen eine sichtlich im Princip verfehlte Arbeit vollziehen wollen, so muss ihnen das überlassen sein; ein Interesse bei Anderen haben sie nicht zu beanspruchen. H.

Theorie der goniometrischen und der longimetrischen Quaternionen, zugleich als Einführung in die Rechnung mit Punkten und Vectoren. Von K. W. Unverzagt, Oberlehrer am königlichen Realgymnasium zu Wiesbaden. Mit 21 Holzschnitten. Wiesbaden 1876. C. W. Kreidel. 312 S.

Von dieser Schrift, die auch in der zuletzt besprochenen schiefen Trigonometrie ihren Ausgang nimmt, gilt dieselbe Bemerkung wie von der vorigen, dass sie eine Arbeit vollzieht, deren Nutzen ohne ersichtlichen Grund von der Zukunft erhofft wird. Dabei legt jedoch die gegenwärtige ein hervorragendes Talent an den Tag. Wenn es darauf ankam der von Hamilton erfundenen Theorie der Quaternionen, dieser heutzutage in England so beliebten Speculation in Widersprüchen, in Deutschland Eingang und Verbreitung zu verschaffen, so zeigt sich der Verfasser in hohem Grade dazu befähigt. Er giebt so klare, wenn auch nicht ausreichende, Rechenschaft über jeden Gegenstand, dass er wol den Schein zu erwecken vermag, als handele es sich um feste, nur der Gewohnheit nicht entsprechende, Begriffe. Wir können uns jede Ueberschreitung sonst geltender Grenzen gefallen lassen und dem Verfasser folgen, wenn Addition einen neuen Sinn erhält, bei der Multiplication die Ordnung der Factoren verschiedene Bedeutung bedingt, wenn sogar die Gleichheit nur bei gleicher Richtung den gewöhnlichen, bei ungleicher einen anderen Sinn haben soll. Eins aber müssen wir doch fordern, dass das einmal allgemein Aufgestellte immer gelten muss. Hier dagegen finden wir eine Seite eines beliebigen Dreiecks einer Complexen aus den beiden andern gleichgesetzt, was bei Vertauschung der Seiten sofort einen dreifachen Widerspruch giebt. Solche Einführungen verlassen den Boden der Mathematik und der exacten Begriffe überhaupt, und ohne letztere würde es zwecklos sein auf das Weitere einzugehen. H.

Geodäsie und praktische Geometrie.

Die Nivellirinstrumente und deren Anwendung. Von Dr. M. Doll, Lehrer der praktischen Geometrie am Polytechnikum in Carlsruhe. Mit fünf Tafeln. Stuttgart 1876. Adolf Bonz u. Comp. 30 S.

Es werden 3 kleine Instrumente zum einfachen Nivelliren und 2 grosse Präcisionsinstrumente beschrieben, welche sämmtlich auf den Tafeln abgebildet sind, dann das Verfahren bei Untersuchung der Instrumente und beim Nivelliren dargelegt. Der Vortrag ist auch ohne besondere Kenntniss für Schüler verständlich. H.

Die Lehre von der Beleuchtung und Schattirung (Schattenlehre) mit einem Anhang: Das Wichtigste aus der Farbenlehre. Von Professor G. Delabar, Conrector der Kantonsschule und Vorstand der Fortbildungsschule in St. Gallen. Mit 130 Figuren auf 34 lithographirten Farbentafeln und zwei Holzschnitten. Fünftes Heft der Anleitung zum Linearzeichnen, mit besonderer Berücksichtigung des gewerblichen und technischen Zeichnens. Freiburg i. Br. 1875. Herder. Quer 8⁰. 128 S.

Das Werk, welches durch das Gegenwärtige ergänzt wird, ist im 217. litt. Bericht besprochen. Auch dieser Abschnitt ist in leicht fasslichem, ohne besondere technische Kenntniss verständlichem Vortrag behandelt, und wird im allgemeinen den Anforderungen der Schule genügen. H.

Handbuch der barometrischen Höhenmessungen. Anleitung zur Berechnung der Höhen aus barometrischen und hygrometrischen Messungen, sowie zur Anstellung sämmtlicher bei den Höhenmessungen nöthigen Beobachtungen unter besonderer Berücksichtigung der Surrogate für das Quecksilberbarometer (Aneroide, Thermobarometer), für Ingenieure, Forschungsreisende, Meteorologen, Mitglieder der Alpenvereine etc. Von Dr. Paul Schreiber, Lehrer für Physik an den königl. technischen Lehranstalten in Chemnitz, Mitglied des deutschen und österreichischen Alpenvereins. Mit einem Atlas von 18 Grossfoliotafeln, enthaltend zahlreiche Karten und Figuren. Weimar 1877. Bernhard Friedrich Voigt. 307 S.

Das Buch ist, dem Titel ganz entsprechend, für einen vielseitigen Gebrauch bearbeitet, umfasst alle bei barometrischen Höhenmessungen in Betracht kommenden Erfordernisse und lässt an Vollständigkeit nichts zu wünschen übrig. Alle theoretischen Begründungen sind bei

Seite geblieben, desto sorgfältiger sind die notwendigen Angaben berücksichtigt, die man alle an der richtigen Stelle findet; auch ist bei Wegfall der Herleitungen doch der theoretische Zusammenhang in Deutlichkeit erhalten worden. Vortrefflich ist die kurze und einfache Beschreibung der Apparate, welche durch directe Darlegung der wesentlichen Punkte einen leichten Einblick gestattet. Ueberhaupt ist der Vortrag ohne Voraussetzung besonderer technischer Kenntniss verständlich und mit seltenem Geschick in bester Ordnung leichtfasslich gehalten. Es werden nach einander behandelt die Berechnung der Höhendifferenz zweier Orte, die Quecksilberbarometer, die Bestimmung des Luftdruckes aus der Temperatur des Dampfes des in offenen Gefässen kochenden Wassers, die Aneroide, die Apparate und Methoden zur Bestimmung von Lufttemperatur, Luftfeuchtigkeit und der geographischen Breite; dann folgen die Litteraturberichte, zum Schluss die Formeln der Ausgleichungsrechnungen. Mit besonderer Ausführlichkeit sind die Correctionen behandelt. Der Atlas enthält zuerst 9 Karten, deren 3 die Isothermen nach Dove, Buchan und Hann, 2 die Verteilung des Dunstdruckes nach Mohn, 3 die Isobaren nach Buchan und Wojeikow und 1 einen momentanen Witterungszustand in und um Europa darstellen, dann eine grössere Anzahl von Figurentafeln zur Erläuterung des Vortrags. H.

Mechanik.

Ueber die Bewegung einer Glocke. Von W. Veltmann, Realschullehrer in Düren. Dingler polyt. J. Bd. 220. S. 481—495.

Dieser Aufsatz ist veranlasst durch den Umstand, dass die „Kaiserglocke" im Cölner Dom infolge gleicher Schwingungsdauer mit ihrem Klöppel keinen Anschlag gab, und der Verfasser in Erfahrung brachte, dass die Anfertigung der Glocken noch fast aller theoretischen Basis entbehrte. Er berechnet zunächst die Bedingung übereinstimmender Oscillation beider Teile, als Pendel betrachtet, deren Axen parallel und im Gleichgewicht mit den Schwerpunkten in einer Verticale liegen. Es ergiebt sich ohne Schwierigkeit:

$$a = \frac{l - l_1}{1 + \frac{m_1}{m}\frac{l_1 - s_1}{s}}$$

wo a den Abstand der Axen, m, m_1 die Massen, l, l_1 die Pendellängen, s, s_1 die Entfernungen der Schwerpunkte von den respectiven Axen für beide Pendel bezeichnen. Wenn der Verfasser diese Bedingung ausreichend nennt, so ist vergessen, dass noch gleiche Elongation

und gleichzeitiger Beginn der Oscillation notwendig sind, damit überhaupt eine einfach periodische Schwingung stattfinden kann. Ein solcher Zustand ist im allgemeinen nicht vorhanden, und dass er sich während des Läutens von selbst annähernd herstellte, ist durch nichts begründet. Ferner ist nicht ersichtlich, warum unter den Grössen l, l_1, s, s_1, wie hier gesagt wird, nur die 3 ersten, nicht aber s_1 durch Beobachtung gefunden werden könne, da sich das statische Moment eines Pendels doch leicht abwägen lässt, und m, m_1 als bekannt betrachtet werden. Der Verfasser lässt es bei dem einen analytischen Resultat bewenden, und ersetzt, indem er zu der weitern Frage übergeht, wie von dem oben bestimmten, zu meidenden Falle an, das Verhältniss der Oscillationszeiten variirt, die Rechnung durch Experimente an einem Doppelpendel. Es wird für eine Reihe verschiedener a das Maximum des Winkels zwischen beiden Pendeln und die Anzahl der Oscillationen bis zu dessen Erreichung ermittelt. Hieran und an das Verhalten verschiedener Glocken, von denen Mitteilung gemacht wird, knüpfen sich die übrigen Betrachtungen, als deren Resultat die Regel aufgestellt wird, die Pendellänge der Glocke beim Aufhängen so klein als möglich zu machen und die des Klöppels so zu bestimmen, dass der Schwingungspunkt in gleicher Höhe mit dem Anschlagepunkte liegt. H.

Vermischte Schriften, Zeitschriften.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel I. II. Amsterdam 1875. 1876. Weytingh en Brave.

Diese Zeitschrift wird seit 2 Jahren von dem mathematischen Verein zu Amsterdam, Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven“ — herausgegeben. Sie erscheint in holländischer Sprache, 2 Hefte jährlich im März und September, die einen „Teil“ bilden. Jedes Heft enthält zum grössten Teil Abhandlungen; ausserdem bibliographische Verzeichnisse, manchmal auch verschiedene bibliographische Nachrichten. Der Inhalt der 2 ersten Teile an Abhandlungen ist fogender.

I. Teil.

H. Onnen. Bemerkung betreffend die Theorie der wesentlichen Gleichungen der ebenen Curven.

J. Versluys. Theorie der Quaternionen.

A. Benthem. Theorie der Functionen variabeler complexer Zahlen.

J. Korteweg. Ueber die Wahrscheinlichkeit verschiedener möglichen Wahlresultate, wobei Wähler von zweierlei Farbe sich nach dem Loos in Abteilungen scheiden.

P. van Geer. Ueber den Gebrauch der Determinanten bei der Methode der kleinsten Quadrate.

H. J. Rink. Ueber die Bewegung eines halbenrechten kreisförmigen Kegels, der mit seiner Erzeugenden auf einer horizontalen Ebene liegt.

A. Benthem. Herleitung der Cardanischen Formel im irreducibelen Falle.

H. A. Lorentz. Auflösung der Preisfrage Nr. 12.

J. W. Tesch. Ueber die Stellung der Ebene, welche eine centrale Fläche 2. Grades längs einer gleichseitigen Hyperbel schneidet.

G. Schouten. Die Aberration des Lichts.

F. van Wageningen. Krummlinige Bewegung eines Billardballs.

II. Teil.

M. C. Paraira. Einiges über eine Transformation 2. Grades.

W. Kapteyn. Betrachtung über symmetrische Functionen.

G. Schouten. Auflösung der Preisfrage Nr. 7.

F. J. Stamkart. Ueber die Berechnung einer Prämie für eine Lebensversicherung, die *n* mal im Jahr bezahlt werden soll, statt einer bekannten Jahresprämie.

D. Bierens de Haan. Einiges über die „Théorie des fonctions de variables imaginaires, par M. Maximilien Marie“.

D. J. Korteweg. Ueber Näherungsformeln für Reihensummen, die aus einer grossen Anzahl von Termen bestehen.

J. H. van Leeuwen. Teilung des Winkels in 3 gleiche Teile.

F. van Wageningen. Kreise, welche 3 gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneiden.

A. Benthem. Convergenz von Reihen mit complexen Termen.

H.

Nouvelle Correspondance mathématique. Rédigée par Eugène Catalan, Docteur ès sciences, Professeur à l'université de Liége; avec la collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg, et Edouard Lucas. Tome deuxième. Liége 1876. E. Decq.

Der Inhalt der 2. Hälfte des Bandes an Abhandlungen ist folgender.

E. Lucas. Ueber die Anwendung des symbolischen Calculs in der Theorie der recurrenten Reihen.

E. Lucas. Principien der tricircularen und tetrasphärischen Geometrie.

P. Mansion. Beweis des Reciprocitätsgesetzes der quadratischen Reste.

J. W. L. Glaisher. Ueber eine Eigenschaft der Function $e^{\sqrt{x}}$.

Catalan. Ueber ein Product von Sinus.

Brocard. Ueber einen Diophantischen Satz.

Boset. Geometrische Sätze.

Laisant. Ueber eine paradoxale Frage.

H. Brocard. Note über einen geometrischen Ort.

Le Paige. Bemerkung über die Note von Glaisher.

Le Paige. Ueber die Enveloppe eines Rotationscylinders.

Le Paige. Ueber eine Gleichung mit endlichen Differenzen.

Tchébychef. Ueber die Verallgemeinerung einer Formel von Catalan.

P. Mansion. Ueber 2 Fragen infinitesimaler Analysis.

P. Mansion. Ueber die unicursalen Curven als Cissoiden betrachtet.

E. Lucas. Ueber den symbolischen Calcul der Bernoullischen Zahlen.

Gelin. Bemerkenswerter Fall von Ungleichheit zweier Dreiecke.

Laisant. Bemerkung über einen arithmetischen Satz.

E. Catalan. Ueber die Transformation der Gleichungen.

P. Mansion. Ueber die vermeintlichen paradoxalen Fragen.

H. Brocard. Rollcurven der Kegelschnitte.

E. Lucas. Ueber die Anwendung eines neuen Princips der Vorzeichen in der Geometrie.

Preisaufgaben

der

Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft

in

Leipzig.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.

1. Für das Jahr 1877.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalieen gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt deshalb die Aufgabe:

> die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

2. Für das Jahr 1878.

Die Entwickelung des reciproken Werthes der Entfernung r zweier Punkte spielt in astronomischen und physikalischen Problemen eine hervorragende Rolle. In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird die zuerst von Cauchy entdeckte Gleichung bewiesen

$$\frac{a}{r}\left(1+2e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{4\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{9\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{16\pi a^2}{r^2}}\ldots\right)=$$

$$=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{16\pi r^2}{a^2}}\ldots$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante a so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse $e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}$ vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r}=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+\ldots$$

eine Reihenentwickelung von ungemein rascher Convergenz. Es steht zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwickelung der Störungsfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vortheilhaft erweisen werde.

> Die Gesellschaft wünscht eine unter dem angedeuteten Gesichtspunkte ausgeführte Bearbeitung des Störungsproblems zu erhalten.

Indem sie dem Bearbeiter die Wahl des besonderen Falles überlässt, in welchem die numerische Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden soll, setzt sie voraus, dass das gewählte Beispiel hinlänglichen Umfang und Wichtigkeit besitze, um die Tragweite der vorgeschlagenen Methode und ihr Verhältniss zu den bisher angewandten hervortreten zu lassen. Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1879.

Durch die in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von W. Hankel veröffentlichten Untersuchungen ist nachgewiesen worden, dass die Thermoelektricität nicht nur auf den hemimorphen Krystallen auftritt, sondern eine an allen Krystallen wahrzunehmende Eigenschaft ist, soweit deren krystallinische Structur und materielle Beschaffenheit überhaupt ein Entstehen und Anhäufen der Elektricität bis zu einer durch unsere Instrumente nachweisbaren

Stärke gestatten. Die erwähnten Abhandlungen umfassen ausser den hemimorphen Krystallen des Boracites und Quarzes die symmetrisch gebildeten Krystalle des Idokrases, Apophyllits, Kalkspathes, Berylls, Topases, Schwerspathes, Aragonites, Gypses, Diopsids, Orthoklases, Albits und Periklins, und lehren nicht nur die Vertheilung der Elektricität auf den in den verschiedenen Formen vollkommen ausgebildeten, sondern auch auf den durch Anwachsen und sonstige Hindernisse in ihrer Entwickelung gehemmten Individuen, sowie auf den durch Bruch oder Anschlagen der Durchgänge künstlich erzeugten Begrenzungsflächen kennen. Es scheinen nun unter allen zwischen der Wärme und der Elektricität beobachteten Beziehungen die thermoelektrischen Erscheinungen am geeignetsten, eine nähere Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den genannten beiden Agentien zu ermöglichen, und es wird daher von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879 als Preisaufgabe gestellt:

> Auf streng physikalische Versuche gestützter Nachweis der Entstehung der auf Krystallen bei steigender und sinkender Temperatur hervortretenden Elektricität (Thermoelektricität, Pyroelektricität, Krystallelektricität) und der durch Bildungshemmnisse oder äussere Verletzungen derselben in der normalen Vertheilung entstehenden Aenderungen.

Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1879.

Die hinterlassene Abhandlung Hansen's „Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter", abgedruckt im XI. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, enthält als Anwendung der daselbst gelehrten Methode zur Entwickelung der planetaren Störungen die numerische Berechnung derjenigen Störungsglieder in der Bewegung des Jupiter, welche unter der Berücksichtigung der ersten Glieder ihrer analytischen Entwickelung abgeleitet werden können. Für die Berechnung der durch den Saturn bewirkten Störungen der Länge und des Radiusvectors dagegen erscheint die angeführte Methode nicht geeignet, und Hansen verweist in dieser Beziehung auf seine früheren Arbeiten aus der Störungstheorie, welche die erforderlichen Vorschriften enthalten. Ein grosser Theil der numerischen Rechnungen findet sich bereits in der im Jahre 1830 von der Berliner Akademie gekrönten Preisschrift „Ueber die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns" ausgeführt. Es ist jedoch der

Theil der Rechnung, welcher die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf die Massen betrifft, nicht vollendet worden. Sofern diese Glieder von Einfluss werden können auf die vollständige Berechnung der Säcularänderungen, sowohl in Bezug auf die Länge und den Radius-vector, als in Bezug auf die Breite, sind auch die in der nachgelassenen Abhandlung Hansen's enthaltenen Werthe dieser Säcularglieder nicht als definitiv anzusehen.

In den letzten Jahren ist die Theorie der Jupitersbewegung durch die umfangreichen Arbeiten von Leverrier ihrem Abschlusse entgegengeführt worden. Da jedoch der berühmte französische Astronom sich wesentlich anderer Methoden, wie Hansen, bedient hat, so bleibt es dringend wünschenswerth und von hohem wissenschaftlichen Interesse, dass die vollständige Berechnung der Jupitersstörungen auf Grund der Hansen'schen Theorie zu Ende geführt werde. Die Gesellschaft stellt daher

die ergänzende Berechnung der vollständigen Jupitersstörungen nach den von Hansen angegebenen Methoden

als Preisaufgabe für den Termin des 30. November 1879. Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1877 Geheimer Rath Prof. Dr. Roscher) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Digitized by Google

z	3	4	5	6
1	6,3785	6,6821	6,9065	7,0852
1,	6,3882	6,6918	6,9163	7,0950
	3978	7015	9260	1047
	4074	7110	9355	1143
	4168	7205	9450	1238
	4261	7298	9544	1332
	4353	7391	9637	1425
	4444	7482	9729	1517
	4535	7573	9819	1608
	4624	7663	9909	1699
1,	4712	7751	9998	1788
	6,4800	6,7839	7,0087	7,1876
	5631	8673	0923	2716
	6389	9434	1688	3483
	7088	7,0135	2391	4190
	7734	0785	3044	4845
	8336	1390	3652	5456
	8900	1956	4221	6028
	9429	2488	4756	6566
1,0(	9928	2991	5261	7074
	7,0401	3466	5739	7555
	0849	7,3917	7,6193	7,8012
	1276	4347	6626	8447
	1683	4757	7038	8863
	2072	5148	7433	9261
	2444	5524	7811	9642
	2802	5884	8175	8,0008
	3145	6230	8524	0360
	3476	6564	8860	0699
1,0(	3795	6885	9185	1026
	4102	7196	9498	1343
	6,4400	7,7496	9801	8,1649
	4687	7787	8,0094	1945
	4966	8068	0379	2232
	5236	8341	0655	2511
	5498	8606	0922	2781
	5753	8863	1183	3045
	6000	9114	1436	3301
	6241	9358	1682	3550
1,0(	6476	9595	1923	3793
	6704	9826	2157	4030
	6,6927	8,0052	8,2385	8,4261
	7144	0272	2608	4487
	7356	0487	2826	4708
	7563	0697	3039	4924
	7766	0902	3247	5135
	7964	1103	3451	5341
	8158	1300	3650	5544
	8347	1492	3845	5742

6	z	r 3	r 4	r 5	r 6
9,2597	1,56	0,1113	0,5541	0,9214	1,2463
2697	57	1288	5738	9433	2706
2796	58	1459	5932	9650	2947
9,2895	59	1629	6123	9864	3184
3833	1,60	0,1796	0,6311	1,0075	1,3419
4699	61	1960	6497	0284	3650
5504	62	2121	6680	0490	3879
6257	63	2281	6861	0693	4106
6965	64	2438	7040	0894	4330
7634	65	2593	7216	1092	4551
8268	66	2746	7390	1288	4770
8872	67	2896	7562	1482	4986
9448	68	3045	7731	1674	5201
0,0000	69	3192	7899	1863	5413
0530	1,70	0,3336	0,8065	1,2050	1,5623
1039	71	3479	8228	2236	5830
1530	72	3620	8390	2419	6036
2004	73	3760	8550	2600	6239
2462	74	3897	8708	2780	6441
2906	75	4033	8864	2957	6640
3337	76	4168	9019	3133	6838
3756	77	4300	9172	3307	7034
4162	78	4432	9323	3480	7228
0,4558	79	4561	9473	3650	7420
4944	1,80	0,4689	9621	1,3819	1,7611
5321	81	4816	9768	3987	7800
5688	82	4941	9913	4152	7987
6047	83	5065	1,0057	4317	8172
6398	84	5188	0199	4479	8356
6741	85	5309	0340	4641	8539
7078	86	5429	0479	4801	8720
7407	87	5548	0618	4959	8899
7730	88	5666	0754	5116	9077
0,8047	89	5782	0890	5272	9253
8358	1,90	0,5897	1,1024	1,5426	1,9428
8663	91	6011	1158	5579	9602
8963	92	6124	1290	5731	9774
9258	93	6236	1420	5882	9945
9548	94	6347	1550	6031	2,0115
9834	95	6456	1678	6179	0283
1,0114	96	6565	1806	6326	0450
0391	97	6673	1932	6472	0616
0663	98	6779	2057	6616	0780
0931	99	6885	2181	6760	0944
1195	2,0	0,6990	1,2304	1,6902	1,1106
1456	1	7988	3483	8269	2667
1713	2	8908	4577	9543	2,4128
1966	3	9761	5597	2,0738	5502
[illegible]16	4	1,0557	6555	1864	6801

z	r 3	4	5	6
14	3,6903	5,0182	6,2921	7,5368
15	7836	1411	4447	7193
16	8707	2558	5873	8898
17	9523	3634	7211	8,0499
18	4,0291	4648	8472	2006
19	1016	5605	9663	3432
20	1703	6513	7,0792	4783
21	2355	7375	1865	6067
22	2977	8197	2888	7291
23	3569	8981	3864	8461
24	4137	9731	4799	9580
25	4680	6,0451	5695	9,0652
26	5202	1142	6555	1683
27	5703	1806	7383	2674
28	6186	2446	8180	3629
29	6652	3063	8949	4550
30	4,7101	3659	7,9692	5440
31	7536	4235	8,0410	6300
32	7956	4792	1105	7133
33	8364	5333	1779	7940
34	8759	5857	2432	8722
35	9142	6,6365	3066	9482
36	9515	6859	3682	10,0221
37	9877	7340	4281	0939
38	5,0229	7807	4865	1637
39	0572	8263	5432	2318
40	0906	8706	8,5986	2981
41	1232	9139	6525	3628
42	1550	9561	7052	4259
43	1860	9973	7566	4875
44	2163	7,0376	8068	5477
45	2459	0769	8559	10,6065
46	2749	1154	9039	6640
47	3032	1530	9508	7203
48	3310	1899	9968	7754
49	3581	2259	9,0418	8294
50	5,3847	2613	0859	8822
60	5,6245	7,5800	9,4837	11,3591
70	5,8269	7,8492	9,8197	11,7620
80	6,0021	8,0822	10,1107	12,1109
90	6,1565	8,2876	10,3672	12,4186
100	6,2945	8,4713	10,5966	12,6937

de $^{2}(1+2z+3z^{2}+\ldots(r-1)z^{r-2})$, teils, zu
di ach der 7-stelligen Tafel von Schrön u

)

13	14	15
— ∞	— ∞	— ∞
11,8191	12,8181	13,8171
9571	9551	9531
12,0326	13,0296	14,0266
0826	0786	0746
1185	1135	1085
1456	1396	1336
1667	1597	1527
1831	1751	1671
1962	1872	1782
2066	1966	1866
2148	2038	1928
2212	2092	1972
2261	2131	2001
2297	2157	2017
2322	2172	
2337	2177	
2344		

Digitized by Google

HARVARD LIBRARY

14	15
+∞	+∞
13,7516	14.7466
5334	5234
3778	3628
2479	2279
1319	1069
0248	13,9948
12,9236	8886
8271	7871
7340	6890
6436	5936
5551	5001
4687	4087
3838	3188
2999	2299
2174	1424
1356	0556
0549	12,9699
11,9748	884[3])
8954	8004
8167	7167
7384	6334
6605	5505
5832	4682
5063	3863
4296	3047
3533	2233
2774	1424
2016	0616
1264	11,981[5])
0512	9012
10,9017	7417
7527	5827
6046	4246
4574	2674
3104	110[7])
1641	10,9541
0183	7983
9,8725	6425
7273	4873
5828	3328
4382	1782
2941	0242
1500	9,8700
0064	7165
8,8632	5632

Digitized by Google

H. v. Frank: Construction der Wellenfläche.

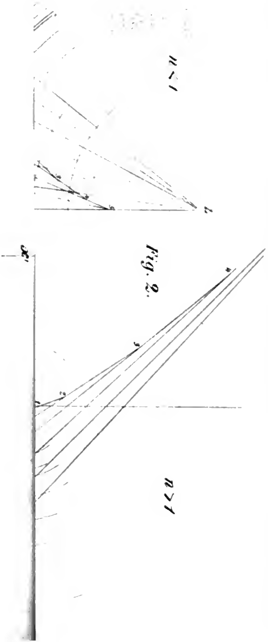
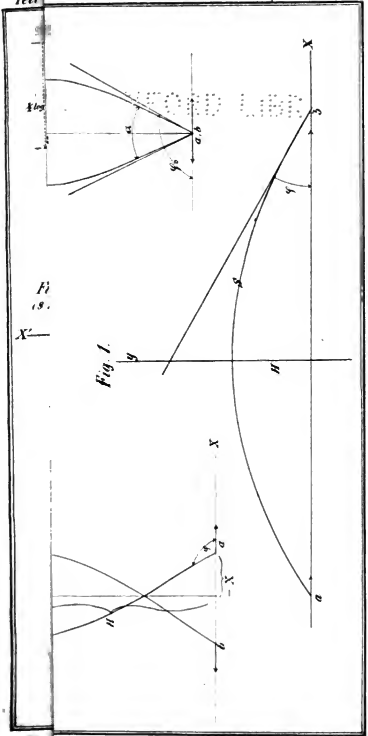


Fig. 2.

Digitized by Google



Steindruckerei von F.W. Kunike zu Greifswald.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig

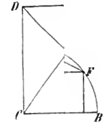


Fig. 5.

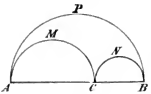


Fig. 11.

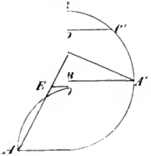
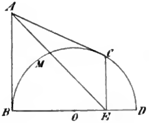
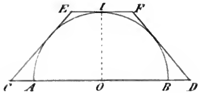


Fig. 10.



Fig

Fig. 16.



XXVIII. ...aire. Par Georges Dostor.

Steindruckerei v. F.W. Kunike, Greifswald

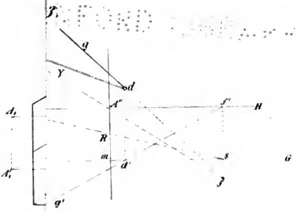
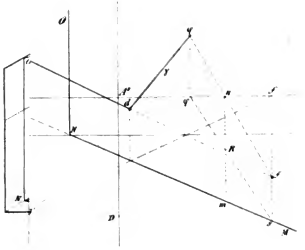


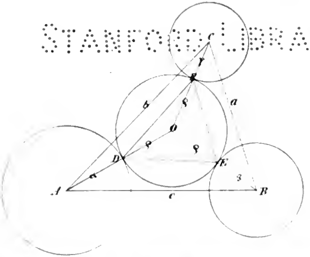
Fig. 6.



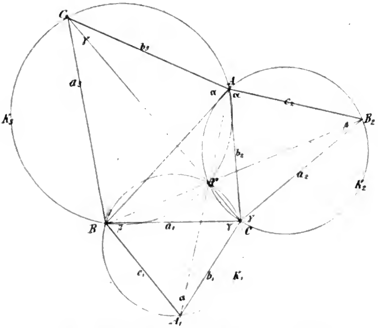
Steindruckerei von F. W. Kunike Greifswald

Digitized by Google

STANFORD LIBRARY



XL. Matthes: Radius des Kreises, der 3 Kreise berührt.



XL. Engelbrecht: Planimetrischer Lehrsatz

Digitized by Google

Digitized by Google

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

510.5
u673
v.60

STORAGE AREA